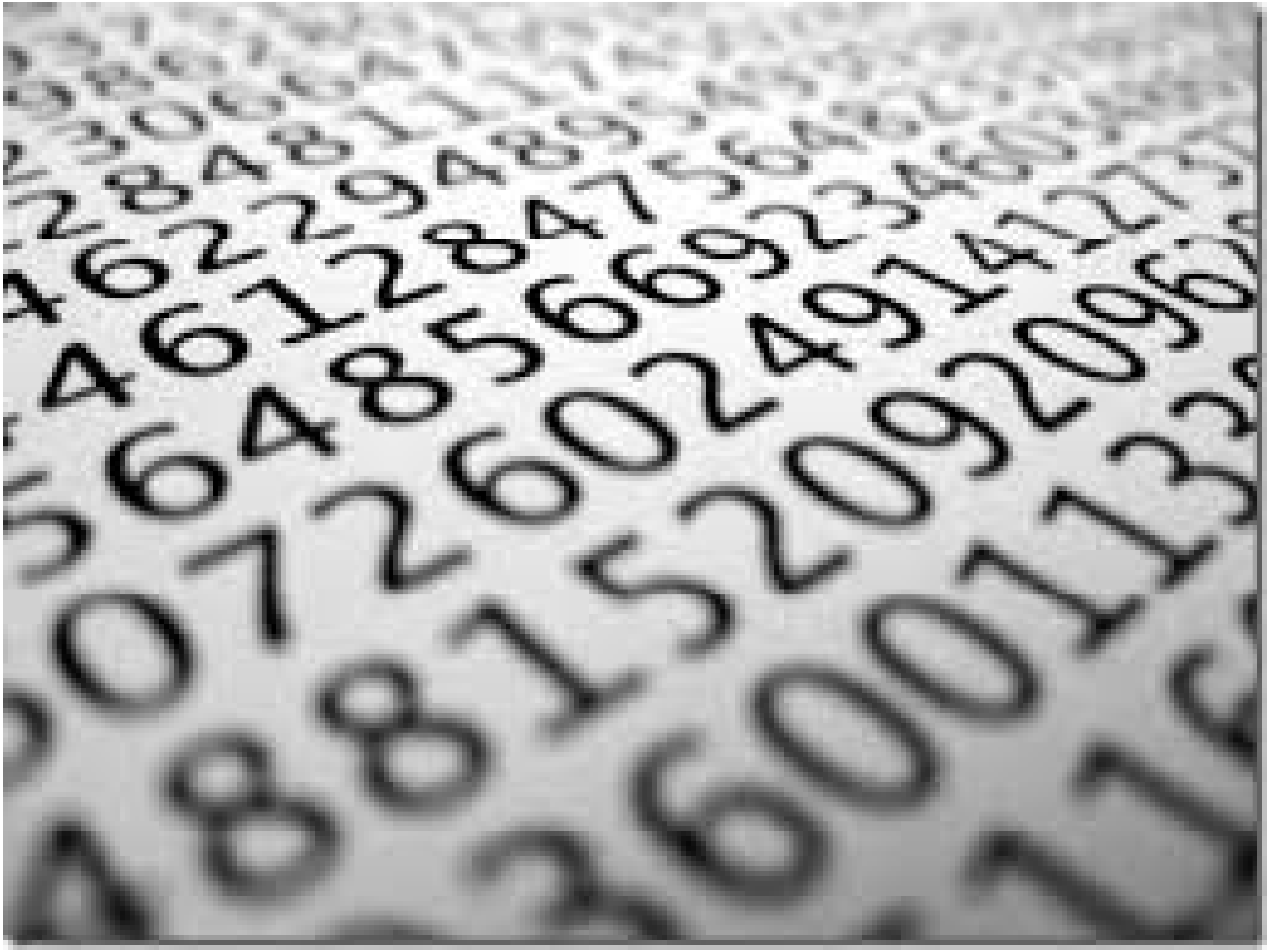


Прості числа

$$p_{n+1} = \left\lfloor 1 - \log_2 \left(\frac{1}{2} + \sum_{r=1}^{n} \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_r \leqslant n} \frac{(-1)^r}{p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_r}} \right) \right\rfloor$$ J.M.Gandhi (1971)

J.P. Jones (1975)

$$f(a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z) =$$

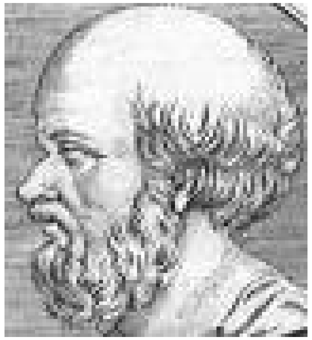
$$= (k+2)(1-(wz+h+j-q)^2-(2n+p+q+z-e)^2-(a^2y^2-y^2-x^2+1)^2-((e^4+2e^3)(a+1)^2-o^2)^2-$$

$$-(16(k+1)^3(k+2)(n+1)^2+1-f^2)^2-(((a+u^4-u^2a)^2-1)(n+4dy)^2+1-(x+cu)^2)^2-$$

$$-(ai+k+1-l-i)^2-((gk+2g+k+1)(h+j)+h-z)^2-(16r^2y^4(a^2-1)+1-u^2)^2-$$

$$-(p-m+l(a-n-1)+b(2an+2a-n^2-2n-2))^2-(z-pm+pla-p^2l+t(2ap-p^2-1))^2-$$

$$-(q-x+y(a-p-1)+s(2ap+2a-p^2-2p-2))^2-(a^2l^2-l^2+1-m^2)^2-(n+l+v-y)^2)$$

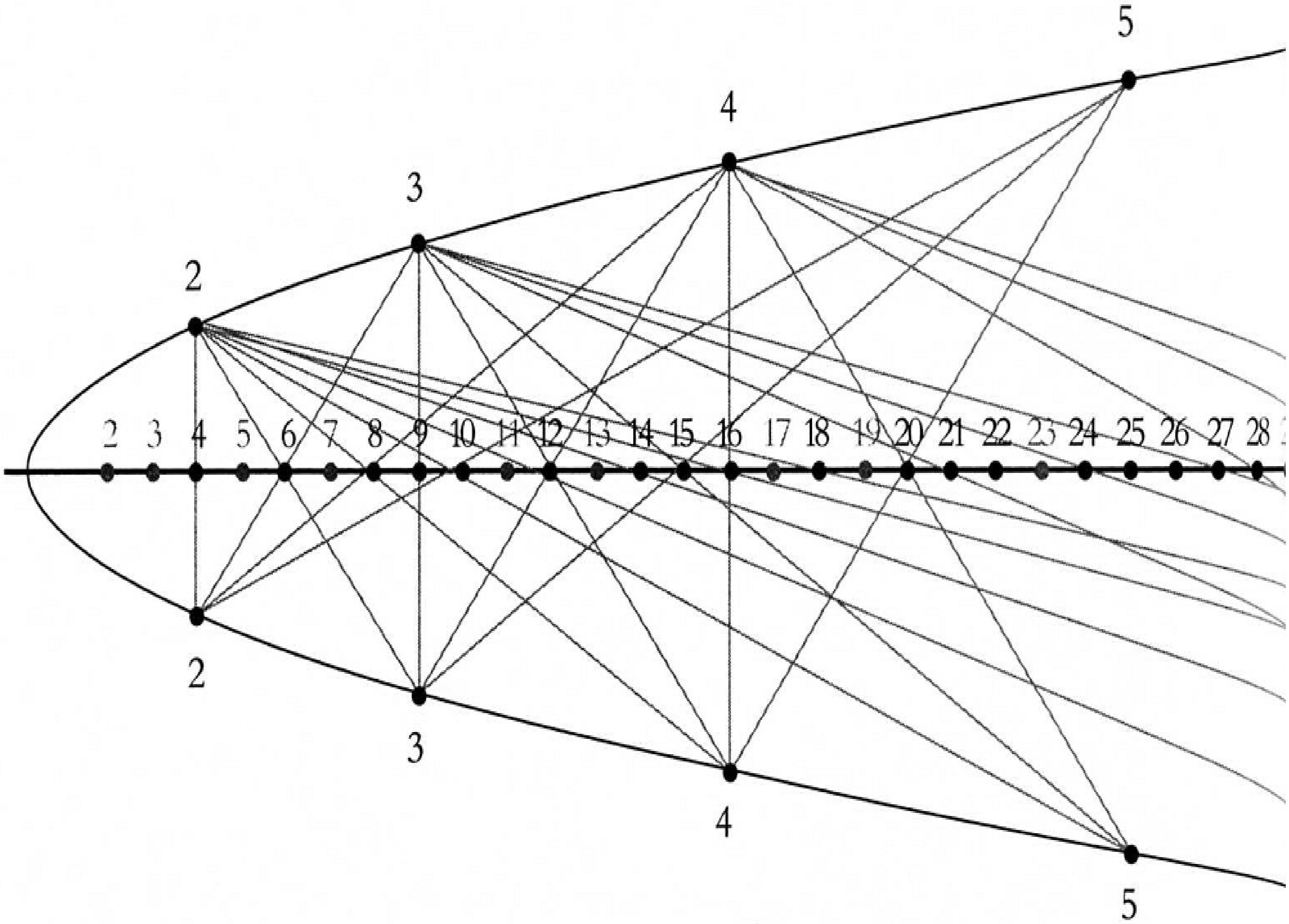


Решето Ератосфена (3 ст.д.н.е)

	2	3		5		7			
11		13				17		19	
		23						29	
31						37			
41		43				47			
		53						59	
61						67			
71		73						79	
		83						89	
						97			

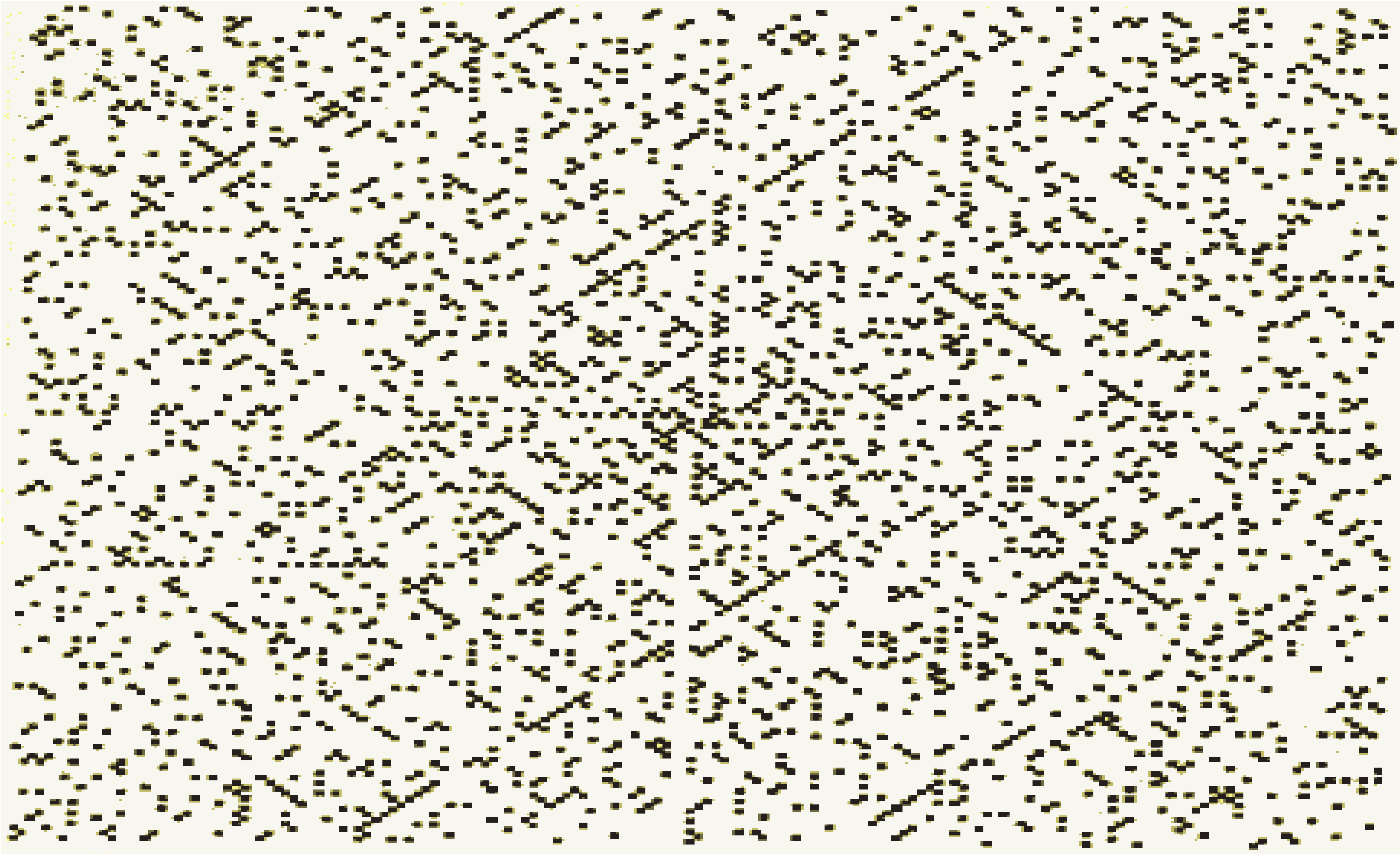
Решето Сундарама (1934)

4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	...
7	12	17	22	27	32	37	42	47	52	57	62	...
10	17	24	31	38	45	52	59	66	73	80	87	...
13	22	31	40	49	58	67	76	85	94	103	112	...
16	27	38	49	60	71	82	93	104	115	126	137	...
19	32	45	58	71	84	97	110	123	136	149	162	...
22	37	52	67	82	97	112	127	142	157	172	187	...
25	42	59	76	93	110	127	144	161	178	195	212	...
28	47	66	85	104	123	142	161	180	199	218	237	...
31	52	73	94	115	136	157	178	199	220	241	262	...
34	57	80	103	126	149	172	195	218	241	264	287	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...



5
4
3
2
2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28
2
3
4
5

Скатертина Улама



Числа близнюки

```
TwinPrimes[PrimePi[1000]]
```

```
{{3, 5}, {5, 7}, {11, 13}, {17, 19}, {29, 31},
 {41, 43}, {59, 61}, {71, 73}, {101, 103}, {107, 109},
 {137, 139}, {149, 151}, {179, 181}, {191, 193}, {197, 199},
 {227, 229}, {239, 241}, {269, 271}, {281, 283}, {311, 313},
 {347, 349}, {419, 421}, {431, 433}, {461, 463}, {521, 523},
 {569, 571}, {599, 601}, {617, 619}, {641, 643}, {659, 661},
 {809, 811}, {821, 823}, {827, 829}, {857, 859}, {881, 883}}
```

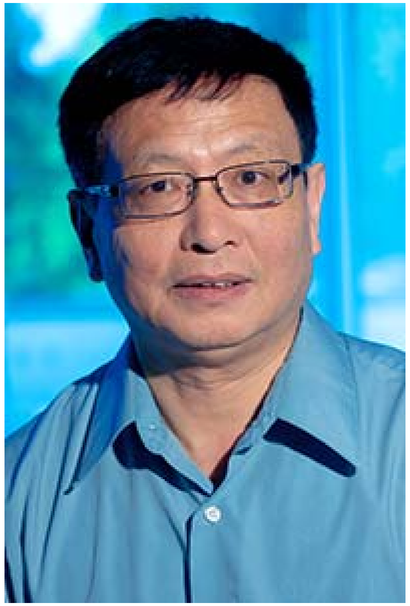
$$65516468355 \cdot 2^{333333} - 1$$

$$65516468355 \cdot 2^{333333} + 1$$

100 355 цифр!

$$3756801695685 \cdot 2^{666669} - 1$$

$$3756801695685 \cdot 2^{666669} + 1$$



Ітан Джан (США)

- Ітан Чжан довів, що існує нескінченно багато простих чисел, відстань між якими не перевищує 70 млн. (2013 р.)
- Доведено також, що середня відстань між простими числами зростає до нескінченності.

Досконалі числа

$2^{p-1}(2^p - 1)$ – парні (Піфагор (IV с.д.н.е) – Ойлер (1707-1783))

$(4q+1)^{4p+1} r_1^{2s_1} \cdot \ldots \cdot r_k^{2s_k}$, де $4q+1, r_1, \ldots, r_k$ – різні прості числа

якщо непарне досконале число n існує, то $n < 2^{4^{k+1}}$

найменший простий дільник не перевищує

$(2k+8)/3$ Grün O. (1952)

$2^{57885161} - 1$ – 48-ме число Мерсенна (Купер, США, (2014 р.))

Дружні числа

$$A = 9023646530623313066515520159268707864441304548569003896154036053637 1$$

$$9932582870191857595803452747004992753231290703332338267840675607389206 15$$

$$666452384945$$

$$B = 8625937665014359638769095381878716665971484088835777428138358168310$$

$$2264665913329533162256868364964774727067384973129580885368384109913214 99$$

$$1276380031055$$

Цю пару дружніх чисел знайшов у 1972 році амстердамський математик Херман те Ріле. В кожному з них по 152 цифри. У першому 800 різних дільників, а у другому — 3200. Сума 779 власних дільників числа A дорівнює B і навпаки: сума 3199 власних дільників числа B дорівнює числу A.

Теорема Сабіта (9 ст.н.е), Ферма (1636), Декарта (1638)

Якщо три числа

$$p = 3 \cdot 2^{n-1} - 1,\ q = 3 \cdot 2^{n} - 1,\ r = 3^2 \cdot 2^{2n-1} - 1$$

– прості, то числа

$$A = 2^{n} \cdot pq,\ B = 2^{n} \cdot r$$

дружні.

$n = 2$ $(220, 284)$ – Піфагор

$n = 4$ $(17296, 18416)$ – Ферма, аль-Банна

$n = 7$ $(9363584, 9437056)$ – Декарт

Ловці дружніх чисел

Ойлер – 59 (1747–1750)
Пуле – 108 (1929–1948)
Ескот – 219 (1946)
Гарсиа – 153 (1957)
Боро – 41 (1967–1974)
Ли – 390 (1968–1972) – ЕОМ

Тест простоти Люка-Лемера — $ln(n)$ – операцій

Гіпотези про дружні числа

- Не існує взаємно простих дружніх чисел
- Будь-яка пара дружніх чисел має однакову парність

Числа Ферма $2^{2^n}+1$

$$F_0 = 3$$

$$F_1 = 5$$

$$F_2 = 17$$

$$F_3 = 257$$

$$F_4 = 65537$$

$$F_{1945} = (5 \cdot 2^{1947} + 1) \cdot k$$

$$5 \leqslant n \leqslant 32$$

Проблеми нескінченності множини простих чисел у числових послідовностях

$2^n - 1$ – (числа Мерсенна)

$n^2 + 1$

$n2^n + 1$ – (числа Каллена)

$2^{2^n} + 1$ – (числа Ферма)

F_n – (числа Фібоначчі)

$(n, 2n+1)$ – пари Софі Жермен

$(n, n+2)$ – числа близнюки

Досконалі числа

$a + nd$, де $(a, d) = 1$ – арифметичні прогресії (доведено Діріхле)

Реп'юніти

$10^{2^n} + 1$

Числа Гіннеса

$$\Omega_n = \{0, 1, 2, \ldots, 10^k - 1\} \times \{0, 1, 2, \ldots, n - 1\}.$$

Означення 1.1. *Нехай функція* $f_n : \Omega_n \to \Omega_n$ *довільній точці* $(x, y) \in \Omega_n$ *ставить у відповідність точку* $(x', y') \in \Omega_n$, *тобто* $f_n(x, y) = (x', y')$, *причому виконується рівність*

$$nx + y = x' + 10^k y'.$$

$$f_n(x, y) = (x, y)$$

$$O_n(x, y) = \{(x, y), f_n(x, y), f_n^2(x, y), \ldots, f_n^{r-1}\}$$

Числа Гіннеса, породжені натуральним числом n та точкою(x,y)

Числом Гіннеса, породженим натуральним числом n та твірною точкою (x_0, y_0) називають число $G_n(x_0, y_0) = \overline{x_0 x_{r-1} \ldots x_1}$, де числа $x_1, \ldots, x_{r-1}$ – перші компоненти орбіти

$$O_n(x_0, y_0) = \{(x_0, y_0), f_n^1(x_0, y_0) = (x_1, y_1), \ldots, f_n^{r-1}(x_0, y_0) = (x_{r-1}, y_{r-1})\}$$

Якщо в ролі твірної точки виступає точка $(n, 0)$, то це число позначатимемо через G_n

Означення 1.2. *Точку* $\overline{(x,y)} = (\overline{x},\overline{y})$ назвемо *спряженою точкою* до точки (x,y), якщо виконуються рівності

$$\overline{x} = 10^k - 1 - x,\ \overline{y} = n - 1 - y. \tag{1.1}$$

Означення 1.3. *Цілим числом Гіннеса назвемо число G_n, згенероване функцією f_n при допомозі стандартної твірної точки $(n,0)$, якщо довжина відповідної орбіти $O_n(n,0)$ дорівнює $|\Omega_n| - 2$.*

Означення 1.4. *Половинним числом Гіннеса, згенерованим функцією f_n при допомозі твірної точки $(n,0)$, назвемо число G_n, довжина відповідної орбіти якого дорівнює $\frac{1}{2}|\Omega_n| - 1$.*

Якщо функція f_n у множині Ω_n генерує m_1 орбіт довжини r_1, m_2 орбіт довжини r_2 і т.д. m_s орбіт довжини r_s, то цей факт позначатимемо через

$$\Omega_n \sim \{r_1^{m_1}, r_2^{m_2}, \dots, r_s^{m_s}\},$$

Таким чином, розклад декартової множини Ω_n, пов'язаної з натуральним числом n, на орбіти у великій мірі, нагадує факторизацію натуральних чисел.

$$\Omega_{10} \sim \{1^{10}, 3^{330}\},\ \Omega_{11} \sim \{1^2, 3^2, 39^{28}\},\ \Omega_{12} \sim \{1^{12}, 54^{22}\},\ \Omega_{13} \sim \{1^4, 216^6\}$$

$$\Omega_{14} \sim \{1^2, 699^2\},\ \Omega_{15} \sim \{1^2, 107^{14}\},\ \Omega_{16} \sim \{1^4, 3^{12}, 5^{24}, 15^{96}\},\ \Omega_{17} \sim \{1^2, 283^6\}$$

$$\Omega_{18} \sim \{1^2, 3^2, 128^2, 384^4\},\ \Omega_{19} \sim \{1^{10}, 15^{126}\},\ \Omega_{20} \sim \{1^2, 999^2\},\ \Omega_{21} \sim \{1^2, 1049^2\}.$$

$$\Omega_{103} = \{1^2, 4^{34}, \dots\}$$

$$\Omega_{37} = \{1^2, 2^6, \dots\}$$

Легко переконатися в тому, що серед одноцифрових чисел половинним числом Гіннеса є число 9, а цілими числами Гіннеса - числа $2, 3$ та 6.

Наведемо всі двоцифрові половинні числа Гіннеса:

$$14, \mathbf{20}, \mathbf{21}, 24, 27, 30, 33, 41, 48, 51, 54, 62, 66, 69, 75, 77, 87, 90, 92.$$

А ось всі трицифрові половинні числа Гіннеса:

$$102, 105, 108, 135, 144, 162, 165, 183, 189, 192, 204, 213, 222, 231, 240, 261,$$
$$267, 273, 276, 291, 294, 303, 306, 309, 327, 330, 339, 357, 372, 378, 390, 420,$$
$$444, 456, 465, 474, 498, 507, 513, 522, 525, 534, 537, 543, 564, 567, 585, 588,$$
$$600, 603, 609, 612, 621, 639, 645, 660, 663, 669, 672, 696, 705, 726, 732, 738,$$
$$765, 774, 789, 795, 807, 819, 822, 834, 840, 855, 873, 885, 891, 894, 906, 921,$$
$$933, 936, 942, 957, 975, 981, 990.$$

Означення 1.5. *Два половинні числа Гіннеса G_n та G_{n+1} називатимемо* ***половинними числами-близнюками Гіннеса.***

Серед двоцифрових чисел є тільки одна пара половинних чисел–близнюків Гіннеса. Серед трицифрових чисел немає жодної такої пари. Наведемо кілька перших пар чотирицифрових половинних чисел–близнюків Гіннеса:

$$(1085, 1086),\ (1091, 1092),\ (1109, 1110),\ (1160, 1161),\ (1187, 1188),\ (1208, 1209),$$

$$(1316, 1317),\ (1337, 1338),\ (1370, 1371),\ (1553, 1554),\ (1658, 1659),\ (1742, 1743),$$

$$(1775, 1776),\ (1796, 1797),\ (1889, 1890),\ (1922, 1923),\ (2000, 2001),\ (2006, 2007),$$

$$(2174, 2175), \ldots.$$

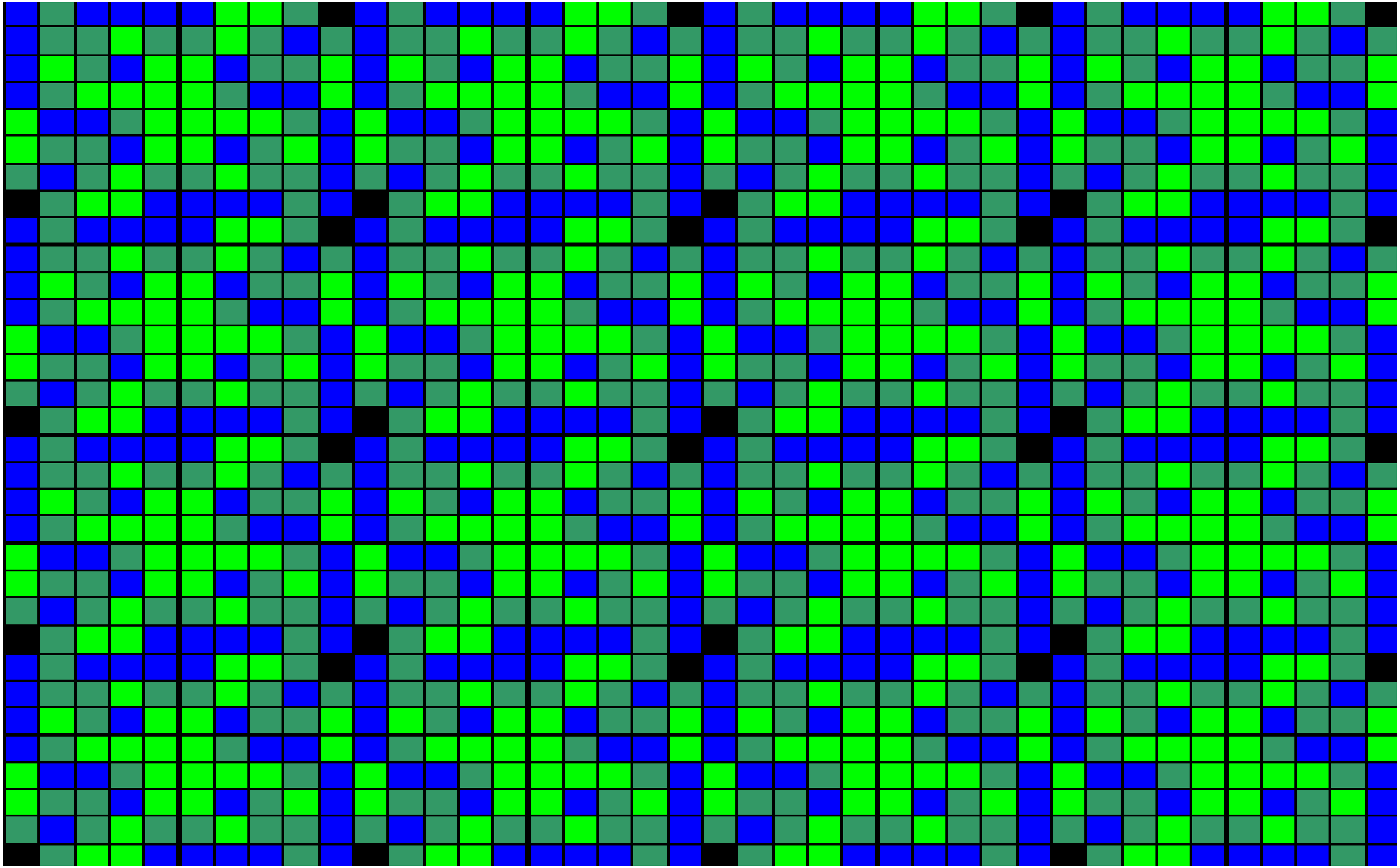
Проблема 1. *Чи існують цілі числа Гіннеса* G_n *для багатоцифрових чисел* n*?*

Проблема 2. *Дослідити потужність множини половинних чисел Гіннеса.*

Проблема 3. *Дослідити закон розподілу натуральних чисел* n *у натуральному ряді, для яких числа* G_n *є половинними числами Гіннеса.*

Проблема 4. *Дослідити потужність множини чисел-близнюків Гіннеса.*

Паркет, що відповідає числу 8



Зауважимо, що зображенню на координатній площині точок, що відповідають орбітам $O_n(n,0)$, відповідає характерний структурований малюнок. Таким чином, кожне натуральне число має своє "обличчя" та "характер". Нижче, на рис.4 та 5 відповідно зображено точки орбіт $O_9(9,0)$ і $O_7(7,0)$.

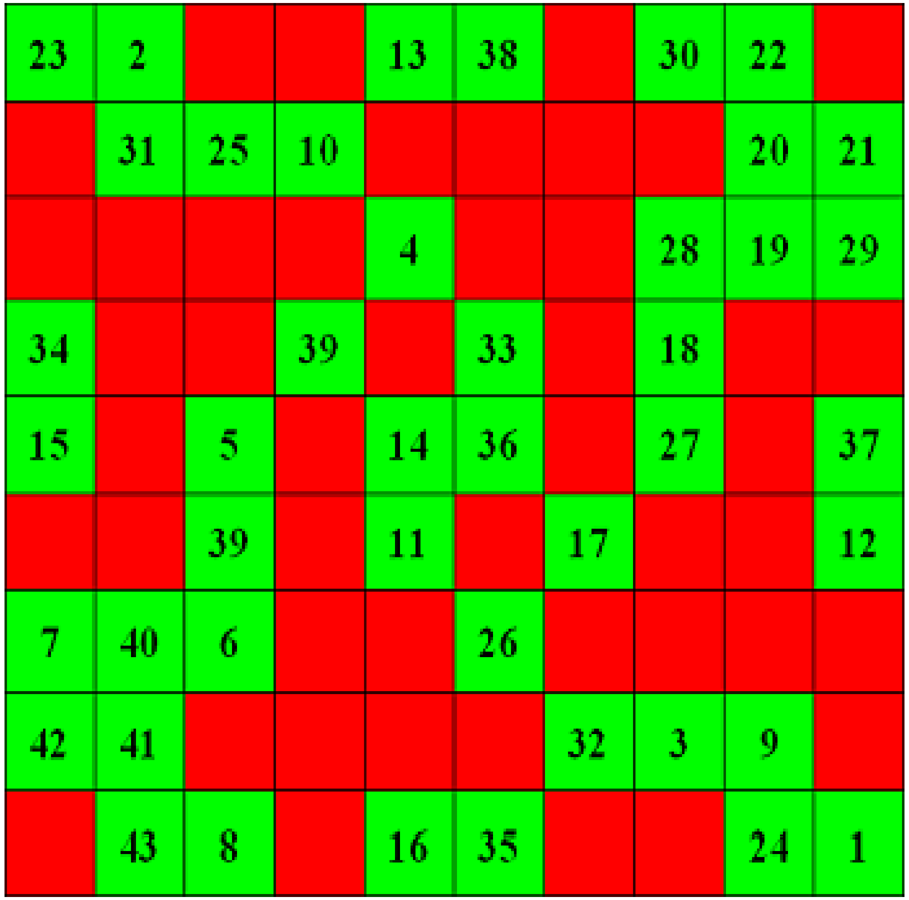


Рис. 4.

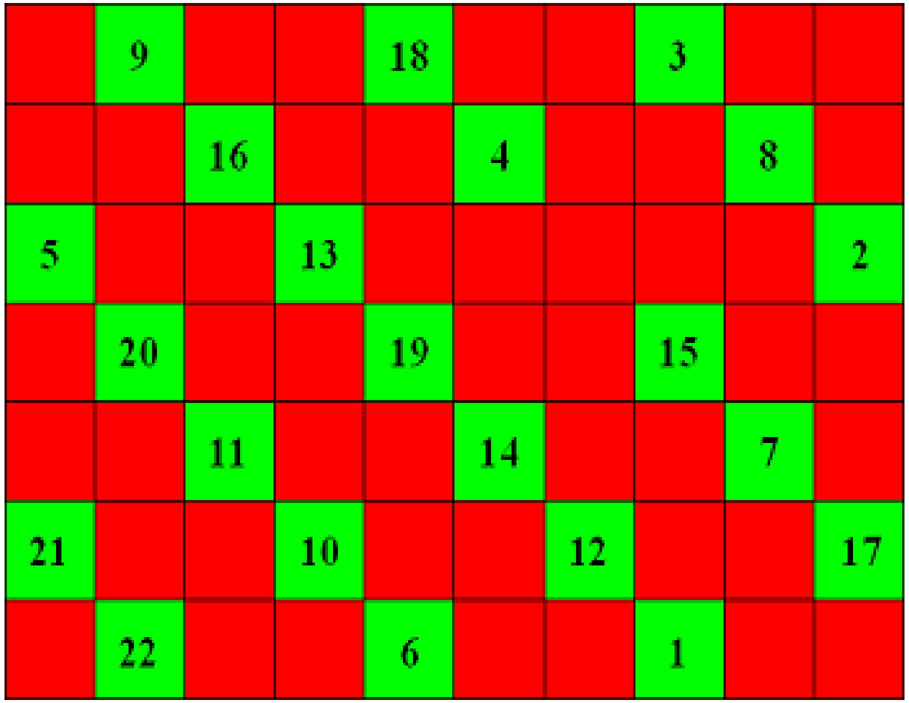


Рис. 5.