Завдання заочного туру олімпіади з математики для студентів I-II курсів факультету математики та інформатики Прикарпатського національного університету ім. В. Стефаника

1) Побудувати послідовність, множиною часткових границь якої є $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$. (Частковою границею послідовності називають границю деякої підпослідовності цієї послідовності.)
2) У всіх клітинках нескінченного листка паперу розташовано додатні цілі числа так, що кожне число є середнім арифметичним чотирьох своїх сусідів (згори, знизу, зліва і справа). Доведіть, що всі числа на листку однакові.
3) Дійсна функція $f(x)$ визначена і диференційовна на проміжку $(0, +\infty)$, причому
$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x)) = 0.$$
Доведіть, що й $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
4) Знайдіть всі можливі значення довжини сторони правильного трикутника, якщо його вершини лежать на (різних) концентричних колах радіусів 3,4,5.
5) Дослідіть, чи існує опуклий п'ятикутник, у якого кожна діагональ дорівнює деякій стороні. Відповідь обґрунтуйте.
6) Обчисліть границю послідовності:
$$\lim_{n\to\infty} \sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right).$$
7) Обчисліть суму ряду
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$
8) Знайдіть усі такі неперервні функції $f(x)$, для яких функція $f(\{x\})$ також неперервна. (Тут $\{x\}$ означає дробову частину x).
9) Доведіть, що рівняння $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2015}$ має скінченну кількість розв'язків у натуральних числах.
10) Нехай x_1, x_2, x_3, x_4 – корені рівняння $x^4 + 2014x - 2015 = 0$. Обчисліть визначник
$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_4 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання задач подати до 5 березня 2015 р. включно на кафедру математичного і функціонального аналізу (ауд. 302) Василишину Т.В.

Завдання заочного туру олімпіади з математики для студентів III-V курсів факультету математики та інформатики Прикарпатського національного університету ім. В. Стефаника

1) Записати матрицю перетворення симетрії відносно прямої $y = kx$ простору $\mathbb{R}^2$.
2) Довжини сторін трикутника задовольняють співвідношення
$$2(a^8 + b^8 + c^8) = (a^4 + b^4 + c^4)^2.$$
Яких значень може набувати величина найбільшого кута цього трикутника?
3) Знайдіть всі цілі числа z такі, що $z^4+z^3+z^2+z+1$ є точним квадратом.
4) Знайдіть всі цілі розв'язки рівняння $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$.
5) Обчисліть
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2015} x}{\sin^{2015} x + \cos^{2015} x}\, dx.$$
6) Знайдіть множину всіх додатних x, для яких збігається ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}.$$
7) Функція $f(x)$ визначена тільки на відрізку $[0,1]$ і для всіх $x \in [0,1]$ задовольняє рівність
$$f\left(x + f(x)\right) = f(x).$$
Доведіть, що $f(x) \equiv 0$.
8) Довести, що метричний простір (X,d) є повним тоді і тільки тоді, коли для кожної послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ елементів цього простору із умови $\sum\limits_{k=1}^{\infty} d(x_k, x_{k+1}) < \infty$ випливає, що послідовність збіжна.
9) Дослідіть, чи існує неперервна на $\mathbb{R}$ функція така, що при кожному раціональному x значення $f(x)$ ірраціональне, а при кожному ірраціональному x значення $f(x)$ раціональне.
10) Знайдіть всі многочлени $P(x)$, які задовольняють умову
$$8P(x) = \left(\frac{dP}{dx}\right)^2 \frac{d^2P}{dx^2}.$$

Розв'язання задач подати до 5 березня 2015 р. включно на кафедру математичного і функціонального аналізу (ауд. 302) Василишину Т.В.