Огляд деяких нерозвязаних задач теорії чисел II

Нехай у наступній таблиці n – довільне натуральне число більше від одиниці.

$$
\begin{array}{ccccccc}
1 & 2 & \cdots & k & \cdots & n-1 & n \\
n+1 & n+2 & \cdots & n+k & \cdots & 2n-1 & 2n \\
2n+1 & 2n+2 & \cdots & 2n+k & \cdots & 3n-1 & 3n \\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\
(n-2)n+1 & (n-2)n+2 & \cdots & (n-2)n+k & \cdots & (n-1)n-1 & (n-1)n \\
(n-1)n+1 & (n-1)n+2 & \cdots & (n-1)n+k & \cdots & n^2-1 & n^2
\end{array}
$$

Гіпотеза А. Шінцеля: якщо $(k, n) = 1$, то k-тий стовпець містить хоча б одне просте число.
Гіпотеза В. Серпінського: кожен рядок цієї таблиці містить хоча б одне просте число.

$$\begin{array}{cccccc}
1 & & & & & \\
2 & 3 & & & & \\
4 & 5 & 6 & & & \\
7 & 8 & 9 & 10 & & \\
11 & 12 & 13 & 14 & 15 & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

тобто для довільного натурального $n > 1$ серед послідовних натуральних чисел

$$\frac{n^2 - n + 2}{2}, \frac{n^2 - n + 2}{2} + 1, \frac{n^2 - n + 2}{2} + 2, \dots, \frac{n^2 + n}{2}$$

знайдеться хоч одне просте число.

Послідовність чисел таксі

$$\min m \in N : Ta(n) = m = x_1^3 + y_1^3 = x_2^3 + y_2^3 = \ldots = x_n^3 + y_n^3$$

$$Ta(1) = 2$$

$$Ta(2) = 1729$$

$$Ta(3) = 87539319$$

$$Ta(4) = 6963472309248$$

$$Ta(5) = 48988659276962496$$

$$Ta(6) = ?$$

Означення

Числом Серпінського називають непарне число k, таке, що для довільного натурального n число

$$k2^n + 1$$

не є простим.

Знайдено наступні числа Серпінського:

$$78557, 271129, 271577, 322523, 327739, 482719,$$

$$575041, 603713, 903983, 934909, 965431$$

Число $k = 78557$ знайдено Дж. Селфріджем у 1962 році. Воно повязане із множиною дільників $A = \{3, 5, 7, 13, 19, 37, 73\}$

Проблема Серпінського

Знайти найменше число Серпінського.

Станом на грудень 2013 року залишалось перевірити лише 6 кандидатів на число Серпінського:

$$10223, 21181, 22699, 24737, 55459, 67607.$$

Паліндроми

Означення

Паліндромом називають слово, у якому рівновіддалені від його початку та кінця букви співпадають.

Гіпотеза про паліндроми

Відправляючись від любого натурального числа, за скінченне число додавань відповідних чисел, неминуче досягається число-паліндром.

Доведено, що для двійкової системи числення і всіх систем числення з основою, яка дорівнює степеню двійки, ця гіпотеза хибна. Для систем числення з іншими основами гіпотеза про паліндроми поки-що не доведена.

У десятковій системі числення цікавим є число 196. Математики-програмісти при допомозі ЕОМ пройшли сотні тисяч кроків, але до паліндрома дійти не змогли. Проте це не доводить, що він ніколи не з'явиться. (89,24), (10794,39)

Прості числа паліндроми

Л.Мозер знайшов перші прості числа паліндроми:

$$11, 101, 131, 151, 181, 313, 353, 373, 383, 727, 757, 787, 919, 929,$$

які не перевищують 100000.

Теорема Брауера про нерухому точку

Індійський математик-любитель Капрекар, досліджуючи один алгоритм на множині цілих чотиризначних чисел, помітив, що його результатом кожен раз є це число.

Рівняння

$$\left(\binom{2n}{n}, 3 \cdot 5 \cdot 7\right) = 1$$

має безліч натуральних розв'язків.

Рівняння

$$\left(\binom{2n}{n}, 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11\right) = 1$$

має скінченне число розв'язків.

Означення

Рівняння виду

$$P(x_1, \dots, x_m) = 0,$$

де P – цілочисельна функція, а змінні $x_i, i = 1, \dots, m$ приймають лише цілі значення називають діофантовим рівнянням.

$x^n + y^n = z^n$
$n = 1 : x + y = z$ – тривіальний випадок
$n = 2 : x^2 + y^2 = z^2$ – (Піфагор)
$n > 3$ Велика (остання) теорема Ферма – найпопулярніша проблема математики
$n = 3$ – (Ойлер, 1770 р.)
$n = 4$ – (Ферма)
$n = 5$ – (Діріхле, Лежандр, 1825 р.)
$n = 7$ – (Ламе)
$p < 100, p \neq 37, 59, 67$ (Куммер, при допомозі запроваджених ним ідеальних чисел)
• – Ендрю Уайлс (1994 р.)

Гіпотеза Ферма та діофантове рівняння Каталана

Рівняння
$$a^m + b^n = c^k,$$
де
$$(a, b, c) = 1,\ \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{k} < 1,\ a^m \neq b^n, a^m \neq c^k, b^n \neq c^k,$$
на множині натуральних чисел, має лише скінченне число розвязків (a, b, c, m, n, k).

Станом на 2014-й рік відомо всього 10 розвязків цього рівняння:
$$1^m + 2^3 = 3^2$$
$$2^5 + 7^2 = 3^4$$
$$13^2 + 7^3 = 2^9$$
$$2^7 + 17^3 = 71^2$$
$$3^5 + 11^4 = 122^2$$

$$33^8 + 1549034^2 = 15613^3$$
$$1414^3 + 2213459^2 = 65^7$$
$$9262^3 + 15312283^2 = 113^7$$
$$17^7 + 76271^3 = 21063928^2$$
$$43^8 + 96222^3 = 30042907^2$$

У 1844 році бельгійський математик Каталан висловив гіпотезу про те, що діофантове рівняння

$$x^a - y^b = 1,$$

де $x, y, a, b > 1$ має лише єдиний корінь $x = 3, a = 2, y = 2, b = 3$.

У 2002 році румунський математик Преда Міхалеску довів цю гіпотезу.

Гіпотеза Білла (1993 р.)

Якщо
$$x^m + y^n = z^k,$$
де $m, n, k, x, y, z \in N$ і $m, n, k > 2$, то $(x, y, z) = d > 1$.

Станом на 2013 рік гіпотеза перевірена для випадків, коли значення всіх шести чисел не перевищують 1000.

24 березня 2014 року стартував проект добровільних обчислень Beal@Home на платформі BOINC по пошуку контрприкладу шляхом повного перебору.

Для довільного дійсного $\varepsilon > 0$ існує не більше скінченного числа трійок натуральних чисел a, b, c таких, що $(a, b, c) = 1$ і $a + b = c$ причому

$$c > (rad(abc))^{1+\varepsilon},$$

де $rad(n) = \Pi_{p|n} p$.
Шінічі Мотідзукі!•?

$$s_0^2 - ms_1^2 = \begin{vmatrix} s_0 & ms_1 \\ s_1 & s_0 \end{vmatrix} = 1$$

Розв'язки рівняння Пелля дають одиниці у числовому кільці $Z[\sqrt{m}]$, елементами якого є $s_0 + \sqrt{m}s_1$.

n-вимірним узагальненням рівняння Пелля є рівняння

$$\begin{vmatrix} s_0 & ms_{n-1} & ms_{n-2} & \cdots & ms_2 & ms_1 \\ s_1 & s_0 & ms_{n-1} & \cdots & ms_3 & ms_2 \\ s_2 & s_1 & s_0 & \cdots & ms_4 & ms_3 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ s_{n-2} & s_{n-3} & s_{n-4} & \cdots & s_0 & ms_{n-1} \\ s_{n-1} & s_{n-2} & s_{n-3} & \cdots & s_1 & s_0 \end{vmatrix} = \pm 1$$

для (n, m)-форми $s_0 + s_1 \sqrt[n]{m} + \ldots + s_{n-1} \sqrt[n]{m^{n-1}}$.

При $n = 3$ після обчислення відповідного детермінанта третього порядку отримаємо трьохвимірний аналог рівняння Пелля:

$$s_0^3 + s_1^3 m + s_2^3 m^2 - 3 s_0 s_1 s_2 m = 1$$

А це п'ятивимірний аналог:

$$(s_0^5 + s_1^5 m + s_2^5 m^2 + s_3^5 m^3 + s_4^5 m^4) -$$

$$-5(s_0^3 s_1 s_4 m + s_0^3 s_2 s_3 m + s_1^3 s_0 s_2 m + s_1^3 s_3 s_4 m^2 + s_2^3 s_0 s_4 m^2 + + s_2^3 s_1 s_3 m^2$$

$$+ s_3^3 s_0 s_1 m^2 + s_3^3 s_2 s_4 m^3 + s_4^3 s_0 s_3 m^3 + s_4^3 s_1 s_2 m^3) + 5(s_0^2 s_1^2 s_3 m + s_0^2 s_2 s_4^2 m^2$$

$$+ s_1 s_0^2 s_2^2 m + s_4 s_0^2 s_3^2 m^2 + s_0 s_4^2 s_1^2 m^2 + s_0 s_2^2 s_3^2 m^2 + s_1^2 s_4 s_2^2 m^2 + s_2 s_1^2 s_3^2 m^2$$

$$+ s_1 s_3^2 s_4^2 m^3 + s_4^2 s_2^2 s_3 m^3) - 5 s_0 s_1 s_2 s_3 s_4 m^2 = 1.$$

$$m = 723987228393108691193640947846484436296496962279511135\allowbreak 9$$

$$
\begin{gathered}
974934755582575468179641313855769259727641974609798138893255 \\
525211182516975159833221705921278768192182515320441657882401 \\
010319428973812885522960333217672876733752301462230992931472 \\
909904767713450913240634917893148613016192814762213558096464 \\
402885840589676123168302402549079960138122269110454764380482 \\
620797212301828876999333286096636315349989543361123952286204 \\
679568796728357647509618040687075931376908228422344437391718 \\
598847301096960325148718064874625829071932050706560411935363 \\
097129685477802808489613517468157406211390960108809283162275 \\
086186714073920595021715659951203220403390183303468032708161 \\
048148186272608066667799184997780960378585296561952602849633 \\
261805881923550356499415702867592774593662323899734807289980
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
768201261654488304289541162853189580522455748182295602375207\\
298343703588386419599807672013076867243091847913861105093811\\
84003,
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
s_0 = 524157506876335327434518685209315033260245191753990179 9\\
932282202278664005900121988404431292090932896640188251981680\\
326006813119732590132197563293690094647723171139535411516659\\
033189312863606609940147337891254811171282064557496488402243\\
617969658697073506591959974748435341221226735197582720381982\\
299223922948600684651564931177032848265679312201428827959001\\
983962562284328721926456192013117840486119368302870988948460\\
525587477841663879827970098875001133833949548499240589613091\\
535101060988495239283487157834796036977947636759176039961934\\
635983735619442324532910010967441297842323402115179325365224
\end{gathered}
$$

2458692814139528533465614638164958843232285882575397901115335

7479530549945129000803251523027104237327198208894553019566641

8618572828196296769594006010481207149838876599012786236131 82

4078795351620286680835761829892144359535395508418818839752 82

2545262812526691029437166305531731274201550807953473520708 12

0163815867841934332650722805905389093418299457335024526416 25

9315206406238874139564681626236950162901631047553070704505 65

0183867976641093670999858408454367429463386890840594385293 70

9802935693973695139192765997506011355706153187641920383066 04

6250487810093916831753629132289098060641677494247466958662 50

1671555834209980907253903935668304793908653081869512433488 05

1289551959081463591284846072041086729950783554076502300473 02

5256568525983298148645105724266664437164114440255741302352 74

9978554485800765872982452383611182003209065370843956311667 06

$$
\begin{gathered}
5521690491719217818167383041633179870994637328683204196863 42\\
62346854103778248347135054937561771105994713842361672638 0877\\
79899777468580291940081754637150710503620715425816344986 3192\\
00607243992156689191455376323570057080663793705308064792 1850\\
65931214943113867844346137140670747056696064759105495866 6507\\
53741868447879800786125677823766423327127239751828944769 9995\\
52001,
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
s_1 = 583738281245308019278251001268605689595320718532407 3163\\
32689798195793368294969551350798349102948692001218862750 4494\\
17789392165795822038878400137027585609803738308553176296 3522\\
97118915632168310347664888455412114570791962705482213502 4996\\
71359832279289573577581271450852293477210136135268386143 2720
\end{gathered}
$$

07390011410691222705827126383548851417377621092971303172814 3

02065898095939802963612012248765161481917354699031710778651 7

17841021540085634385821471655342637042395148055309667571277 4

46895807769933983270548790414209016820040872277020114158266 4

56045244940564212944025035709868542544607456691806021979113 2

36300716274640811583295454162788579802163550394764292534968 4

28253401464721665743417546080222870801168517089515077232557 1

08761555029233693182930901357200909276700908032575752353659 1

51001399261875495806832999754747586953104814260244724211877 8

49380637912462674576420227426030414071466384355495789591089 8

69841418643312732432336757926312704876455907340530607177188 2

59682695162163803479746833975833989976797366121695076491359 8

41617109111707125906719356727460457518507597688369942942932 6

00459012457820804296902231300685852115893935642844985064241 6

$$
\begin{gathered}
6582158884063816349543639722459709537738311132591909051453 53\\
6519104233872536292048033092748741450562617333162244144188 19\\
8827751199541097564337997956703777066684016802402252447983 42\\
0448669006585298426071993786161597675522970466736914808012 64\\
1717662482042465211657049448973108237283948135748482750270 97\\
8220905041313944575789878263858106342365675264976461233415 39\\
87200,
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
s_2 = 650091578430106670631570829548420125422961620149850303 3\\
2259365136150509934201896167016168301783780719008364704901 54\\
6577320674571799571576573337948512560348949681362643307633 26\\
4830014041782150655564820154700950557704403363149874047075 39\\
1186878436078836387537851530458319992145674832832669630333 24
\end{gathered}
$$

4686279597764060393261309052804227337746032408101303467647070

4233553720827364016803472647079673744595044148660714278073680

3891327355939099330211768285974174940847026047087656570621330

8643157777017705548904875640192764852091665327884472292890320

5217674511760092435075005413248920875093881274805993183720940

9993018115854079321945067200149553418925746124536507598903530

8444726373575409639765980588423061002677670405839262002203310

3947727565564297205463435297711983538176350735903999315307260

7003419720236219155394552870841021541474981481944647062907380

4479685424501974211405389277324290201416322623051925232679170

4253303246815482075076715184776447452047138710888040784149900

5419190342005782121402808340016963171777670492063044259994220

1591800676192060144346556791735281733243987748333097796092400

9284882675684390447488162087773570416575255806069259800573170

0889068321607148421554468505968982500055572360906219657504680

30440.

В цьому прикладі m — просте 900-цифрове число, а s_0, s_1, s_2 — числа, що містять відповідно по $1800, 1500, 1300$ цифр.

Наведений вище розвязок отримано при допомозі параметризації 3-вимірного рівняння Пелля

$$m = \frac{k}{r}(p+3), s_0 = (p+2)(p+1) - 1, s_1 = kr(p+2), s_2 = r(p+1)$$

де $p = k^2 r$.
При цьому $n = k = \lfloor 10^{300}\{10^{10}\pi\} \rfloor + 374$, а символом $\{\cdot\}$ позначено дробову частину числа.

$$n=3: m=\frac{k}{r}(rk^2-3), s_0=1, s_1=-rk, s_2=r,$$

$$n=5: m=\frac{k}{r}\cdot(rk^4-5), s_0=1, s_1=-rk^3, s_2=2rk^2, s_3=-2rk, s_4=r,$$

$$n=7: m=\frac{k}{r}\cdot(rk^6-7), s_0=1, s_1=-rk^5, s_2=3rk^4, s_3=-5rk^3,$$

$$s_4=5rk^2, s_5=-3rk, s_6=r,$$

$$n=9: m=\frac{k}{r}\cdot(rk^8-3), s_0=1, s_1=-rk^7, s_2=rk^6, s_3=-rk^5,$$

$$s_4=2rk^4, s_5=-2rk^3, s_6=rk^2, s_7=-rk, s_8=r,$$

$$n=11: m=\frac{k}{r}\cdot(rk^{10}-11), s_0=1, s_1=-rk^9, s_2=5rk^8, s_3=-15rk^7,$$

$$s_4=30rk^6, s_5=-42rk^5, s_6=42rk^4, s_7=-30rk^3, s_8=15rk^2,$$

$$s_9=-5rk, s_{10}=r,$$

Модулі коефіцієнтів многочленів, що є розв'язками діофантових рівнянь $|F(2n-1,m)|=1$, очевидно пов'язані з числовим трикутником

$$\begin{array}{lllllll} n=2: & 1 & & & & & \\ n=3: & 1 & 2 & & & & \\ n=4: & 1 & 3 & 5 & & & \\ n=5: & 1 & 1 & 1 & 2 & & \\ n=6: & 1 & 5 & 15 & 30 & 42 & \\ n=7: & 1 & 6 & 22 & 55 & 99 & 132 \end{array},$$

а елементи цього числового трикутника із факторизацією числа $2n-1$.

Рівняння Пелля 11-го порядку та його параметризація

$$\begin{vmatrix}
s_0 & ms_{10} & ms_9 & ms_8 & ms_7 & ms_6 & ms_5 & ms_4 & ms_3 & ms_2 & ms_1 \\
s_1 & s_0 & ms_{10} & ms_9 & ms_8 & ms_7 & ms_6 & ms_5 & ms_4 & ms_3 & ms_2 \\
s_2 & s_1 & s_0 & ms_{10} & ms_9 & ms_8 & ms_7 & ms_6 & ms_5 & ms_4 & ms_3 \\
s_3 & s_2 & s_1 & s_0 & ms_{10} & ms_9 & ms_8 & ms_7 & ms_6 & ms_5 & ms_4 \\
s_4 & s_3 & s_2 & s_1 & s_0 & ms_{10} & ms_9 & ms_8 & ms_7 & ms_6 & ms_5 \\
s_5 & s_4 & s_3 & s_2 & s_1 & s_0 & ms_{10} & ms_9 & ms_8 & ms_7 & ms_6 \\
s_6 & s_5 & s_4 & s_3 & s_2 & s_1 & s_0 & ms_{10} & ms_9 & ms_8 & ms_7 \\
s_7 & s_6 & s_5 & s_4 & s_3 & s_2 & s_1 & s_0 & ms_{10} & ms_9 & ms_8 \\
s_8 & s_7 & s_6 & s_5 & s_4 & s_3 & s_2 & s_1 & s_0 & ms_{10} & ms_9 \\
s_9 & s_8 & s_7 & s_6 & s_5 & s_4 & s_3 & s_2 & s_1 & s_0 & ms_{10} \\
s_{10} & s_9 & s_8 & s_7 & s_6 & s_5 & s_4 & s_3 & s_2 & s_1 & s_0
\end{vmatrix} = 1$$

$$m = \frac{k}{r} \cdot (rk^{10} - 11),$$

$$s_0 = r^{10}k^{100} - 55r^9k^{90} + 1265r^8k^{80} - 15730r^7k^{70} + 114037r^6k^{60} -$$
$$-483637r^5k^{50} + 1137015r^4k^{40} - 1295910r^3k^{30} + 527329r^2k^{20} -$$
$$-32065rk^{10} + 1,$$

$$s_1 = rk^9(r^9k^{90} - 54r^8k^{80} + 1216r^7k^{70} - 14749r^6k^{60} + 103758r^5k^{50} -$$
$$423776r^4k^{40} + 947934r^3k^{30} - 1005966r^2k^{20} + 363493rk^{10} - 16796),$$

$$s_2 = rk^8(r^9k^{90} - 53r^8k^{80} + 1168r^7k^{70} - 13811r^6k^{60} + 94212r^5k^{50} -$$
$$-370171r^4k^{40} + 786526r^3k^{30} - 774787r^2k^{20} + 246779rk^{10} - 8398),$$

$$s_3 = rk^7(r^9k^{90} - 52r^8k^{80} + 1121r^7k^{70} - 12915r^6k^{60} + 85362r^5k^{50} -$$
$$-322301r^4k^{40} + 649346r^3k^{30} - 591812r^2k^{20} + 164814rk^{10} - 3978),$$

$$s_4 = rk^6(r^9k^{90} - 51r^8k^{80} + 1075r^7k^{70} - 12060r^6k^{60} + 77172r^5k^{50} -$$
$$-279676r^4k^{40} + 533294r^3k^{30} - 448110r^2k^{20} + 108134rk^{10} - 1768),$$

$$s_5 = rk^5(r^9k^{90} - 50r^8k^{80} + 1030r^7k^{70} - 11245r^6k^{60} + 69607r^5k^{50} -$$
$$-241836r^4k^{40} + 435590r^3k^{30} - 336175r^2k^{20} + 69589rk^{10} - 728),$$

$$s_6 = rk^4(r^9k^{90} - 49r^8k^{80} + 986r^7k^{70} - 10469r^6k^{60} + 62633r^5k^{50} -$$
$$-208350r^4k^{40} + 353750r^3k^{30} - 249740r^2k^{20} + 43849rk^{10} - 273),$$
$$s_7 = rk^3(r^9k^{90} - 48r^8k^{80} + 943r^7k^{70} - 9731r^6k^{60} + 56217r^5k^{50} -$$
$$-178815r^4k^{40} + 285563r^3k^{30} - 183609r^2k^{20} + 26998rk^{10} - 91),$$
$$s_8 = rk^2(r^9k^{90} - 47r^8k^{80} + 901r^7k^{70} - 9030r^6k^{60} + 50327r^5k^{50} -$$
$$-152855r^4k^{40} + 229069r^3k^{30} - 133506r^2k^{20} + 16204rk^{10} - 26),$$
$$s_9 = rk(r^9k^{90} - 46r^8k^{80} + 860r^7k^{70} - 8365r^6k^{60} + 44932r^5k^{50} -$$
$$-130120r^4k^{40} + 182538r^3k^{30} - 95940r^2k^{20} + 9454rk^{10} - 6),$$
$$s_{10} = r(r^9k^{90} - 45r^8k^{80} + 820r^7k^{70} - 7735r^6k^{60} + 40002r^5k^{50} -$$
$$-110285r^4k^{40} + 144450r^3k^{30} - 68085r^2k^{20} + 5344rk^{10} - 1),$$