Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника

Розв'язання завдань дистанційного туру Всеукраїнської олімпіади з математики для професійної орієнтації вступників на базі повної загальної середньої освіти

1. *Розв'яжіть рівняння* $|x-2|+|x-3|=1$.

Якщо $x<2$, то $x-2$ та $x-3$ від'ємні, і дане рівняння рівносильне до $-(x-2)-(x-3)=1$, тобто $-2x+5=1$, $x=2$, що несумісне з $x<2$. Аналогічно при $x>3$ числа $x-2$ та $x-3$ додатні, і рівняння зводиться до $(x-2)+(x-3)=1$, тобто $2x-5=1$, $x=3$, що суперечить $x>3$.

Нарешті, у випадку $2\leqslant x\leqslant 3$ маємо $|x-2|=x-2$, $|x-3|=-(3-x)$, і наше рівняння рівносильне до $(x-2)-(x-3)=1$, тобто $1=1$. Ця рівність істинна завжди, звідки розв'язками є всі числа з проміжка $[2,3]$ і тільки вони.

2. *Розставте у дев'яти проміжках між цифрами* **0 1 2 3 4 5 6 7 8 9** *три плюси, три мінуси і три знаки множення так, щоб отриманий вираз (без використання дужок) мав найбільше значення.*

Інтуїтивно зрозуміло, що знаки множення найвигідніше ставити між найбільшими числами 6, 7, 8 і 9, плюси — перед добутком цих чисел та двома більшими з чисел, що залишились, тобто перед 4 і 5, а мінуси — перед меншими числами 1, 2 і 3. Отримуємо вираз

$$\mathbf{0}-\mathbf{1}-\mathbf{2}-\mathbf{3}+\mathbf{4}+\mathbf{5}+\mathbf{6}\cdot\mathbf{7}\cdot\mathbf{8}\cdot\mathbf{9}=6\cdot 7\cdot 8\cdot 9+3.$$

Припустимо, що при іншому розташуванні знаків значення виявилось більшим. Якщо знаки множення залишились на своїх місцях, але перед добутком — мінус, то неважко бачити, що вираз стане від'ємним, тому його значення не може бути більшим. Аналогічно, якщо не чіпати знаки

множення і плюс перед добутком, то значення “підвиразу”, отриманого з **0 1 2 3 4 5**, дорівнює $0 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5 + 2a + 2b$, де a і b — ті два з чисел від 1 до 5, перед якими поставлено плюс. Отже, найбільший з таких виразів — з плюсами перед 4 і 5.

Залишилось розглянути вирази, в яких знаки множення розташовані інакше. Якщо у такому виразі мінуси замінити плюсами, то значення збільшиться. Покажемо, що навіть тоді воно не перевищить $6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 + 3$. Якщо всі знаки множення — поруч, то добуток у виразі не перевищує $5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$, а сума 5 інших чисел не більша від $9 + 8 + 7 + 6 + 5 = 35$, і значення виразу не перевищує

$$5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 + 35 < 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 + 3.$$

Аналогічно оцінюємо згори вирази, у яких є два добутки по три і два співмножники або три добутки по два співмножники. Тому отримане нами значення — найбільше з можливих.

3. *Три гноми обідають за круглим столом, який може обертатись навколо вертикальної осі. На початку обіду на столі навпроти гномів за годинниковою стрілкою написано три цифри 1, 2 і 3. Гноми розкручують стіл і випадково зупиняють його так, щоб кожна цифра знову виявилась навпроти якогось гнома, і тоді кожен гном з’їдає написану перед ним кількість пиріжків.*

Чи може статись так, що за обід гноми з’їли відповідно: а) 11, 11 і 14 пиріжків? б) 10, 12 і 13 пиріжків?

Оскільки після кожного обертання стола гноми разом з’їдають шість пиріжків, то загальна сума повинна ділитись на 6. Отже, варіант б), у якому з’їдено $10 + 12 + 13 = 35$ пиріжків, неможливий.

Нехай у варіанті а) цифра 1 зупинилась біля першого гнома x разів, після яких цей гном з’їв x пиріжків, другий гном — $2x$, а третій — $3x$ пиріжків. Аналогічно розглянемо y разів, коли цифра 1 зупинилась біля другого гнома і z разів, коли одиниця зупинялась біля третього гнома. Тоді

перший гном з'їв $x+3y+2z=11$ пиріжків, другий — $2x+y+3z=11$, а третій — $3x+2y+z=14$. Розв'язавши систему з трьох рівнянь з трьома невідомими, отримаємо $x=3$, $y=2$, $z=1$. Неважко перевірити, що тоді кожен гном дійсно з'їсть потрібну кількість пиріжків, тобто варіант а) здійсненний.

4. *Як за допомогою чотирьох зважувань на терезах без гир знайти серед 60 монет одну фальшиву, легшу від справжніх?*

Поділимо монети на три купки по 20 монет і порівняємо вагу першої і другої з них. Якщо одна з цих купок легша, то фальшива монета — у ній, інакше вона — у третій купці. Отже, після першого зважування залишається 20 монет, одна з яких фальшива. Покладемо на шальки по 7 з цих монет, зважимо і аналогічно отримаємо або 7, або 6 монет, серед яких є фальшива. Далі покладемо по 2 монети, порівняємо вагу і після третього зважування отримаємо купку з 2 або 3 монет разом з фальшивою. За останнє зважування цю монету можна виявити.

5. *У одному місяці три п'ятниці випали на парні числа. Якого числа у цьому місяці була друга неділя?*

Між п'ятницями, що випадають на парні числа в одному місяці, проміжки по два тижні, тому третя з них на 28 днів пізніша від першої. Отже, перша з цих п'ятниць може бути тільки 2-го числа, місяць починається з четверга, перша неділя — 4-го числа, а друга — 11-го.

6. *На початку на дошці написано числа 1 та 1. На кожному кроці можна написати нове число, рівне різниці двох вже написаних. Покажіть, як отримати число 13. За яку найменшу кількість кроків це можливо зробити?*

Зробити це можна за 7 кроків :

$$1-1=0, \qquad 0-1=-1, \qquad 1-(-1)=2,$$
$$(-1)-2=-3, \quad 2-(-3)=5, \quad (-3)-5=-8,$$
$$5-(-8)=13.$$

Покажемо, що швидше отримати 13 неможливо. За перші два кроки можна додати тільки 0 і -1, тому чисел, більших за модулем від 1, не з'явиться. Оскільки $|a-b| \leqslant |a|+|b|$, то далі на кожному кроці може з'явитись число з модулем, не більшим від суми двох найбільших модулів, отриманих раніше. Зокрема, на третьому кроці можна написати число з модулем $\leqslant 1+1=2$, на четвертому — з модулем $\leqslant 1+2=3$, на п'ятому — з модулем $\leqslant 2+3=5$, на шостому — з модулем $\leqslant 3+5=8$, і аж на сьомому — з модулем $\leqslant 5+8=13$. Отже, швидше, ніж на сьомому кроці, отримати 13 неможливо.

7. *Перший трикутник має сторони по 1 м, а всі сторони другого не перевищують 1 м. Чи обов'язково другий трикутник можна вмістити у перший?*

Ні, не завжди. Розглянемо, наприклад, рівнобедрений трикутник зі сторонами 1 м, 1 м і 0,5 м. Його довшу сторону можна вкласти у правильний трикутник зі сторонами по 1 м, тільки сумістивши з однією з його сторін. Але тоді кут при основі рівнобедреного трикутника, більший від 60°, не вдасться вмістити у кут 60° правильного трикутника.

8. *Знайдіть трійку не обов'язково різних простих чисел x, y і z, для яких виконано рівність $x^y+1=z$. Скільки таких трійок існує?*

Зауважимо, що числа x^y та z різної парності. Якщо друге з них парне, тобто $z=2$, то $x^y=1$, що неможливо для простих чисел. Отже, парним є x^y, тобто $x=2$. Якщо $y \neq 2$, то y — непарне, і можна скористатись тотожністю

$$2^y+1=(2+1)(2^{y-1}-2^{y-2}+\cdots-2+1),$$

з якої отримаємо, що z складене. Залишається єдина можливість $x=y=2$ і відповідно $z=5$.

9. *Зобразіть на координатній площині множину точок, координати яких x та y задовольняють рівність*

$$\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=2-x^2-y^2.$$

Подамо дане рівняння як $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=(1-x^2)+(1-y^2)$. Вирази $a=\sqrt{1-x^2}$ та $b=\sqrt{1-y^2}$ мають значення між 0 і 1, і для них повинна виконуватись рівність $a+b=a^2+b^2$. Однак для числа $0\leqslant a\leqslant 1$ завжди $a\geq a^2$, причому $a=a^2$ тільки для $a=0$ або $a=1$. Отже, лівий бік рівняння ніколи не є меншим від правого, і вони рівні, якщо і тільки якщо вирази $\sqrt{1-x^2}$ та $\sqrt{1-y^2}$ набувають значень 0 або 1. Тоді і x, і y є одними з чисел -1, 0 і 1. Відповідно на площині отримуємо 9 точок: $(-1,-1)$, $(-1,0)$, $(-1,1)$, $(0,-1)$, $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,-1)$, $(1,0)$, $(1,1)$.

10. *Після корабельної аварії хвиля викинула математика на острів людожерів, які саме готувались до щорічних змагань з кулачних боїв. Вождь доручив математикові скласти розклад боїв, при якому кожен із 33 кращих воїнів битиметься з шістьма суперниками, а сам взявся скласти такий розклад, щоб кожен бився з п'ятьма. Якщо розклад складе тільки вождь, то математика з'їдять, якщо обоє — залишать жити на острові, а якщо успіху досягне тільки математик, то йому збудують пліт і відпустять. Яка перспектива очікує математика?*

Математикові скласти розклад нескладно — досить розташувати всіх воїнів колом, і нехай кожен з них б'ється з трьома ліворуч і трьома праворуч від себе (послідовність боїв значення не має). Припустимо, що вождь теж склав свій розклад. Тоді загальну кількість боїв можна обчислити, помноживши 33-ох воїнів на 5 боїв для кожного з них, але потім цей добуток потрібно поділити на 2, бо кожен бій ми врахували двічі — між А і Б та між Б і А. Отже, кількість боїв не є цілою, що неможливо, і невдовзі математик попливе додому :)