7 клас

1. У Тридев'ятому царстві діє закон, за яким кожні два міста мають бути з'єднані між собою окремою дорогою. Після того, як цар заснував 5 нових міст, довелося побудувати ще 2015 доріг. Скільки міст стало у Тридев'ятому царстві? Відповідь обґрунтуйте.

1. Щоб з'єднати між собою нові міста, потрібно побудувати 10 доріг. Решта 2005 доріг з'єднають нові міста зі старими, яких, таким чином, було $2005:5=401.$ Тому міст у царстві стало 406.

2. Дванадцять солдатів повинні одночасно якнайшвидше потрапити у пункт, розташований на відстані 30 км від місця їх знаходження. Для цього вони зупинили легковий автомобіль, який міг їхати зі швидкістю 30 км/год і одночасно, крім водія, перевозити лише чотирьох. Водій забрав чотирьох солдатів і підвіз їх на деяку відстань, потім повернувся, забрав ще чотирьох і знову підвіз на певну відстань. Тоді знову повернувся і довіз решту солдатів до місця призначення. Виявилося, що всі солдати прибули у вказаний пункт одночасно. Скільки часу вони затратили на подолання всієї відстані, якщо відомо, що пішки кожен з них рухався без відпочинку зі швидкістю 6 км/год. Відповідь обґрунтуйте.

2. Водій повинен провезти чотирьох солдатів 18 км і висадити їх за 12 км від кінцевого пункту. Потім повернутися назад на 12 км, щоб підібрати наступних чотирьох солдатів із восьми, які за цей час пройдуть 6 км, та провезти їх також на 18 км, висадивши за 6 км до кінцевого пункту. Тоді ще раз повернутись назад на 12 км за останніми чотирма солдатами, які у даний час опиняться на відстані 12 км від початкового пункту, і везти їх 18 км до пункту призначення. Таким чином, усі прибудуть до місця призначення одночасно. При цьому автомобіль проїде 78 км за 2 год 36 хв. Стільки ж часу затратять і солдати на свою передислокацію.

3. Є 7 гир з масами 1г, 2г, 3г, 4г, 5г, 6г та 7г. Миколка і Петрусь по черзі беруть одну з гир і кладуть її, не знімаючи попередніх, на терези зі стрілкою, яка показує загальну масу покладеного вантажу. Якщо після чергової гирі стрілка покаже масу, більшу 20г, то той, хто поклав цю гирю, програв. Миколка розпочинає гру і обіцяє перемогти. Чи може Петрусь йому завадити у цьому? Відповідь обґрунтуйте.

3. Не може. Для перемоги Миколці потрібно першою покласти гирю масою 4г. Решту 6 гир розіб'ємо на пари: (1г, 7г), (2г, 6г), (3г, 5г). Кожним наступним ходом Миколка відповідає вибором гирі з тієї ж пари, з якої перед цим взяв гирю Петрусь. При цьому після третього ходу Миколки стрілка покаже масу 20г. Тому, зробивши свій третій хід, Петрусь програє.

4. У Марійки є квадрат розміром $13\times13.$ Вона хоче вирізати з нього якнайбільше прямокутників розмірами $1\times5.$ Яку максимальну кількість таких прямокутників зможе отримати Марійка? Відповідь обґрунтуйте.

4. Оскільки $13\cdot13=169=33\cdot5+4,$ то більше 33 таких прямокутників отримати не вдасться. Щоб отримати 33 прямокутники, відріжемо від квадрата смугу розмірами $13\times5,$ яку можна розрізати на 13 потрібних фігурок. Від решти відріжемо смугу розмірами $8\times5,$ з якої отримаємо 8 прямокутників розмірами $1\times5.$ І, нарешті, квадрат розміром $8\times8,$ який залишився, розріжемо на 4 прямокутники розмірами 3×5 та один квадратик у його центрі розміром $2\times2.$ З останніх чотирьох прямокутників у сукупності отримаємо ще 12 фігурок потрібної форми і розмірів.

8 клас

1. Фермер виявив, що його кінь і корова з'їдають стіжок сіна за 9 днів, кінь і коза такий самий стіжок з'їдають за 12 днів, а корова і коза – за 18 днів. За скільки днів з'їли би такий стіжок сіна кінь, корова та коза разом?

1. Нехай два коні, дві корови та дві кози, розбившись на пари, як в умові задачі, з'їдають по декілька аналогічних стіжків протягом 36 днів. Перша пара за цей час з'їсть 4 стіжки, друга – 3, третя – 2. Разом – 9 стіжків. Таким чином, об'єм сіна в один стіжок вони разом з'їдають за 4 дні. Відповідно, один кінь, одна корова та одна коза разом з'їли би такий стіжок за 8 днів.

2. Відомо, що число $\overline{aba}$, $a > b > 0$, ділиться на 7. Доведіть, що й число $\overline{bab}$ ділиться на 7, та знайдіть кількість пар $\left(\overline{aba}, \overline{bab}\right)$ чисел з описаними властивостями.

2. Оскільки $\overline{aba} - \overline{bab} = (100a + 10b + a) - (100b + 10a + b) = 91(a - b)$ ділиться на 7, то й $\overline{bab}$ ділиться на 7. Крім того, $\overline{aba} = 100a + 10b + a = 7(14a + b) + 3(a + b)$. Тому обидва ці числа діляться на 7 тоді і тільки тоді, коли $a + b$ ділиться на 7. Для $a + b = 7$ таких пар отримаємо три, а для $a + b = 14$ їх є дві. Разом маємо 5 пар, а саме: $(434, 343)$, $(525, 252)$, $(616, 161)$, $(959, 595)$, $(868, 686)$.

3. Для додатних чисел x, y, z доведіть нерівність $xyz^2 + xy^2 + x^2 + 4 \geq 4xyz$.

3. Оскільки $x^2 + 4 \geq 4x$, $y^2 + 4 \geq 4y$, $z^2 + 4 \geq 4z$, то

$$xyz^2 + xy^2 + x^2 + 4 \geq xyz^2 + xy^2 + 4x = x\left(yz^2 + y^2 + 4\right) \geq x\left(yz^2 + 4y\right) = xy\left(z^2 + 4\right) \geq xy \cdot 4z = 4xyz.$$

4. Восьмикласник намалював на листку паперу прямокутний трикутник ABC, гіпотенуза AB якого дорівнює 13см, і стверджує, що зуміє розрізати його на 13 однакових трикутників. Чи може таке твердження бути правдою? Відповідь обґрунтуйте.

4. Може. Нехай висота CH ділить гіпотенузу на відрізки з довжинами 9см та 4см. Тоді з подібності трикутників ACH та CBH знайдемо $CH = 6$см. Розрізавши трикутник ABC вздовж CH, отримаємо два прямокутні трикутники. Сторони більшого з них поділимо на 3 рівні частини, а меншого – пополам. Далі, розрізуючи кожен з цих трикутників по прямих, які проходять через точки поділу паралельно до їхніх сторін, отримаємо з більшого 9, а з меншого 4 однакові прямокутні трикутники з катетами 3см та 2см. Разом – 13 однакових трикутників.

5. Є купа з 2015 монет. Миколка та Петрусь грають у гру, змінюючи по черзі кількість монет у цій купі за такими правилами: за один хід до купи можна або докласти 1 монету, або з купи можна взяти 4 монети, якщо їх кількість там не менша від чотирьох монет. Той з гравців, хто бере останню монету, перемагає у грі. Хто виграє у цій грі, якщо першим робить хід Миколка?

5. Виграє Миколка. Першим ходом він докладає до купи 1 монету. Їх у купі стане 2016. Далі, якщо Петрусь бере 4 монети, то Миколка докладає одну, і навпаки, якщо Петрусь докладає одну мотету, то Миколка забирає 4. Таким чином, після кожного ходу Миколки кількість монет у порівнянні з його попереднім ходом зменшується на 3 і ділиться на 3. Звідси випливає, що саме він забере останню монету.

9 клас

1. Білка піднімається на стовбур дерева по спіралі, піднімаючись за один виток на 2 м. Скільки метрів подолає вона, піднявшись на висоту 8 м, якщо обхват стовбура становить 1,5 м?

1. Піднімаючись на 2 м по стовбуру дерева, білка долає шлях довжиною 2,5 м, що легко отримати за теоремою Піфагора, розглянувши розгортку стовбура. Тому, піднявшись на висоту 8 м, вона подолає шлях довжиною 10 м.

2. Нехай m та n – такі натуральні числа, що значення виразу $3m^2 - mn^2 - 2n - 4$ також є натуральним числом. Яким найменшим може бути натуральне значення цього виразу?

2. Найменшим натуральним значенням такого виразу є 2. Справді, $3m^2 - mn^2 - 2n - 4 = 2$ для $m = 4,\ \ n = 3.$ А рівність $3m^2 - mn^2 - 2n - 4 = 1$ неможлива, бо її ліва частина є непарним числом лише для непарних m та парних $n.$ Але тоді її остача при діленні на 4 дорівнює 3.

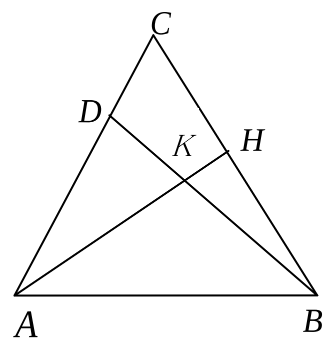
3. Знайдіть усі значення параметра a, за яких система рівнянь

$$\begin{cases} ax^2 + 2015x + 1 = 0, \\ x^2 + ax + 2015 = 0, \\ 2015x^2 + x + a = 0 \end{cases}$$

має принаймні один дійсний розв'язок.

3. Додавши рівняння системи, отримаємо $(a + 2016)\left(x^2 + x + 1\right) = 0.$ Оскільки другий множник у лівій частині отриманого рівняння дійсних коренів не має, то підходить тільки $a = -2016.$ При цьому всі три рівняння матимуть спільний дійсний корінь $x = 1.$

4. У рівнобедреному трикутнику ABC $(AC = BC)$ на стороні AC вибрали точку $D.$ Висота AH перетинає відрізок BD у точці $K.$ Виявилося, що $AD = AK.$ Знайдіть величину кута $ABD.$



4. Нехай $\angle ABD = \varphi,\ \ \angle CAB = \angle CBA = \alpha$. Тоді з умови задачі та властивості зовнішнього кута трикутника ABK (див. рис.) маємо

$$\angle ADB = \angle ADK = \angle AKD = \angle KAB + \angle KBA = \left(90^\circ - \alpha\right) + \varphi.$$

З іншого боку, $\angle ADB = 180^\circ - \angle DAB - \angle DBA = 180^\circ - \alpha - \varphi.$

З цих двох рівностей знаходимо $\varphi = 45^\circ.$

5. Три місіонери і три канібали повинні переправитися через ріку у невеликому човні, в якому одночасно можуть поміститися не більше двох осіб. Знаючи про смаки канібалів, місіонери не могли дозволити собі залишатися на жодному березі ріки у меншості. Яким чином вони можуть переправитися через ріку, якщо серед них гребти вміє лише один місіонер та один канібал?

5. Позначимо трьох місіонерів через М м м, а трьох канібалів через К к к; великими буквами позначені місіонер і канібал, які уміють гребти. Умову задачі задовольняє, наприклад, така схема переправи: 1) переправляються К к; 2) К повертається на човні назад; 3) переправляються К к; 4) К повертається; 5) переправляються М м; 6) повертаються М к; 7) переправляються М К; 8) повертаються М к; 9) переправляються М м; 10) К повертається; 11) переправляються К к; 12) К повертається; 13) переправляються К к.

10 клас

1. Миколка записав число $A=\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9}$, всі цифри якого попарно різні, і обчислив суму $S=\overline{a_1a_2a_3}+\overline{a_4a_5a_6}+\overline{a_7a_8a_9}=2015$. Визначте, яка цифра відсутня у записі числа A, і наведіть приклад хоч одного числа, яке міг записати Миколка.

1. Оскільки $2015=S=9\left[11\left(a_1+a_4+a_7\right)+\left(a_2+a_5+a_8\right)\right]+\left(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9\right)$, то число A при діленні на 9 дає остачу 8. Враховуючи, що сума всіх десяти цифр від 0 до 9 дорівнює 45, робимо висновок, що у записі числа A відсутня цифра 1. Умову задачі задовольняє, наприклад, число 907863245. Зрозуміло, що воно не єдине. Зокрема, перестановками трійок цифр з нього отримуємо ще 5 таких чисел: 907245863, 863907245, 863245907, 245907863, 245863907.

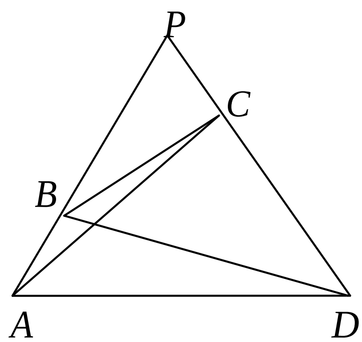
2. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x+y^2=y^3, \\ y+x^2=x^3. \end{cases}$

2. Віднявши від другого рівняння системи перше, отримаємо $y-x+x^2-y^2=x^3-y^3$. Розклавши на множники різниці квадратів та кубів, запишемо цю рівність у вигляді

$$\left(x-y\right)\left(x^2+xy+y^2-x-y+1\right)=0\Leftrightarrow\left(x-y\right)\left[\left(x+y\right)^2+\left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2\right]=0.$$

Оскільки доданки у квадратних дужках не можуть одночасно дорівнювати нулю, то $x=y$. Тоді з рівняння $x^3-x^2-x=0$ знаходимо $x_1=0$, $x_{2,3}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Тому система має 3 розв'язки $(x,\ y)$: $(0;\,0)$, $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

3. У чотирикутнику $ABCD$ кути $\angle BAD=\angle CDA=60^\circ$ та $\angle CDB=\angle CAD$. Доведіть, що $AB+CD=AD$.



3. Продовжимо сторони AB та CD до перетину у точці P (див. рис.). Утворився рівносторонній трикутник ADP, тому $\Delta ABD=\Delta PCA$ за рівними сторонами $AD=AP$ та відповідними рівними кутами: $\angle ADB=60^\circ-\angle CDB=60^\circ-\angle CAD=\angle PAC$ й $\angle BAD=\angle CPA=60^\circ$. Отже, $AB=PC$, звідки

$$AB+CD=PC+CD=PD=AD.$$

4. Для всіх натуральних чисел n доведіть нерівність

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot\left(n+1\right)\cdot\left(n+2\right)}<\frac{1}{4}.$$

4. Позначимо суму у лівій частині нерівності через S. Маємо

$$S=\frac{1}{2}\left[\frac{2\cdot3-1\cdot2}{1\cdot2\cdot2\cdot3}+\frac{3\cdot4-2\cdot3}{2\cdot3\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{\left(n+1\right)\cdot\left(n+2\right)-n\cdot\left(n+1\right)}{n\cdot\left(n+1\right)\cdot\left(n+1\right)\cdot\left(n+2\right)}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot3}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n\cdot\left(n+1\right)}-\frac{1}{\left(n+1\right)\cdot\left(n+2\right)}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{\left(n+1\right)\cdot\left(n+2\right)}\right)<\frac{1}{4}.$$

5. У футбольному турнірі, в якому взяли участь 16 команд, кожна команда зіграла з кожною іншою по одному разу. Чи могло трапитися так, що у кожної команди кількість її перемог дорівнює кількості її нічиїх?

5. Могло. Розташуємо команди по колу. Нехай кожна команда виграє у п'яти команд, які йдуть по колу після неї, і програє п'ятьом командам, які йдуть по колу перед нею, а решту 5 ігор завершує внічию. Тоді у кожної команди виявиться по 5 перемог та нічиїх.

11 клас

1. Фокусник збирається вгадати задумане двоцифрове число. Для цього він просить сказати йому остачі x, y, z від ділення задуманого числа на 3, 5 та 7 відповідно. Обчисливши суму $70x+21y+15z,$ фокусник називає задумане число. Поясніть, як йому це вдається?

1. Нехай задумане число $a=3m+x=5n+y=7k+z.$ Тоді сума

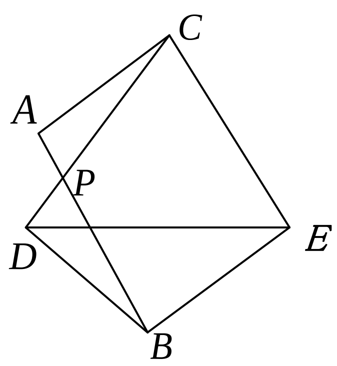
$$70x+21y+15z=70(a-3m)+21(y-5n)+15(a-7k)=a+105(a-2m-n-k)$$

або співпадає із задуманим числом, або відрізняється від нього на величину, кратну 105. Враховуючи нерівності $0\le x\le 2,$ $0\le y\le 4,$ $0\le z\le 6,$ нескладно зрозуміти, що $70x+21y+15z\le 70\cdot 2+21\cdot 4+15\cdot 6=314.$ Тому фокусникові доведеться щонайбільше двічі віднімати 105 від обчисленої ним суми.

2. Знайдіть усі дійсні значення параметра $a,$ за яких система нерівностей $\begin{cases} x\ge x^2+y^2+0{,}125a, \\ y\ge x^2+y^2+0{,}125a \end{cases}$ має єдиний розв'язок.

2. Запишемо задану систему у вигляді $\begin{cases} (x-0{,}5)^2+y^2\le 0{,}25(1-0{,}5a), \\ x^2+(y-0{,}5)^2\le 0{,}25(1-0{,}5a). \end{cases}$

При $a\ge 2$ обидві нерівності системи не мають розв'язків. При $a=2$ єдині розв'язки кожної з нерівностей існують, але не співпадають між собою. Якщо ж $a<2,$ то нерівності заданої системи визначають круги радіуса $R=0{,}5\sqrt{1-0{,}5a}$ з центрами у точках $A(0{,}5;0)$ та $B(0;0{,}5)$ відповідно. Тому для єдиності розв'язку необхідно і достатньо, щоб ці круги дотикалися. З рівності $2R=AB,$ тобто $\sqrt{1-0{,}5a}=0{,}5\sqrt{2},$ знаходимо $a=1.$



3. Відрізки AB та CD довжиною 1 перетинаються у точці $P,$ причому $\angle DPB=60°.$ Доведіть, що $AC+BD\ge 1.$

3. Побудуємо паралелограм $ACEB$ (див. рис.). Оскільки $CE=AB=CD=1,$ а $\angle DCE=\angle DPB=60°,$ то трикутник CDE рівносторонній. Тому $AC+BD=BE+BD\ge DE=1.$

4. Знайдіть усі многочлени $P(x)$ з дійсними коефіцієнтами, які для кожного дійсного x задовольняють рівність $P(P(x))=(x^2+2015x+2015)P(x).$

4. Очевидно, що многочлен $P(x)\equiv 0$ задовольняє умову. Нехай тепер $P(x)$ не є тотожнім нулем і має степінь $n, n\ge 0.$ Тоді у заданій рівності многочлен зліва має степінь $n^2,$ а справа – степінь $n+2.$ З рівності $n^2=n+2$ знайдемо $n=2.$ Підставивши у задану рівність замість x довільний (дійсний чи комплексний) корінь квадратного тричлена $P(x),$ отримаємо $P(0)=0.$ Звідси випливає, що обидва його корені є дійсними і $P(x)=ax(x+q), a\ne 0.$ Враховуючи умову задачі, отримуємо тотожність $a\cdot ax(x+q)\cdot(ax(x+q)+q)\equiv(x^2+2015x+2015)\cdot ax(x+q),$ яка рівносильна тотожності $a^2x^2+a^2qx+aq\equiv x^2+2015x+2015,$ справедливій лише при $a=1,$ $q=2015.$ Отже, $P(x)=x(x+2015).$ Зауважимо, що $P(x)$ можна було також шукати у вигляді $P(x)=ax^2+bx+c,$ де a,b, c – дійсні коефіцієнти, $a\ne 0,$ прирівнюючи коефіцієнти біля однакових степенів x у виразах:

$$P(P(x))=a^3x^4+2a^2bx^3+(ab^2+2a^2c+ab)x^2+(2abc+b^2)x+(ac^2+bc+c),$$

$$(x^2+2015x+2015)P(x)=ax^4+(b+2015a)x^3+(2015a+2015b+c)x^2+2015(b+c)x+2015c.$$

5. У зв'язку зі складним фінансовим станом у першості країни з футболу взяли участь лише 12 команд, причому кожна з них зіграла з кожною іншою тільки по одному разу. Чи могло трапитися так, що у кожної команди кількість її перемог дорівнює кількості її нічиїх?

5. Могло. Припустимо, що одна команда програла всі свої матчі. Тоді у неї 0 перемог та 0 нічиїх. Решту 11 команд розташуємо по колу. Нехай кожна команда виграє у трьох команд, які йдуть по колу після неї, і програє трьом командам, які йдуть по колу перед нею, а інші 4 ігри завершує внічию. Тоді у кожної з цих одинадцяти команд виявиться по 4 перемоги та нічиї.