МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника

Всеукраїнська наукова конференція

Алгебра, топологія, аналіз, стохастика

(АТАС — 2012)
Микуличин, 20 — 23 вересня 2012 р.

Тези доповідей

Івано-Франківськ,
2012

Алгебра, топологія, аналіз, стохастика: Всеукраїнська наукова конференція, тези доповідей. Микуличин, 20 – 23 вересня 2012 р. – Івано-Франківськ: Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, 2012. – 48 с.

У збірнику представлено стислий виклад доповідей і повідомлень, поданих на Всеукраїнську наукову конференцію “Алгебра, топологія, аналіз, стохастика”. Тези доповідей і повідомлень подані в авторському варіанті.

До 10-річчя факультету математики та інформатики

Факультет математики та інформатики утворився в 2002 році внаслідок реорганізації фізико-математичного факультету, який функціонував з 1940 року.

Навчально-виховну і науково-дослідну роботу на факультеті здійснюють 8 докторів наук, професорів, 35 кандидатів наук, доцентів, 5 асистентів. До читання окремих спеціальних дисциплін запрошуються відомі вчені з провідних навчальних та наукових закладів України. Серед них член-кор. НАН України, доктори фізико-математичних наук Пташник Б.Й., Портенко М.І., доктори фізико-математичних наук Кулик О.М., Стоян В.А., П'янило Я.Д., Чернуха О.Ю., Кутнів М.В., доктори технічних наук Саченко А.О., Лютак І.З. На факультеті навчається 650 студентів (з них 600 – за денною, 50 – за заочною формою). На факультеті функціонує аспірантура за різними спеціальностями, спеціалізована Вчена Рада із захисту кандидатських дисертацій за спеціальностями "математичний аналіз" і "математичне моделювання та обчислювальні методи" (фізико-математичні науки та технічні науки), видається науковий журнал "Карпатські математичні публікації", що входить до переліку фахових видань.

Напрями підготовки:

Математика

Спеціалізації: алгебра, геометрія, математичний аналіз, теорія ймовірностей, диференціальні рівняння, фінансова та актуарна математика.

Статистика

Спеціалізації: статистика та актуарна справа, теорія ймовірностей та математична статистика.

Прикладна математика

Спеціалізації: математичне і комп'ютерне моделювання, комп'ютерна математика, математичне та інформаційне забезпечення економічної діяльності.

Інформатика

Спеціалізації: інформаційні системи і технології, інформаційні технології в науці, освіті і виробництві, системне адміністрування комп'ютерних мереж, Web-технології.

Основні напрямки наукових досліджень факультету: розробка аналітичних та аналітико-числових методів дослідження дифузійних процесів у випадково неоднорідних шаруватих тілах; категорні методи в топології та алгебрі; алгебраїчні методи в комбінаториці; теоретичні та методичні основи побудови комп'ютерних компонентів та систем на базі біт орієнтованої вертикальної інфотехнології; впровадження сучасних інформаційних технологій в навчальний процес середніх та вищих закладів освіти; ймовірнісні та статистичні методи досліджень; методичні аспекти викладання математичних дисциплін; теоретичні та методологічні основи розробки автоматизованих систем передачі та контролю знань; проблеми комп'ютерного моделювання.

Міжнародне співробітництво факультету здійснюється у формі реалізації спільних наукових проектів, публікацій, стажування викладачів. Налагоджено співпрацю з науковцями і викладачами Краківської політехніки, Краківської гірничо-металургійної академії (Польща), Жешівського університету (Польща), Північного університету м. Бая-Маре (Румунія), Казанського університету (Росія), Білоруського державного університету (Білорусія), Технічного університету Лілль-1 (Франція), Університету Валенсії (Іспанія), Університету Любляни (Словенія). Щороку викладачі факультету проходять стажування в цих університетах та здійснюють спільні наукові пошуки.

1 Пленарні доповіді

Про секвенціальне замикання поліномів у просторі нарізно неперервних функцій

Волошин Г.А., Маслюченко В.К.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Буковинський державний фінансово-економічний університет

math.analysis.chnu@gmail.com

На просторі $S = CC[0,1]^2$ всіх нарізно неперервних функцій $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ природним чином вводяться переднорми

$$\|f\|^x = \|f^x\|_\infty \qquad \text{і} \qquad \|f\|_y = \|f_y\|_\infty \qquad (x, y \in [0,1]),$$

де $f^x(y) = f_y(x) = f(x,y)$, $\|\cdot\|_\infty$ – максимум-норма на просторі $C[0,1]$ всіх неперервних функцій на $[0,1]$. Вони породжують локально опуклу топологію $\mathcal{T}$ на S. Замикання множини A у топологічному просторі ми позначатимемо через $\overline{A}$, а секвенціальне замикання – символом $\overline{A}^s$. З допомогою многочленів Бернштейна B_n легко з'ясувати [1], що для кожної функції $f \in S$ функції $f_n(x,y) = (B_n f^x)(y)$ сукупно неперервні, поліноміальні відносно другої змінної і $\|f - f_n\|^x \to 0$ для кожного $x \in [0,1]$. Тому постало природне питання: яким буде секвенціальне замикання $\overline{P}^s$ множини P всіх поліномів $g : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ від двох змінних у просторі $(S, \mathcal{T})$, зокрема, чи $\overline{P}^s = S$?

Нехай $C = C[0,1]^2$ – простір усіх сукупно неперервних функцій $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$. З допомогою теореми Вейєрштрасса про рівномірне наближення функцій $f \in C$ многочленами $g \in P$ нескладно довести таке.

Теорема 1 *$\overline{P} = \overline{C}$ і $\overline{P}^s = \overline{C}^s$ у просторі $(S, \mathcal{T})$.*

На основі теореми Тітце-Урисона звідси отримується

Теорема 2 *$\overline{P} = \overline{C} = S$.*

Знайти секвенціальне замикання $\overline{P}^s$ поки що не вдалося. Отримані лише часткові результати.

Теорема 3 *Кожна функція $f \in S$, множина $D(f)$ усіх точок розриву якої має дискретні проекції на обидві осі, зокрема, класична функція Шварца $sp(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$, $sp(0,0) = 0$, чи, загальніше, функції зі скінченним числом розривів, належить до $\overline{P}^s$.*

Рене Бер свою дисертацію [2] починає з прикладу нарізно неперервної функції зі зліченною множиною точок розриву $E = \{p_k : k \in \mathbb{N}\}$, де $p_k \neq p_j$ при $k \neq j$, яка задається так:

$$f_0(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} sp(p - p_k).$$

Поки що невідомо, чи $f_0 \in \overline{P}^s$ у загальному випадку. Невідомо також, чи $S \setminus \overline{P}^s \neq \varnothing$.

З допомогою категорних міркувань можна довести такий результат.

Теорема 4 *Нехай $f \in \overline{P}^s$ у просторі $(S, \mathcal{T})$. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ існують такі залишкові G_δ-множини A і B на відрізку $[0,1]$, що для кожної точки $p_0 = (x_0, y_0) \in A \times B$ існують околи U точки x_0 і V точки y_0 і сукупно неперервна функція $g : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, такі, що*

$$|f(p) - g(p)| \leq \varepsilon \quad \textit{на} \quad xp(U \times V) = (U \times [0,1]) \cup ([0,1] \times V).$$

Позначимо символом M сукупність усіх функцій $f \in S$, які мають властивість, вказану в теоремі 4. Легко зрозуміти, що функції $f \in M$ мають і таку властивість: для кожного $\varepsilon > 0$ існують такі залишкові G_δ-множини A і B на $[0,1]$, що для кожної точки $p_0 = (x_0, y_0) \in A \times B$ існують такі околи U і V точок x_0 і y_0 відповідно, що $\omega_f(p) \leq \varepsilon$ на $xp(U \times V)$. Ця властивість рівносильна тому, що проекції множини $D(f)$ усіх точок розриву функції f на обидві вісі є множинами першої категорії. Ще Р.Бер довів [2], що таку властивість має кожна функція $f \in S$. Наступний результат встановлюється з допомогою цієї теореми Бера і теореми Гана-Д'єдонне-Тонґа-Катетова [3, с.105]

Теорема 5 *$M = S$.*

Зауважимо, що $f_0 \in M$. Функція f_0 є рівномірною границею послідовності функцій $f_n(p) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} sp(p - p_k)$, які входять в $\overline{P}^s$. На жаль, не ясно чи витримує множина $\overline{P}^s$ перехід до рівномірної границі, а от рівномірна границя послідовності функцій з M залишається у цій же множині.

[1] *Власюк Г., Маслюченко В.К.* Многочлени Бернштейна і нарізно неперервні функції // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Вип. 336-337. Математика. – Чернівці: Рута, 2007. – С. 52-59.

[2] *Baire R.* Sur les fonctions de variables reélles // Ann. Mat. Pura Appl., ser.3. – 1899. – **3**. – P.1-123.

[3] *Энгелькинг Р.* Общая топология/ Р. Энгелькинг. – М.: Мир, 1986. – 752с.

Алгебри симетричних та блочно-симетричних аналітичних функцій на банахових просторах

Загороднюк А.В., Кравців В.В., Чернега І.В.

ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника",
Інститут прикладних проблем механіки і математики НАН України
andriyzag@yahoo.com

Нехай X — банахів простір. Позначимо через $H_{bs}(X)$ — алгебру симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на просторі X, а через $M_{bs}(X)$ — спектр цієї алгебри.

Розглянемо простір $\mathcal{X}_\infty^s = \oplus_1 \mathbb{C}^s$ – нескінченна ℓ_1-сума копій простору $\mathbb{C}^s$ з нормою $\|\overline{x}\| = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \|x_i\|$, де вектор $\overline{x} \in \mathcal{X}_\infty^s$ і $x_i \in \mathbb{C}^s$. Будемо казати, що поліном P на просторі $\mathcal{X}_\infty^s$ називається *блочно-симетричним (векторно-симетричним)*, якщо:

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots) = P(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(m)}, \ldots),$$

де $x_i \in \mathbb{C}^s$ і σ – довільна підстановка на множині $\mathbb{N}$. Позначимо $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_\infty^s)$ — алгебру блочно-симетричних поліномів на просторі $\mathcal{X}_\infty^s$, $H_{bvs}(\mathcal{X}_\infty^s)$ — алгебру блочно-симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на просторі $\mathcal{X}_\infty^s$, а через $M_{bvs}(\mathcal{X}_\infty^s)$ — спектр цієї алгебри.

У допопвіді буде описано спектр $M_{bs}(X)$ алгебри $H_{bs}(X)$ як функції експоненціального типу і спектр $M_{bvs}(\mathcal{X}_\infty^2)$ алгебри $H_{bvs}(\mathcal{X}_\infty^2)$ як функції експоненціального типу від двох змінних з "плоскими" нулями [1, 2].

[1] *Chernega I., Galindo P., Zagorodnyuk A.* The convolution operation on the spectra of algebras of symmetric analytic functions // J. Math. Anal. Appl. – 2012. – V. 395. – P. 569–577.

[2] *Загороднюк А.В., Кравців В.В.* Спектр алгебри блочно-симетричних аналітичних функцій // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2011. – Вип.9. – С. 47–54.

2 Секційні доповіді

Брейси та групи

Орест Д. Артемович

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

orest_artemovych@hotmail.com

Нагадаємо [1], що абелева група $(A, +)$ з множенням

$$* : A \times A \to A$$

називається *брейсом*, якщо для будь-яких елементів $a, b, c \in A$ виконуються такі дві умови:

i) $(a + b) * c = (a * c) + (b * c)$,

ii) A – група стосовно операції кругового множення "$\circ$", визначеного за правилом
$$a \circ b = a + b + (a * b).$$

Група $(A, \circ)$ називається *приєднаною групою* брейса A і позначається символом A°. Брейс A – асоціативне кільце тоді і тільки тоді, коли він є радикальним (в сенсі Джекобсона) кільцем.

Нами, зокрема, побудовано брейс цілих чисел $(\mathbb{Z}, +, *)$ і встановлена така

Теорема 1 *Приєднана група $\mathbb{Z}^\circ$ брейса цілих чисел $(\mathbb{Z}, +, *)$ має такі властивості:*

(1) $\mathbb{Z}^\circ = \langle 2 \rangle \rtimes \langle 1 \rangle$ *– напівпрямий добуток нескінченної нормальної циклічної підгрупи $\langle 2 \rangle$ і циклічної підгрупи $\langle 1 \rangle$ порядку 2;*

(2) *кожен член нижнього центрального ряду $\gamma_k(\mathbb{Z}^\circ) = \langle 2^k \rangle$ циклічний $(k \geq 2)$;*

(3) *кожна підгрупа в $\mathbb{Z}^\circ$ або скінченна, або скінченного індекса;*

(4) *група $\mathbb{Z}^\circ$ резидуально апроксимовна і резидуально нільпотентна;*

(5) *центр $Z(\mathbb{Z}^\circ)$ одиничний;*

(6) *група $\mathbb{Z}^\circ = \langle 1, 3 \rangle$ породжується двома інволюціями 1 і 3.*

Всі необхідні теоретико-групові означення і факти можна знайти в [2], [3] і [4].

[1] W. Rump, Braces, radical rings, and the quantum Yang-Baxter equation, J. Algebra. **307** (2007), 153–170.

[2] L. V. Skaskiv, O. D. Artemovych, Groups associated with braces, Carpathian Math. Publ. **3** (2011), no 1, 4–14.

[3] М. И. Капгаполов, Ю. И. Мерзляков, *Основы теории групп.* – Наука, Москва, 1982. – 288 с.

[4] D. J. S. Robinson, *A Course in the Theory of Groups*, Graduate Text in Math., 80, Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1980. – 481 p.

The categorial and equivariant movabilityes as invariants under the topologycal conjugations of inverse discrete nonautonomic dynamical systems

Bogdan Atamanyuk

Precarpathian University. Ukraine.

bogdat@ukr.net, bogdat07@gmail.com

My investigation is devoted to different kinds of movability and its preserving under the topologycal conjugations. We consider a nonautonomic discrete dynamical system as inverse spectrum.

Theorem 1 *The categorial movability by Mardesic is preserved under the topological conjugations.*

Theorem 2 *R-movability for any class R of topological spaces is invariant under the topological conjugations.*

Theorem 3 *Premovability relatively the spectrum ass$Y$ is an invariant relatively that same spectrum ass$Y$ under the topological conjugations.*

Theorem 4 *If topological conjugation has same G-orbital type with the map which realized the equivariant movability relatively of groop G then its equivariant movability is preserved under the topological conjugation.*

Theorem 5 *Let E and B are arbitrary G-spaces. Let the equivariant map p of E onto B satisfies to the axiom of equivariant roof homotopy for any G-space that is p must be G-stratification. If the topological conjugation has G-orbital type than image under the topological conjugation also is G-stratification.*

We remark than he main necessary results and definitions were given by Gevorgyan in his doctoral investigation.

Absorbing systems and dimensions related to metric

Natalia Mazurenko

Precarpathian National University

mnatali@ukr.net

The theory of absorbing systems (see, e.g., [2]) is a generalization of the theory of absorbing sets [1]. The characterization results of the theory of absorbing systems have numerous applications in different parts of mathematics, in particular, in the dimension theory.

We consider the hyperspaces of compacta with various dimension properties in the euclidean spaces, Riemannian manifolds and the Hilbert spaces. In particular, we consider the Hausdorff dimension, the packing dimension, the fractal dimension, and the Minkowski Bouligand dimension. In some cases, the topology of systems determined by these dimensional functions can be described by means of the theory of absorbing systems in the Hilbert cube (Hilbert cube manifolds) and the Hilbert space.

We also consider the topology of the hyperspaces of self-similar sets and sub-self-similar sets [3].

[1] *Bestvina M., Mogilski J. Characterizing certain incomplete infinite-dimensional absolute retracts, Michigan Math. J. 33(1986), 291– 313.*

[2] *Gladdines H. Absorbing systems in infinite-dimensional manifolds and applications. Amsterdam: Vrije Universiteit, 1994. 117 p.*

[3] *M. McClure, R. W. Vallin, The Borel Structure of the Collections of Sub-Self-Similar Sets and Super-Self-Similar Sets, Acta Mathematica Universitatis Comenianae. New Series, 69(2000), 145 – 149.*

Простір відкритих факторобєктів канторової множини

Копорх Катерина

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
katerynka.k@gmail.com

Нехай X, Y_i, де $i = 1, 2$ — компактні гаусдорфові простори. Нехай $f_i \colon X \longrightarrow Y_i$ — сюр'єктивні неперервні відображення топологічних просторів, $i = 1, 2$. Кажемо, що f_1 еквівалентне f_2, якщо існує гомеоморфізм $h \colon Y_1 \longrightarrow Y_2$ такий, що $h \circ f_1 = f_2$. Позначимо через $\langle f \rangle$ калас еквівалентності, що містить відображення f, назвемо $\langle f \rangle$ — фактороб'єктом простору X. Як звичайно, $\exp X$ позначаємо простір непорожніх замкнених підмножин топологічного простору X, наділений топологією Вієторіса.

Нехай

$$\Psi(X) = \{\langle f \rangle \mid f \colon X \longrightarrow Y - \text{ відкрите відображення } \}.$$

Кожне відкрите відображення $f \colon X \longrightarrow Y$ порджує розбиття $\{f^{-1}(f(x)) \mid x \in X\} \in \exp^2(X)$. Ототожнивши $\langle f \rangle$ з відповідним розбиттям, можемо вважати, що $\Psi(X) \subset \exp^2(X)$ [2].

Якщо X — компактний метричний простір, то на множині $\Psi(X)$ розглядаємо топологію, індуковану топологією Вієторіса (метрикою Гаусдорфа) на $\exp^2(X)$.

Нехай $X = \mathrm{C}$ — канторова множина. Канторова множина є нульвимірни, досконалим (не містить ізольованих точок), повним компактним метричним простором. Доведено, що $\Psi(C)$ є ніде не локольно компактною, G_δ підмножиною простору $(\exp^2 C, \tau_V)$. Таким чином має місце наступна теорема.

Теорема 1 *Простір $\Psi(\mathrm{C})$ відкритих фактороб'єктів канторової множини гомеоморфний простор ω^ω ірраціональних чисел.*

[1] Е.В.Щепин, Топология предельных пространств несчетных обратных спектров// Успехи мат. наук.-1976.- т.31,вып.5(191).стр.197.

[2] К.Копорх, *Топологія Вієторіса на просторі відкритих фактороб'єктів компактного гаусдорфового простору*// Праці міжнародного геометричного центру. — 2010 — Том 3, №4,— С.35-42.

Matrix Burgers-type systems and nonlinear integrable equations

Berkela Yuriy[1], Sanitska Alla[2], Sydorenko Yuriy[3]

[1] *Carpathian Biosphere Reserve,* [2] *Lviv Institute of Economy and Tourism,* [3] *Ivan Franko National University of Lviv*

y_sydorenko@franko.lviv.ua

We consider binary transformations and their reductions for constructing the exact solutions of nonlinear integrable equations that admit differential and integro-differential Lax-Zakharov-Shabat representations (e.g., so called symmetry reductions of the KP-hierarchy and their multicomponent generalizations [1, 2]). Such transformations were introduced as nonlinear nonlocal mappings of sufficiently smooth $(N \times K)$-matrix functions φ, ψ and $\tilde{\varphi}$ of the following forms:

$$\begin{gathered}(\varphi, \psi) \longmapsto (\Phi, \Psi) : \; \Phi = \varphi \Omega^{-1}[\psi, \varphi, C], \; \Psi = \psi \Omega^{-1,\top}[\psi, \varphi, C], \\ \Omega[\psi, \varphi, C] = C + D^{-1}\{\psi^\top \varphi\},\end{gathered} \tag{1}$$

$$\tilde{\varphi} \longmapsto \tilde{\Phi} : \; \tilde{\Phi} = \tilde{\varphi} \Omega^{-1}[\bar{\tilde{\varphi}}, \tilde{\varphi}_x, \tilde{C}], \tag{2}$$

where C and $\tilde{C}$ are $(K \times K)$-constant matrices, $D := \frac{\partial}{\partial x}$, D^{-1} is the integration operator (its realization depends on a concrete situation). The inverse mappings have the following forms:

$$\begin{gathered}(\Phi,\Psi) \longmapsto (\varphi,\psi) : \varphi = -\Phi \Omega^{-1}[\Psi, \Phi, -C^{-1}], \psi = -\Psi \Omega^{-1,\top}[\Psi, \Phi, -C^{-1}], \\ \Omega[\Psi, \Phi, -C^{-1}] = -C^{-1} + D^{-1}\{\Psi^\top \Phi\},\end{gathered} \tag{3}$$

$$\tilde{\Phi} \longmapsto \tilde{\varphi} : \; \tilde{\varphi} = \tilde{\Phi} \Omega^{-1}[\bar{\tilde{\Phi}}, \tilde{\Phi}_x, \tilde{C}^{-1}]. \tag{4}$$

Transformations (1) and (2) connect linear differential equations for functions φ ,ψ and $\tilde{\varphi}$ with nonlinear C-integrable Burgers-type systems for functions Φ, Ψ, $\tilde{\Phi}$. Solutions of those Burgers-type models are connected with the exact solutions of S-integrable systems of soliton theory (including multisoliton-type solution). In terms of transformation operators

$$W = I - \varphi \Omega^{-1}[\psi, \varphi, C] D^{-1} \psi^\top \quad \tilde{W} = I - \tilde{\varphi} \Omega^{-1}[\bar{\tilde{\varphi}}, \tilde{\varphi}_x, \tilde{C}] D^{-1} \tilde{\varphi}^* D \tag{5}$$

we can represent the functions φ, ψ of (1) and $\tilde{\varphi}$ of (2) as: $\Phi C = W\{\varphi\}$, $\Psi C^\top = W^{-1,\tau}\{\psi\}$ and $\tilde{\Phi}\tilde{C} = \tilde{W}\{\tilde{\varphi}\}$.

Our approach is a synthesis of the famous Zakharov-Shabat dressing method [3], the projection method in operator algebras due to V.A. Marchenko [4], and Darboux-Crum-Matveev binary transformations method [4]. In particular, using this approach, we obtained in [6] exact solutions of some multicomponent (1+1)-dimensional integrable models.

[1] B. Konopelchenko, J. Sidorenko, W. Strampp, Phys. Lett. A, **157**, 17 (1991).

[2] J. Sidorenko, W. Strampp, J. Math. Phys. **34** (4), 1429 (1993)

[3] V.E. Zakharov, A.B. Shabat, Funct. Anal. Appl. 8 (3), 43 (1974); 13 (3), 13 (1979)

[4] V.A. Marchenko, *Nonlinear equations and operator algebras.* Dordrecht, Boston, Lancaster, Tokyo, Reidel, 1988.

[5] V.B. Matveev, M.A. Salle, *Darboux transformations and solitons.*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1991.

[6] Yu.M. Sydorenko, O.I. Chvartatskyi, Visnyk Lviv Univ. Ser. Mech. Math. **74**, 181 (2011). (in Ukrainian)

Про деякі кутові області збіжності 1-періодичних гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду

Боднар Д.І., Бубняк М.М., Возняк О.Г.

Тернопільський національний економічний університет

dmytro_bodnar@hotmail.com, maria.bubnyak@gmail.com, olvoz@ukr.net

Розглянемо 1-періодичний гіллястий ланцюговий дріб (ГЛД) вигляду

$$\left(1+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{c_{i_k}}{1}\right)^{-1}, \tag{1}$$

де $c_j \neq 0$ – комплексні числа $\left(j=\overline{1,N}\right)$, $i_0 = N$ – фіксоване натуральне число.

Нехай $F_n = \left(1+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{c_{i_k}}{1}\right)^{-1}$ – n-ий підхідний дріб ГЛД (1) ($n \geqslant 1$, $F_0 = 1$); $R_n^{(m)} = 1+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n}\sum_{j_k=1}^{j_{k-1}}\frac{c_{j_k}}{1}$ – n-ий залишок m-го порядку ($n \geqslant 1$, $j_0 = m$, $R_0^{(m)} = 1$, $R_n^{(0)} = 1$).

Використовуючи загальну формулу для дійсних частин залишків [1], одержано

Теорема 1 *Нехай елементи 1-періодичного ГЛД (1) задовольняють умови: $c_j \in \Omega$ $(j=\overline{1,N})$, де*

$$\Omega = \left\{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \frac{\pi}{2N}\right\} \bigcap \left\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\right\}.$$

Тоді дріб (1) збігається і справджується оцінка швидкісті збіжності

$$|F_{n+1} - F_n| \le L\binom{N-1}{N+n-1} q^{\left[\frac{n+1}{3}\right]} \qquad (n \ge 2),$$

де $L = \prod_{j=1}^{N} |c_j|^2$, $q = \dfrac{C^2}{1+C^2}$, $C = \max\limits_{k=\overline{1,N}} \{|c_k|\}$, $[x]$*– ціла частина* x.

[1] *Антонова Т.М.* Швидкість збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального виглдяу // Волинський математичний вісник. – 1999. – випуск 6. – С.3-8.

[2] *Боднар Д.И.*Ветвящиеся цепные дроби. – К.: Наука, 1986. – 176 с.

Диференціювання, пов'язані зі спектром, на алгебрі типу Вінера функцій, породжених (p, q)-поліномами на банаховому просторі

Василишин Тарас Васильович

Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника

taras_vasylyshyn@mail.ru

Нехай X – банахів простір. Через $\mathcal{P}(^{p,q}X)$ будемо позначати простір неперервних (p, q)-поліномів на просторі X. Позначимо $\mathcal{W}_0(X)$ алгебру функцій вигляду $f = \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} f_{k,m-k}$, де $f_{k,m-k} \in \mathcal{P}(^{k,m-k}X)$. Для кожного раціонального $r > 0$ введемо на алгебрі $\mathcal{W}_0(X)$ норму

$$\|f\|_r = \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} \sup_{\|x\| \le r} |f_{k,m-k}(x)|.$$

Таким чином, отримали зліченну систему норм $\{\|\cdot\|_r : r \in \mathbb{Q}, r > 0\}$. Поповнення алгебри $\mathcal{W}_0(X)$ у метриці, породженій цією системою норм, позначимо $\mathcal{W}(X)$. Алгебра $\mathcal{W}(X)$ є алгеброю Фреше.

У доповіді буде розглянуто диференціювання, пов'язані зі спектром алгебри $\mathcal{W}(X)$.

Зростання цілих функцій в термінах узагальнених порядків

Глова Т.Я., Філевич П.В.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Прикарпатський національний університет ім. Василя Стефаника

hlova_taras@ukr.net, filevych@mail.ru

Нехай Φ — опукла на $[x_0, +\infty)$ функція така, що $\frac{\Phi(x)}{x} \to +\infty$, $x \to +\infty$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ — трансцендентна ціла функція, $M(r, f)$ — максимум модуля f,

$$\rho_\Phi(f) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln M(r,f)}{\ln\Phi(\ln r)}, \quad c_\Phi = \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\ln\Phi(x)}, \quad d_\Phi = \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\ln\ln\Phi'_+(x)}{\ln\Phi(x)}.$$

Нами доведено [1], що умова $d_\Phi \leq c_\Phi$ є необхідною і достатньою для того, щоб узагальнений порядок $\rho_\Phi(f)$ кожної трансцендентної цілої функції f не залежав від аргументів коефіцієнтів a_n (чи визначався послідовністю $(|a_n|)$).

[1] *Глова Т. Я., Філевич П. В.* Зростання цілих функцій в термінах узагальнених порядків // Карпатські математичні публікації. – 2012. – Т. 4, № 1. – С. 28–35.

Оператори композиції на гільбертовому просторі симетричних аналітичних функцій

Голубчак Олег Михайлович

Івано-Франківський коледж Львівського національного аграрного університету, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України

oleggol@ukr.net

Нехай $P_s(\ell_1)$ — простір симетричних поліномів на ℓ_1. Відомо, що поліноми

$$P_k(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k$$

утворюють алгебраїчний базис в $P_s(\ell_1)$. Також відомо, що поліноми вигляду $P_\lambda = P_{\lambda_1} \cdot P_{\lambda_2} \cdot ... \cdot P_{\lambda_m}$ утворюють лінійний базис в $P_s(\ell_1)$, де $P_{\lambda_k}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^{\lambda_k}$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$ — деяке розбиття натурального числа n, тобто $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_m = n$. У доповіді буде розглянуто оператори композиції на гільбертовому просторі H_s симетричних аналітичних функцій на ℓ_1 з ортонормованим базисом $\{P_\lambda\}$ та відтворююче ядро цього простору.

Spherical derivative and the distribution of values of meromorfic functions

Zabolotskyi Mykola Vasyljovych

Ivan Franko Lviv National University

m_zabol@franko.lviv.ua

Let $\mathcal{M}$ be the class of meromorphic functions, φ is an arbitrary function defining on $(0, +\infty)$ and satisfying to condition

$$\varliminf_{r \to +\infty} r\varphi(r) > 0.$$

Denote

$$\mathcal{M}(\varphi) = \Big\{ f \in \mathcal{M} \colon \varlimsup_{z \to \infty} \rho(f(z))/\varphi(|z|) = \infty \Big\},$$

where $\rho(f(z)) = |f'(z)|/\big(1 + |f(z)|^2\big)$ is the spherical derivative of f.

Let us call the set $E, E \in \mathbb{C}$, as Picard set for some class B of functions if for every function $f \in B$ the Picar's theorem is true in $\mathbb{C} \backslash E$. It means that equation $f(z) = a$ has the finite set of solutions in $\mathbb{C} \backslash E$ for arbitrary $a \in \overline{\mathbb{C}}$ except the set of two values.

Theorem 1 *Let $E = (a_n)$ is the sequence of numbers, $E \in \mathbb{C}$ and E has only one point of convergence at infinity. If*

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists n_0 \in \mathbb{N}) \quad (\forall n \geq n_0) \colon \quad \big\{ z \colon |z - a_n| < \varepsilon/\varphi(|a_n|) \big\} \cap E = \{a_n\},$$

then the set E is Picard set for the class of functions $\mathcal{M}(\varphi)$.

Let $T(r, f)$ be the Nevanlinna's characteristic of meromorphic function f, $m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})| d\theta$. We denote Nevanlinna's exeptional value by

$$\delta(a, f) = \varliminf_{r \to +\infty} \frac{m(r, a, f)}{T(r, f)}.$$

Теорема 2 *Let* Φ *is the* $\log$*-convex function,* $\Phi(2r) = O(\Phi(r))$, $r \to +\infty$, $f \in \mathcal{M}$, *and there exists* $a \in \overline{\mathbb{C}}$ *such that* $\delta(a, f) > 0$. *If* $T(r, f) \neq O(\Phi(r))$, $r \to +\infty$, *then* $f \in \mathcal{M}(\Phi')$.

Зв'язок теорії гіперциклічних операторів та вільних банахових просторів

Загороднюк А.В., Марцінків М.В.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

andriyzag@yahoo.com, mariadubey@gmail.com

Нехай E — нормований простір, X — метричний простір, з деякою фіксованою точкою θ, на якому можна задати норму α за формулою $\alpha(x) = \rho(\theta, x)$ для довільного елемента $x \in X$. Відомо, що існує єдиний, з точністю до ізометричного ізоморфізму, банахів простір $B(X)$, а також ізометричне вкладення $\nu : X \to B(X)$ такі, що довільне ліпшицеве відображення F з метричного простору з фіксованою точкою може бути продовжене до лінійного неперервного оператора $\widetilde{F} : B(X) \to E$, причому $\|\widetilde{F}\| = L_F$ для довільного нормованого простору E. Простір $B(X)$ називається вільним банаховим простором. Відображення F з метричного простору X в себе називається *топологічно транзитивним*, якщо існує елемент $x \in X$, такий що орбіта $Orb(F, x) = \{F^n(x) = \underbrace{F \circ \cdots \circ F}_{n}(x) \colon n \in \mathbb{N}\}$ буде щільною в X. Лінійний неперервний оператор T на просторі Фреше E в себе називається *гіперциклічним*, якщо T є топологічно транзитивним. Вектор $x \in E$ для якого $Orb(T, x)$ є щільною в E називається *гіперциклічним вектором* оператора T. Лінійний неперервний оператор $T : E \to E$ називається *циклічним*, якщо для деякого вектора $x \in E$ лінійна оболонка $spanOrb(T, x)$ є щільною в E. Зокрема, доведено наступні теореми.

Теорема 1 *Нехай* (X, θ) *— повний метричний простір з відміченою точкою* θ *і* $F : X \to X$ *є топологічно транзитивним відображенням з* $F(\theta) = \theta$. *Тоді лінійний оператор* $\widehat{F} : B(X) \to B(X)$ *буде циклічним.*

Теорема 2 *Нехай* E *– сепарабельний простір Фреше. Якщо* $T : E \to E$ *– гіперциклічний оператор, який задовольняє критерій гіперциклічності, то* $\widehat{T} : B(E) \to B(E)$ *— також гіперциклічний оператор і задовольняє критерій гіперциклічності.*

Зростання канонічних добутків Вейєрштрасса нульового роду з випадковими нулями

Захарко Ю.Б., Філевич П.В.

Львівський національний університет ветеринарної медицини та біотехнологій ім. С. З. Гжицького,
Прикарпатський національний університет ім. Василя Стефаника

yulia.zaharko@gmail.com, filevych@mail.ru

Нехай $\zeta = (\zeta_n)$ — комплексна послідовність нульового роду з показником збіжності τ, $N(r)$ — її усереднена лічильна функція, $\pi(z) = \prod \left(1 - \frac{z}{\zeta_n}\right)$ — канонічний добуток Вейєрштрасса, а $M(r)$ — максимум модуля цього добутку. Відомо [1], с. 571, що тоді виконується нерівність Валунда–Валірона

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{N(r)}{\ln M(r)} \geq C(\tau), \qquad C(\tau) := \frac{\sin \pi\tau}{\pi\tau},$$

і ця нерівність є точною. Нами доведено, що для більшості (у ймовірнісному сенсі) послідовностей ζ сталу $C(\tau)$ в нерівності Валунда–Валірона можна замінити сталою $C\left(\frac{\tau}{2}\right)$.

[1] *Гольдберг А.А., Островский И.В.* Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 590 с.

Асимптотичні розклади величин наближення функцій з класу Соболєва інтегралами Пуассона в інтегральній метриці

Харкевич Ю.І., Кальчук І.В.

Волинський національний університет імені Лесі Українки

kalchuk_i@ukr.net

Нехай L — простір 2π–періодичних сумовних на періоді функцій, де норма задана наступним чином $\|f\|_L = \|f\|_1 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt$.

Нехай $f \in L$. Величину $P_\delta(f;x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\Big\{\frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k}{\delta}} \cos kt\Big\}dt$, $\delta > 0$, називають інтегралом Пуассона функції f.

Через W_1^r позначимо множину 2π–періодичних функцій, які мають абсолютно неперервні похідні до $(r-1)$-го порядку і $\|f^{(r)}(t)\|_1 \leq 1$.

Вивчається поведінка при $\delta \to \infty$ величини

$$\mathcal{E}(W_1^r; P_\delta)_1 = \sup_{f \in W_1^r} \|f(x) - P_\delta(f; x)\|_1.$$

Теорема 1 *Якщо $r = 2l - 1$, $l \in \mathbb{N}$, то при $\delta \to \infty$ має місце повний асимптотичний розклад*

$$\mathcal{E}\left(W_1^r; P_\delta\right)_1 \cong \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{r!}\frac{1}{\delta^r}\ln\delta + \sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^r\frac{1}{\delta^k}\right),$$

де

$$\beta_k^r = \begin{cases} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}\varphi_{r-k}, & k < r, \\ \frac{1}{r!}\left(\ln 2 + \sum\limits_{i=1}^{r}\frac{1}{i}\right), & k = r, \\ \frac{(-1)^{k-1}}{k!}\sigma_{k-r}, & k > r, \end{cases}$$

$$\sigma_j = \begin{cases} 0, \; j = 2l - 1, \\ \frac{1}{2^{j-1}j!}\sum\limits_{i=1}^{j}(2i-1)^j a_i^{j+1} - \frac{2^j(j-1)!}{(2j)!}\sum\limits_{i=0}^{j-1}(-1)^i C_j^i (j-i)^{2j}, \; j = 2l, \end{cases}$$

$$a_i^j = \begin{cases} 1, & i = 1; i = j-1, \\ a_i^{j-1}(2i-1) + a_{j-i}^{j-1}\left(2\left(j-i\right)-1\right), & 1 < i < j-1, \end{cases}$$

$$\varphi_j = \begin{cases} \frac{\pi}{2}K_j, & j = 2l-1, \\ \frac{\pi}{2}\tilde{K}_j, & j = 2l, \end{cases} \qquad l \in \mathbb{N},$$

K_n і $\tilde{K}_n$ — відомі константи Ж. Фавара–Н. І. Ахієзера–М. Г. Крейна:

$$K_n = \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m(n+1)}}{(2m+1)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, ..., \; \tilde{K}_n = \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{mn}}{(2m+1)^{n+1}}, \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 2 *Якщо $r = 2l$, $l \in \mathbb{N}$, то при $\delta \to \infty$ має місце повний асимптотичний розклад*

$$\mathcal{E}\left(W_1^r; P_\delta\right)_1 \cong \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k^r\frac{1}{\delta^k},$$

де

$$\gamma_k^n = \begin{cases} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}\psi_{n-k}, & k < n, \\ \frac{(-1)^{n-1}\pi}{4n!}, & k = n, \\ \frac{(-1)^n}{k!}\tau_{k-n}, & k > n, \end{cases}$$

$$\tau_j = \begin{cases} 0, & j = 2l, \\ \frac{1}{2^j} \sum\limits_{i=1}^{j} (-1)^{i-1} a_i^{j+1}, & j = 2l-1, \end{cases}$$

$$\psi_n = \begin{cases} \frac{\pi}{4} \widetilde{K}_n, & n = 2l-1, \\ \frac{\pi}{4} K_n, & n = 2l, \end{cases} \qquad l \in \mathbb{N}.$$

Про ріст характеристичних функцій ймовірносних законів

Плацидем (Пароля) Марта Іванівна, Кінаш Орест Михайлович, Шеремета Мирослав Миколайович

Львівський національний університет імені Івана Франка

marta0691@rambler.ru

Нехай $F(x)$ - ймовірносний закон. Характеристичною функцією закону F називається функція

$$\varphi(z) = \varphi(z; F) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{izx} dF(x), \qquad z \in (-\infty, \infty).$$

Нехай φ допускає аналітичне продовження на круг $\mathbb{D}_R = \{z : |z| < R\}$, $0 < R \le +\infty$, тоді її називатимемо аналітичною в $\mathbb{D}_R$. Відомо [1, с. 37-38], що для того, щоб φ була аналітичною в $\mathbb{D}_R$, необхідно і досить, щоб для кожного $r \in [\ 0, R\ )$

$$W_F(x) =: 1 - F(x) + F(-x) = O(e^{-rx}), x \to +\infty.$$

Приймемо $M(r, \varphi) = \max\{|\varphi(z)| : |z| = r < R\}$.

В термінах узагальнених порядків та оцінок знизу встановлено зв'язок між зростанням $M(r, \varphi)$ та спаданням $W_F(x)$.

[1] *Линник Ю.В., Островський Н.В.* Разложение случайных величин и векторов.- М.:Наука-1972-479с.

Агрегаційно-ітеративні принципи декомпозиції операторних рівнянь в банахових просторах

Копач М.І., Обшта А.Ф., Шувар Б.А.

ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника",
Національний університет "Львівська політехніка"

kopachm2009@gmail.com

Методи виникли в 60-ті роки минулого століття у зв'язку зі спеціальними задачами математичної економіки. В [1] підкреслено, що ці методи не досліджені і умови їх збіжності невідомі, хоча численні приклади підтверджують, що вони часто збігаються в ситуації, коли інші методи, зокрема, звичайний метод послідовних наближень не застосовний. Для однопараметричного випадку, розглянутого в [1], для системи алгебраїчних рівнянь виду $x = Ax + B$ збіжність методу гарантує додатність елементів a_{ij} матриці A і невід'ємність компонентів b_i вектора B та нерівність $\rho(A) < 1$ для спектрального радіуса матриці A.

Запропонована авторами методика дозволяє охопити як однопараметричні, так і багатопараметричні випадки. Умови збіжності не містять, взагалі кажучи, вимог щодо знакосталості a_{ij}, b_i і можуть справджуватись як при $\rho(A) < 1$ так і при $\rho(A) \geq 1$. Ці умови можна використовувати для забезпечення числової стійкості при реалізації відповідних алгоритмів. Вони піддаються врахуванню при використанні сучасних обчислювальних засобів, а також враховують можливість адаптації, коли йдеться про потребу розпаралелення обчислювальних процесів. Крім того, запропонована методика дає можливість будувати і досліджувати нові загальніші від традиційних умови збіжності відомих ітераційних методів. Завдяки їй появляється змога будувати "синтезовані" ітераційні алгоритми, які поєднують ідеї методів ітеративного агрегування з ідеями інших ітераційних методів. Вона придатна також для того, щоб розвинути її для застосування до нелінійних рівнянь, поєднуючи ідеї ітеративного агрегування, наприклад, з ідеєю методу Ньютона і близьких до нього методів, й встановлювати умови збіжності отриманих таким способом комбінованих алгоритмів, розширюючи можливості використання висхідних методів.

[1] *Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В.* Позитивные линейные системы. – М: Наука, 1985. – 255 с.

Асимптотичне поводження коефіцієнтів Фур'є аргументу цілих функцій нульового порядку

Костюк Оксана Володимирівна

Львівський національний університет імені Івана Франка

matmod@franko.lviv.ua

Додатні, неспадні, необмежені, неперервно диференційовні на $\mathbb{R}_+$ функції будемо називати функціями зростання. Нехай L – клас функцій зростання v, для яких $\big(rv'(r)\big)/v(r) \to 0$ при $r \to +\infty$, $n(r) = n(r, 0, f)$ – лічильна функція послідовності нулів (a_j) цілої функції f розташованих у порядку неспадання їх модулів. Позначимо через $\mathcal{H}_0(L)$ клас цілих функцій f нульового порядку, $f(0) = 1$, нулі яких задовольняють умову

$$\exists v \in L \quad \exists A > 0 \quad \forall r > 0: \quad n(r) \le Av(r).$$

Через $a_k(r), k \in \mathbb{Z}$, позначимо коефіцієнти Фур'є аргументу цілої функції f, тобто

$$a_k(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \arg f(re^{i\varphi})e^{-ik\varphi}d\varphi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Нехай a_j– нулі цілої функції f, $\alpha_j = \arg a_j$, $0 \le \alpha_j < 2\pi$. Покладемо

$$n_k(r) = \sum_{|a_j| \le r} e^{-ik\alpha_j}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Теорема 1 *Нехай $f \in \mathcal{H}_0(L)$ і для деяких $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ існують границі*

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{n_k(r)}{v(r)} = \delta_k.$$

Тоді для цих k

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{a_k(r)}{v(r)} = i\frac{\delta_k}{k}.$$

Теорема 2 *Нехай $f \in \mathcal{H}_0(L)$. Тоді*

$$\exists B > 0 \quad \exists r_0 > 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \quad \forall r \ge r_0: \quad |a_k(r)| \le \frac{B}{|k|}v(r).$$

Про зростання цілих характеристичних функцій ймовірносних законів

Кулявець Любов Володимирівна, Шеремета Мирослав Миколайович

Львівський національний університет імені Івана Франка

ljubasik26@gmail.com

Нехай (λ_k) - зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел, а

$$F(s) = \sum_{k=o}^{\infty} a_k exp\{s\lambda_k\}, s = \sigma + it, \qquad (1)$$

- цілий ряд Діріхле. Приймемо $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in R\}$.

Для ряду (1) у термінах модифікованих узагальнених порядків встановлено зв'язок між зростанням $M(\sigma) = \sup\{|F(\sigma+it)| : t \in \mathbb{R}\}$ і спаданням a_n.

Отримані результати застосовано до вивчення зростання цілих характеристичних функцій ймовірносних законів.

Мультиплікативні поліноміальні відображення на комутативних банахових алгебрах

Лабачук Оксана Василівна

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

olabachuk@gmail.com

У доповіді буде розглянуто мультиплікативні поліноміальні відображення на комутативних алгебрах. Зокрема, буде досліджено питання про існування нетривіального мультиплікативного полінома на комутативній алгебрі. Тривіальним будемо називати мультиплікативний поліном, що розкладається в добуток характерів.

Також ми доведем, що всі мультиплікативні поліноміальні функціонали степеня n на алгебрах поліномів $P(\mathbb{C})$ від однієї змінної та $P(\mathbb{C}^2)$ від двох змінних будуть тривіальними.

Про один клас систем рівнянь колмогоровського типу з одновимірними групами виродження

Буртняк Іван Володимирович, Малицька Ганна Петрівна

Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника

bvanya@meta.ua

Розглядаємо систему рівнянь

$$\partial_t u_\nu(t,x) - \sum_{j=1}^{n_0-1} x_j \partial_{x_{j+1}} u_\nu(t,x) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{k=0}^{2} a_k^{r\nu}(t) \partial_{x_1}^k u_r(t,x). \tag{1}$$

$\nu = 1, ..., n, n_0 > 1, n \in N, 0 \leq \tau < t \leq T,$

$$u_\nu(t,x)|_{t=\tau} = u_{\nu_0}(x), x \in R^{n_0}, \tag{2}$$

де $\partial_t w_\nu(t,x) = \sum\limits_{k=0}^{2} \sum\limits_{r=1}^{n} a_k^{r\nu}(t) \partial_{x_1}^k w_r(t,x)$, рівномірно параболічна система в сенсі Петровського для $\forall t \in [0,T]$, $a_k^{r\nu}(t)$- комплекснозначні функції, неперервні для $\forall t \in [0,T]$, $u_{\nu 0}(x)$- достатньо гладкі фінітні функції.

Теорема 1 *Існує матриця Гріна задачі (1),(2).*

$G(t,x;\tau,\xi) = (t-\tau)^{-\frac{n_0^2}{2}} \Omega(t,\tau;(x_1-\xi_1)(t-\tau)^{-1/2}, (x_2-\xi_2+x_1(t-\tau)^{-3/2}, ..., (x_{n_0} - \xi_{n_0} + x_{n_0-1}(t-\tau) + ... + x_1(t-\tau)^{n_0-1}((n_0-1)!)^{-1}(t-\tau)^{-\frac{2n_0-1}{2}})$

$\Omega(t,\tau; z_1, ..., z_{n_0})$- *ціла функція аргументів* $z_1, ..., z_{n_0}$, *порядку росту 2 при комплексних значеннях аргументів і такого ж порядку спадання при дійсних значеннях. Для її похідних правильні оцінки* $|D_x^m G(t,\tau; x+iy;\tau,\xi)| \leq C_m(t-\tau)^{-(n_0^2+\sum\limits_{j=1}^{n_0} m_j(2j-1))/2} \exp\{-c_0 \sum\limits_{j=1}^{n_0} [|x_j - \xi_j + \sum\limits_{l=1}^{j-1} x_{j-l}(t-\tau)^l (l!)^{-1}|^2 (t-\tau)^{-(2j-1)} + c_j|y_j|^2(t-\tau)^{-(2j-1)}]\}, y \in R^{n_0}$, $|m| = |m_1| + ... + |m_{n_0}|. c_0 > 0, C_m > 0, c_j > 0, t > \tau$, *де сталі залежать від* $\sup|a_k^{r\nu}(t)|$, *характеру неперервності* $a_2^{r\nu}(t)$, *сталої параболічності* δ.

[1] *Малицька Г.П.* Про структуру фундаментального розв'язку задачі Коші для еліптично-параболічних рівнянь, що узагальнюють рівняння дифузії з інерцією// Вісн.нац.у-ту "Львівська політехніка.2000. №411-С 221-228.

Функціональне числення в класі гіперфункцій з компактними носіями для генераторів C_0-напівгруп операторів

Патра Марія Ігорівна

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

patra-m@mail.ru

Гіперфункції на відкритій множині $\Omega \in \mathbb{R}$ визначають як елементи факторпростору $\mathcal{B}(\Omega) := \mathcal{O}(V \setminus \Omega)/\mathcal{O}(V)$, де V — комплексний окіл Ω, а $\mathcal{O}(V)$ і $\mathcal{O}(V \setminus \Omega)$ — векторні простори всіх голоморфних функцій на V і $V \setminus \Omega$ відповідно. Гіперфункцію $f \in \mathcal{B}(\Omega)$ розуміють як різницю граничних значень $f(x) = F(x+i0) - F(x-i0)$ деякої голоморфної функції $F \in \mathcal{O}(V \setminus \Omega)$. Відомо [1], [2], що простір гіперфункцій з компактними носіями $\mathcal{B}_C(\Omega)$ з точністю до топологічного ізоморфізму є спряженим до простору $\mathcal{A}(\Omega)$ всіх дійсних аналітичних функцій. При цьому канонічний білінійний функціонал задають формулою $\langle f, \varphi \rangle = -\oint\limits_{\Gamma} F(z)\varphi(z)dz$, де Γ — замкнутий контур в перетині областей визначення аналітичного продовження φ і області визначення F, який оточує носій f один раз в додатньому напрямку.

Для побудови аналогу функціонального числення, розвинутого в [3], ми використовуємо гіперфункції з компактними носіями в $[0, +\infty)$. Нехай $\mathcal{B}_{[0,+\infty)}(\Omega)$ — простір таких гіперфункцій. Визначимо операцію кроскореляції гіперфункції $f \in \mathcal{B}_{[0,+\infty)}(\Omega)$ і дійсної аналітичної функції $\varphi \in \mathcal{A}(\Omega)$ за формулою $(f \star \varphi)(t) := \langle f, \varphi(\cdot + t) \rangle$.

Нехай $D(A) = \left\{ \hat{x}_A : \hat{x}_A = \int\limits_0^{+\infty} e^{-tA} x(t)dt \right\}$ — підпростір в банаховому просторі E, де A — генератор (C_0)-напівгрупи $\{e^{-tA}\}_{t \geq 0}$ операторів, що діють в E, $x(t)$ — векторнозначна функція вигляду $x(t) : 0 \leq t \mapsto x\varphi(t) \in E$, $\varphi \in \mathcal{A}(\Omega)$, $x \in E$. Визначимо оператор $f(A) : D(A) \ni \hat{x}_A \mapsto f(A)\hat{x}_A = \int\limits_0^{+\infty} e^{-tA} x(f \star \varphi)(t)dt \in D(A)$. При цьому відображення $\Phi_A : f \mapsto f(A)$ є алгебраїчним гомоморфізмом зі згорткової алгебри $B_{[0,+\infty)}(\Omega)$ в алгебру лінійних неперервних операторів над $D(A)$.

[1] *Sato M.* Theory of hyperfunctions, I, II // J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, **8** (1959), 139–193, 387–437.

[2] *Komatsu H.* An Introduction to the Theory of Generalized Functions. Department of Mathematics Science University of Tokyo, 2000, 185 p.

[3] *Lopushansky O. V., Sharyn S. V.* Operator calculus for convolution algebra of Schwartz distribution on semiaxis // Mat. Stud. — 1997. — V.7, №1. — C. 61–72.

Наближення функцій з класу H_ω інтегралами Вейєрштраса в рівномірній метриці

Приймас Іванна Петрівна, Степанюк Тетяна Анатоліївна, Харкевич Юрій Іліодорович

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки

tania_stepaniuk@ukr.net

Розглянемо крайову задачу (в одиничному крузі) для рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0. \tag{1}$$

Розв'язок рівняння (1), що задовольняє крайову умову

$$u\,(\rho, x)\,\Big|_{\rho=1} = f(x), \quad -\pi \le x \le \pi,$$

де $f(x)$ — сумовна 2π-періодична функція, можемо записати у вигляді

$$W_\rho(f;x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\Big\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\rho^{k^2}\cos kt\Big\}dt, \quad 0 \le \rho < 1. \tag{2}$$

Величину (2) прийнято називати інтегралом Вейєрштрасса функції f. Поклавши $\rho = e^{-\frac{1}{\delta}}$, інтеграл Вейєрштрасса запишемо у вигляді

$$W_\delta(f;x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\Big\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2}{\delta}}\cos kt\Big\}dt, \quad \delta > 0.$$

Нехай далі C — простір 2π–періодичних неперервних функцій, у якому норма задається за допомогою рівності $\|f\|_C = \max\limits_t |f(t)|$.

Нехай $\omega(t)$ — довільний фіксований модуль неперервності. Кажуть, що функція $f(x) \in C$ належить до класу H_ω, якщо $\omega(f,t) \le \omega(t)$, або ж які б не були точки $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, справедлива нерівність

$$|f(t_1) - f(t_2)| \le \omega\left(|t_1 - t_2|\right).$$

Метою даної роботи є вивчення асимптотичної поведінки величин

$$\mathcal{E}\left(H_\omega; W_\delta(f;x)\right)_C = \sup_{f\in H_\omega} \|f(x) - W_\delta(f;x))\|_C .$$

Якщо в явному вигляді знайдена функція $\varphi(\delta) = \varphi(H_\omega; W_\delta; \delta)$, така, що при $\delta \to \infty$

$$\mathcal{E}(H_\omega; W_\delta)_C = \varphi(\delta) + o(\varphi(\delta)),$$

то кажуть, що розв'язана задача Колмогорова–Нікольського (див., наприклад, [1, с.8]) для даного оператора $W_\delta(f;x)$ на класі H_ω в рівномірній метриці.

Має місце наступна теорема.

Теорема 1 *Для довільного фіксованого модуля неперервності $\omega(t)$ має місце рівність*

$$\mathcal{E}\left(H_\omega; W_\delta\right)_C = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \omega(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2}{\delta}}\cos kt\right)dt,\ \ \delta > 0.$$

[1] *Степанец. А.И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. // — К: Наук. Думка, 1981. — 340 с.

Dressing of the multicomponent generalizations for the Recursion Lax operators

Sydorenko Yuriy

Ivan Franko National University of Lviv

y_sydorenko@franko.lviv.ua

We investigate the Recursion Lax representations [1] for nonlinear integrable models. In particular, we consider the Korteweg-de Vries, modified Korteweg-de Vries and nonlinear Schroedinger equations:

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x, \quad v_t = v_{xxx} \pm 6v^2 v_x, iq_t = q_{xx} \pm |q|^2 q. \tag{1}$$

(1) Dressing of the corresponding Recursion Lax pairs is based on the Zakharov-Shabat method [2] and the integral Darboux-type transformations [3], [4]. Multicomponent generalizations of equations (1) and some other are also investigated in [5]. In our report we consider different vector generalizations of nonlinear Schrodinger-type equations [6,7] (namely, the modified nonlinear Schrodinger equation, Chen-Lee-Liu and Gerdjikov-Ivanov equations). We also propose a method of integration of the corresponding models, which is based on the invariant transformations of the linear integro-differential expressions.

[1] B. Konopelchenko, J. Sidorenko, W. Strampp, Phys. Lett. A, **157**, 17 (1991).

[2] J. Sidorenko, W. Strampp, J. Math. Phys. **34** (4), 1429 (1993)

[3] V.E. Zakharov, A.B. Shabat, Funct. Anal. Appl. 8 (3), 43 (1974); 13 (3), 13 (1979)

[4] V.A. Marchenko, *Nonlinear equations and operator algebras.* Dordrecht, Boston, Lancaster, Tokyo, Reidel, 1988.

[5] V.B. Matveev, M.A. Salle, *Darboux transformations and solitons.*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1991.

[6] Yu.M. Sydorenko, O.I. Chvartatskyi, Visnyk Lviv Univ. Ser. Mech. Math. **74**, 181 (2011). (in Ukrainian)

[7] V. S. Gerdjikov. On Soliton Equations and Soliton Interactions // XIIIth International Conference "Geometry, Integrability and Quantization 8-13 June 2012, Varna. - Bulgarian Academy of Sciences.

Алгебри блочно-діагональних аналітичних функцій на банахових просторах

Тарас Олена Геннадіївна

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

elena_taras@ukr.net

В доповіді розглядається банаховий простір X з топологічним базисом над полем $\mathbb{C}$, $H_b(X)$–алгебра аналітичних функцій обмеженого типу на X, $M_b(X)$ – множина характерів алгебри $H_b(X)$. Позначимо $\mathcal{N}_m = \bigcup_{k_1 \neq \ldots \neq k_m} \operatorname{span}(e_{k_1}, \ldots, e_{k_m}), m \geq 1$ – сім'я підмножин в X. Відповідно $H_b(\mathcal{N}_m)$ – алгебра звужень функцій з $H_b(X)$ на $\mathcal{N}_m$, $M_b(\mathcal{N}_m)$ – множина характерів. Оператор звуження $T_m : H_b(X) \to H_b(\mathcal{N}_m)$ є гомоморфізмом.

Нехай $\varphi \in M_b(\mathcal{N}_m)$, тоді φ можна продовжити до характера $\widetilde{\varphi}$ на $H_b(X)$ за формулою: $\widetilde{\varphi} = \varphi \circ T_m$. Таким чином, в окремих випадках вивчення спектру алгебри $H_b(X)$ можна звести до вивчення вужчої множини – спектру алгебри $H_b(\mathcal{N}_m)$ і спробувати узагальнити отримані результати на $H_b(X)$. Спектр алгебри $H_b(X)$ досліджувався, зокрема в [1],[2].

Твердження 1 *Простір поліномів $P(^m\mathcal{N}_m)$ ізоморфний до простору поліномів $P(^mX), \mathcal{N}_m \subset X$. Але, зауважимо, якщо $n \neq m$, то $P(^n\mathcal{N}_m)$ не є ізоморфним до $P(^mX)$.*

Теорема 1 *Для кожного характера $\psi \in M_b(X)$ існує послідовність $\varphi_m \in M_b(\mathcal{N}_m)$ така, що послідовність продовжень $\widetilde{\varphi}_m \in M_b(X)$ збігається до ψ в слабко поліноміальній топології. Тобто, $\varphi_m(P) \to \psi(P)$ при $m \to \infty$ для кожного полінома $P \in H_b(X)$.*

Питання, чи буде виконуватись дана теорема для довільної аналітичної функцій $f \in H_b(X)$ є відкритим, оскільки не відомо, чи залишок $||\psi(f) - \tilde{\varphi}_m(f)||$ буде прямувати до нуля в топології Гельфанта.

[1] *Zagorodnyuk A.*Spectra of Algebra of Entire Functions on Banach Spaces // Proceedings Of The American Mathematical Society. – 2006. – **2559**. – С. 15–22.

[2] *Zagorodnyuk A.*Spectra of Algebras of Analytic Functions and Polynomials on Banach Spaces // Contemporary Math. - 2007. - 435. - p. 381-194.

Про одну крайову задачу для диференціально-операторного рівняння другого порядку

Федак І.В.

ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника"

Fedak-ivan@rambler.ru

Розглянемо рівняння

$$(A+E)y''(t) + Ay(t) = f(t), t \in [a,b], \qquad (1)$$

де A — самоспряжений напівобмежений знизу оператор у гільбертовому просторі H, E — тотожний у H оператор.

У випадку $H = L_2(X)$ та A — самоспряженого розширення лінійного оператора, породженого виразом $-\frac{d^2}{dx^2}$ рівняння (1) описує коливання ідеальної стратифікованої рідини.

Зокрема крайові умови

$$y(a) = y(b) = 0. \qquad (1)$$

Розв'язком задачі (1)–(2) називають двічі неперервно диференційовну в H, $t \in [a,b]$, вектор-функцію $y(t)$, для якої визначені та неперервні на $[a,b]$ вектор-функції $Ay(t), Ay''(t)$, і яка задовольняє рівняння (1) та крайові умови (2).

Теорема 1 *Якщо*

$$\sigma(A)\bigcap(\{-1\}\bigcup\{\frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2-n^2\pi^2}, n \in \mathbb{N}\}) = \emptyset,$$

то для довільної сильно неперервної в H функції $f(t)$ задача (1)–(2) має єдиний розв'язок.

Отримано явне представлення точного розв'язку.

Dressing of the integro-differential Lax representations for the multicomponent integrable systems

CHVARTATSKYI OLEKSANDR

Ivan Franko National University of Lviv

alex.chvartatskyy@gmail.com

We consider some multicomponent integrable equations of mathematical physics that admit integro-differential Lax representations (in particular representations with Recursion Operators [1, 2]) and their integration. In particular, we consider the system:

$$\begin{cases} \mathbf{q}_t = \mathbf{q}_{xxx} - 3\mathbf{q}_x \mathcal{M}_0 \mathbf{q}^\top \mathbf{q}_x + 3u\mathbf{q}_x \\ u_t = u_{xxx} - 3(u\mathbf{q}_x \mathcal{M}_0 \mathbf{q}^\top)_x + 6uu_x, \end{cases} \tag{1}$$

where $u = u(x,t)$ is scalar function, $\mathbf{q} = \mathbf{q}(x,t) = (q_1, \dots q_l)$ is $(1 \times l)$ vector-function, $\mathcal{M}_0$ is constant Hemritian matrix. In case $\mathbf{q} = 0$ system (1) reduces to KdV equation, in case $u = 0$ we obtain vector generalization of mKdV equation. Our approach to integration of the models with integro-differential representations is based on Zakharov-Shabat dressing method and Darboux-type integral transformations [4, 5, 6].

[1] *V. S. Gerdjikov, G. Vilasi, A. B. Yanovski.* Integrable Hamiltonian Hierarchies. - Lectures Notes in Physics 748, Berlin Sprinter Verlag - 2008. - 643 p.

[2] *Berkela Yu., Sydorenko Yu.* Vetor and matrix generalization of bi-hamiltonian dynamical systems and its integration // Matematychni Studii.(23) 2005 31-51

[3] *V.E. Zakharov, A.B. Shabat.* A scheme for integrating the nonlinear equations of mathematical physics by the method of the inverse scattering problem. I, Funct. Anal. Appl., 8(3), 226-235, 1974.

[4] *Matveev V. B., Salle M.A.* Darboux transformations and solitons.- Berlin Heidelberg, Springer-Verlag. – 1991. – 120 p.

[5] *Berkela Yu.,Sydorenko Yu.* Darboux-type theorems and transformation operators for nonlocal reduced Kadomtsev-Petviashvili hierarchy (Hk-cKP)// Matematychni Studii.(25) 2006 38-64

[6] *Yu.M. Sydorenko, O.I. Chvartatskyi* Integration of scalar Kadomtsev-Petviahvili hierarchy by the method of Darboux-type transformations// Visnyk Lviv Univ. Ser. Mech. Math. **74**, 181 (2011).

Операторне числення для аналітичних напівгруп операторів

Шарин Сергій Володимирович

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

sharynsir@yahoo.com

Ми будуємо операторне числення $\varPhi\colon \widehat{f} \longmapsto \widehat{f}(A)$ для генераторів $A = (A_1, \ldots, A_n)$ n-параметричних обмежених аналітичних напівгруп $e^{\mathrm{i}tA} := e^{\mathrm{i}t_1A_1+\cdots+\mathrm{i}t_nA_n}$ операторів, що діють в банаховому просторі E. Алгебра $\widehat{\mathcal{S}'_+}$ символів такого числення складається з аналітичних в трубчастій області $\mathbb{C}^n_+ = \left\{\zeta = \xi + \mathrm{i}\eta \in \mathbb{C}^n\colon \xi \in \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+\right\}$ функцій $\widehat{f}$, які є перетвореннями Лапласа розподілів Шварца повільного росту $f \in \mathcal{S}'_+$ з носіями в конусі $\mathbb{R}^n_+$. При цьому областю визначення числення є щільний в E підпростір $\mathfrak{A}$ цілих аналітичних векторів поліноміального росту оператора A.

Нехай $\mathfrak{D}(A^\infty) := \bigcap_{\alpha\in\mathbb{Z}^n_+} \mathfrak{D}(A^\alpha)$, де $\mathfrak{D}(A^\alpha)$ — область визначення оператора $A^\alpha := A_1^{\alpha_1} \ldots A_n^{\alpha_n}$. Визначимо в $\mathfrak{D}(A^\infty)$ підпростір $\mathfrak{A}$ цілих аналітичних векторів поліноміального росту

$$\mathfrak{A} := \bigcap_{t,\,\alpha} E^\alpha_t, \quad \text{де} \quad E^\alpha_t := \left\{(tA)^\alpha e^{\mathrm{i}tA}x \in E\colon x \in E, t \in \mathbb{R}^n_+,\, \alpha \in \mathbb{Z}^n_+\right\}.$$

Теорема 1 *Нехай $e^{\mathrm{i}tA}$ — обмежена аналітична напівгрупа над комплексним банаховим простором E така, що кожен оператор A_j, $j = 1, \ldots, n$, має обмежений обернений A_j^{-1}. Тоді простір $\mathfrak{A}$ цілих аналітичних векторів поліноміального росту щільний в E.*

Теорема 2 *Відображення $\varPhi\colon \widehat{\mathcal{S}'_+} \ni \widehat{f} \longmapsto \widehat{f}(A) \in L(\mathfrak{A}, E)$, де оператор $\widehat{f}(A)$ визначений за формулою*

$$\widehat{f}(A)x = \left\langle f(t), e^{\mathrm{i}tA}x\right\rangle, \qquad f \in \mathcal{S}'_+, \quad x \in \mathfrak{A},$$

є неперервним гомоморфізмом з мультиплікативної алгебри аналітичних функцій $\widehat{\mathcal{S}'_+}$ на комутант в $L(\mathfrak{A}, E)$ обмеженої напівгрупи $e^{\mathrm{i}tA}$. Оператори з образу $\varPhi\big[\widehat{\mathcal{S}'_+}\big]$ задовольняють рівності $\widehat{f * g}(A) = \widehat{f}(A) \circ \widehat{g}(A)$; $\widehat{\partial^\alpha f}(A) = (-A)^\alpha \circ \widehat{f}(A)$, $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$ і $\widehat{\delta}(A) = I$ — одиничний оператор над $\mathfrak{A}$.

Доповідь базується на спільних дослідженнях [1] з проф. Лопушанським О.В.

[1] Лопушанський О.В., Шарин С.В. Функціональне числення для генераторів аналітичних напівгруп операторів // Карпат. мат. публ. —2012. — Т 4, №1. — С. 82–88.

Повна асимптотика верхніх меж відхилень спряжених періодичних функцій від їх спряженого інтегралу Пуассона

Швай К.В., Жернова Т.М.

Волинський національний університет імені Лесі Українки
kalchuk_i@ukr.net

Нехай L — простір 2π–періодичних сумовних на періоді функцій $f(t)$ з нормою $\|f\|_L = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\, dt$, C — простір неперервних 2π–періодичних функцій $f(t)$, в якому норма задається формулою $\|f\|_C = \max\limits_t |f(t)|$.

Нехай $f \in L$. Величину

$$P_\rho(f;x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K_\rho(t)dt$$

називають інтегралом Пуассона функції f, де

$$K_\rho(t) = \frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos t+\rho^2}, \quad 0 \le \rho < 1,$$

— ядро інтегралу Пуассона.

Множину функцій $f \in C$, які задовольняють умову

$$|f(x+h) - f(x)| \le |h|,$$

будемо позначати, як загально прийнято, через $Lip_1 1$ і називати класом Ліпшиця.

Відомо (див., наприклад, [1]), що функція

$$\overline{f}(x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi} (f(x+t) - f(x-t)) \operatorname{ctg}\frac{t}{2} dt$$

спряжена до функції $f(x)$, а

$$\overline{P}_\rho(f;x) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} (f(x+t) - f(x-t))\frac{\rho\sin t}{1-2\rho\cos t+\rho^2}dt,$$

відповідно, спряжений інтеграл Пуассона.

Позначимо

$$\mathcal{E}(Lip_1 1; \overline{P}_\rho)_C = \sup_{f \in Lip_1 1} \|\overline{f}(\cdot) - \overline{P}_\rho(f; \cdot)\|_C.$$

В роботі знайдено повний асимптотичний розклад величин $\mathcal{E}(Lip_1 1; \overline{P}_\rho)_C$, що дозволяє виписувати константи Колмогорова–Нікольського як завгодно високого порядку малості.

Теорема 1 *При $\rho \to 1-0$ має місце асимптотичний розклад*

$$\mathcal{E}(Lip_1 1; \overline{P}_\rho)_C = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-\rho)^k}{k 2^{k-1}} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(1-\rho)^{2m+s}}{2^{2m+s}} \cdot \frac{\Gamma(2m+s)}{\Gamma(2m)} \alpha_m,$$

де

$$\alpha_m = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{m+k+1}}{2m-2k+1} + 1.$$

[1] *Sz.–Nagy B.* Sur l'ordre de l'approximation d'une fonction par son integrale de Poisson // Acta Math. Acad. Sci Hungar. — 1950. — **1**. — P. 183–188.

Колективне експертне оцінювання у випадковому середовищі

Звізло Максим Романович

Львівський національний університет імені Івана Франка

zvmax@i.ua

Для моделі колективної експертної оцінки з великою кількістю експертів розглянуто метод в якому вводяться коефіцієнти довіри до експертів, у вигляді випадкового процесу.

Розглянуто модель колективної експертної оцінки з кількістю експертів з рівнем довіри $P_i \in (0,1)$ для експерта E_i,$i = 1, ..., n$ даної експертної групи. Введено R_i – ранжуваня альтернатив $i-$м експертом та N_k^i–ранг альтернативи a_k, $k = 1, ..., m$ в ранжуванні альтернативи $i-$м експертом. Даний метод задовольняє вимогам побудову групового вибору. Умова відсутності "диктатора"серед експертів та деякі з умов Ероу досягають при накладанні умов зокрема і на P_i $i = 1, ..., n$, також для ранжування виконується умова Парето $\bigcap_{i=1}^{m} R_i \subseteq R \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} R_i$.

Всі можливі результати прийняття рішення, щодо певної проблеми, утворюють повну групу подій $(A_1, ..., A_n)$, і для кожного стану визначається рівень довіри до експертів. При введенні коефіцієнтів довіри до експертів, результати експертної оцінки значно відрізняються від класичних. Подання коефіцієнтів довіри у вигляді процесу дозволяють краще оцінити результати групової оцінки.

Розглянуто методи побудови групових ранжувань у випадковому середовищі, а саме ситуація опису середовища, в якому прийняття рішення, представлено за допомогою ланцюгів маркова чи напівмарківського процесу. Для кожної з альтернатив отримано середньо-часовий ранг та значення можливих ризиків. Відповідно побудовано середньо часове групове впорядкування альтернатив для середовища, зміна станів якого описується напівмарківським процесом.

[1] *Бешелев С.Д.* Математико-статистические методы экспертных оценок.–2-е изд. перераб. и доп./С.Д. Бешелев, Ф.Г. Гуревич–М.:Статистикаб1980.–263с.

[2] *Скороход А.В.* Елементи теорії ймовірностей та теорії випадкових процесів / А.В. Скороход–К.:Вища школа, 1975.– 292с.

[3] *Єлейко Я.І.* Колективне експертне оцінювання/Я.І. Єлейко, Р.В. Заболотний// International Conferense Problems of Decisiom Making under Uncertainianties,PDMU-2012, April 23-27,Mukachevo,2012- P.103-104.

Граничні теореми для однієї послідовності дифузійних процесів

Осипчук М. М.

ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника"

myosyp@gmail.com

В доповіді розглядатиметься послідовність дифузійних процесів $(\xi_n(t))_{t\geq 0}$, $n = 1, 2, \ldots$ на дійсній осі $\mathbb{R}$ з коефіцієнтами переносу $a_n(x) = na(nx)$ та дифузії $b_n(x) = b(nx)$ при заданих функціях $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ та $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$. Вивчається питання існування та вид граничного розподілу кількості перетинів нульового рівня послідовністю випадкових величин $\xi_n(0)$, $\xi_n(1/m)$,..., $\xi_n(N/m)$ при прямуванні до нескінченності натуральних n, m і N деяким узгодженим чином. На відміну від роботи [1] (див. також [2]) розглядається випадок різних властивостей $a(x)$ та $b(x)$ на $+\infty$ та на $-\infty$. Встановлено також характеристики граничного процесу.

Розглянемо функції

$$A(x)=\int_0^x \frac{a(y)}{b(y)}dy, \quad F(x)=\int_0^x e^{-2A(y)}dy, \quad H(x)=\int_0^x e^{2A(y)}\frac{dy}{b(y)}.$$

Нехай існують скінченні границі

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\gamma x}F(\gamma x)=\begin{cases}\varkappa_F^-, \gamma<0;\\ \varkappa_F^+, \gamma>0,\end{cases} \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\gamma x}H(\gamma x)=\begin{cases}\varkappa_H^-, \gamma<0;\\ \varkappa_H^+, \gamma>0.\end{cases}$$

Позначимо $\varkappa^-=\varkappa_F^-\varkappa_H^-$, $\varkappa^+=\varkappa_F^+\varkappa_H^+$.

Теорема 1 *Нехай функції $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ та $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ мають неперервні обмежені похідні, $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} b(x)>0$ та функція $(A(x))_{x\in\mathbb{R}}$ обмежена. Тоді послідовність дифузійних процесів $(\xi_n(t))_{t\geq 0}$, $n=1,2,\ldots$ слабко збігається до узагальненого дифузійного процесу з переносом $\frac{3}{4}\left(\frac{1}{\varkappa^-}-\frac{1}{\varkappa^+}\right)\delta(x)$ та дифузією рівною $\frac{1}{\varkappa^-}$ при $x<0$, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varkappa^-}+\frac{1}{\varkappa^+}\right)$ при $x=0$ та $\frac{1}{\varkappa^+}$ при $x>0$.*

[1] *Хайсам Аль Фарах, Микола Портенко. Гранична теорема для кількості перетинів фіксованого рівня слабко збіжною послідовністю дифузійних процесів / – Київ, 2007. – 24 с. (Препр. / НАН України. Ін-т математики; 2007.6)*

[2] *Осипчук М.М. Про граничний розподіл кількості перетинів послідовності рівнів деякою послідовністю дифузійних процесів // Карпатські математичні публікації. – 2009. Т. 1, № 2. – С. 191 – 196*

Адитивні функціонали від потоку Арратья

Чернега Павло Петрович

Інститут Математики НАНУ

pasha_ch@i.ua

В доповіді розглядається потік Арратья.

Означення 1 *[1] Потік Арратья - випадковий процес $\{x(u),\ u\in\mathbb{R}\}$, заданий на ймовірнісному просторі $(\Omega,\Im,P)$ зі значеннями в просторі $C([0;1])$ з наступними влястивостями:*

$$\forall u_1\leq u_2\leq\ldots\leq u_n:$$

1. *$x(u_k,\cdot)$- стандартний вінерівський процес, стартуючий з точки u_k.*

2. $\forall t \in [0;1] : x(u_1, t) \le ... \le x(u_n, t)$.

3. розподіл $(x(u_1, \cdot), ..., x(u_n, \cdot))$ *співпадає з розподілом стандартного n-мірного вінерівського процесу, який стартує з* $(u_1, ..., u_n)$ *на множині* $\{f \in C([0;1], \mathbb{R}^n) : f_k(0) = u_k,\ k = \overline{1,n},\ f_1(t) < ... < f_n(t),\ t \in [0;1]\}$.

Побудуємо адитивний функціонал від потоку Арратья [2] за допомогою сумування адитивних функціоналів від двухточкових процесів потоку Арратья:

$$\Phi_t^{(2)} := \lim_{m\to\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int\limits_0^{t\wedge\tau(u_k^m)} f(x(u_k^m, s) - x(u_{k-1}^m, s))g(x(u_k^m, s))ds, \qquad (1)$$

де

$$\tau(u_k^m) = \inf\{s : x(u_k^m, s) = x(u_{k-1}^m, s)\},$$

f - незростаюча, обмежена, невід'ємна, g - невід'ємна інтегровна функції.

Теорема 2 *Границя в (1) існує м. н. і визначає скінченний з ймовірністю одиниця функціонал.*

Теорема 3 *Справедлива наступна оцінка*

$$\sup_{m>0} M \sum_{k\in\mathbb{Z}} \nu^{u_k^m}_{[s\vee\sigma(u_k^m);\tau(u_k^m)]} < \infty$$

де $\nu^{u_k^m}_{[s;\tau(u_k^m)]}$ *- число перетинів зверху вниз полоси* $[0;\delta]$ *на інтервалі часу* $[s;\tau(u_k^m)]$, s *- деяке фіксоване число,* $0 < s < 1$. *При цьому у випадку* $s \vee \sigma(u_k^m) \ge \tau(u_k^m)$ *вважаємо* $\nu^{u_k^m}_{[s;\tau(u_k^m)]} = 0$.

Введемо наступне позначення

$$\nu^{Arr}_{m,[s;t\wedge\tau]} := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widetilde{\nu}^{u_k^m}_{[s;t\wedge\tau(u_k^m)]}$$

Випадкову величину $\nu^{Arr}_{m,[s;t\wedge\tau]}$ будемо називати сумарним числом перетинів полоси $[0;\delta]$ зверзу вниз потоком Арратья до моментів склейки, пов'язаним з розбиттям $\{u_k^m,\ k \in \mathbb{Z}\},\ m \in \mathbb{N}$.

Справедливий аналогічний теоремі Леві [3] про перетини полоси результат для потоку Арратья.

Теорема 4 *Для довільного* $m \in \mathbb{N}$ *справедливе граничне співвідношення:*

$$\lim_{\delta\searrow 0+} \delta\nu^{Arr}_{m,[s;t\wedge\tau]} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int\limits_s^{t\wedge\tau(u_k^m)} \delta_0(x(u_k^m, r))dr$$

[1] А.А. Дороговцев. Мерозначные процессы и стохастические потоки.-Киев.: Ин-т математики НАН Украины, 2007.-289с.

[2] А.А. Дороговцев. Некоторые замечания о винеровском потоке со склеиванием. Укр. мат. журн., 2005, т. 57, № 10, 1327-1333.

[3] Y. Kasahara. On Levy′s Downcrossing Theorem. Proc. Japan Acad, 56, Ser. A, 1980.

Задача Коші для еволюційних рівнянь з оператором Бесселя нескінченного порядку

Дрінь Світлана Сергіївна

Національний університет "Києво-Могилянська академія"

svitlana.drin@gmail.com

Розвивається теорія задачі Коші для еволюційних рівнянь вигляду

$$\partial u/\partial t = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(t) B_\nu^k u, t \in (0, T], x \in \mathbb{R}_+, c_k \in C^1(0, T], k \in \mathbb{Z}_+ \qquad (1)$$

($B_\nu := d^2/dx^2 + (2\nu+1)x^{-1}d/dx$, $\nu > -1/2$ – оператор Бесселя), які є природним узагальненням B-параболічних рівнянь. Знайдено необхідні і достатні умови, при виконанні яких оператор Бесселя нескінченного порядку – оператор $L(t, B_\nu) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(t) B_\nu^k$ – визначений і неперервний у просторах типу C, введених в [1] (такі простори є узагальненнями просторів типу W, що використовуються при дослідженні проблеми про класи єдиності та коректності задачі Коші для рівнянь з частинними похідними зі сталими або залежними лише від часу коефіцієнтами); елементами просторів типу C є цілі функції, які на дійсній вісі спадають швидше за $\exp\{-a|x|\}$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Початкова функція f як початкова умова $u(t, \cdot)|_{t=0}$ для (1) береться з простору C' – простору, топологічно спряженого до C; C' складається з узагальнених функцій нескінченного порядку (аналітичних функціоналів). Умова $u(t, \cdot)|_{t=0} = f$ розуміється в тому сенсі, що $u(t, \cdot) \to f$ при $t \to +0$ в C'. Встановлено коректну розв'язність задачі Коші для (1); знайдено зображення розв'язку $u(t, x)$ у вигляді згортки $f * G(t, x)$, де $G(t, \cdot)$ – фундаментальний розв'язок задачі Коші для (1), при цьому досліджені властивості функції G. Доведено, що $G(t, \cdot) \in C'$ при кожному $t > 0$, встановлені оцінки похідних функції G за просторовою змінною, доведено диференційовність $G(t, \cdot)$ як абстрактної функції параметра t, досліджена гранична поведінка $G(t, \cdot)$ при $t \to +0$.

[1] *Городецький В.В.* Про одне узагальнення просторів типу W / В.В. Городецький, Р.С. Колісник // Науковий вісник Чернівецького ун-ту: зб. наук. пр. Вип. 134. Математика. – Чернівці: Рута, 2002. – С. 30-37.

Perturbation of hyperbolic systems of first order differential equations

Kazmerchuk Anatoliy

Prycarpatian National University by Vasyl Stefanyk

_kaz@rambler.ru

We study hyperbolic systems of first order conservation laws and some properties of such systems. Consider a system of quasilinear equations of the first order depending on a parameter $p \in \mathbb{R}^1$,

$$u_t + (\varphi(p,u))_x = 0, \quad u = (u^1, ..., u^N), \quad u^i = u^i(t,x), \quad i = 1, ..., N. \tag{1}$$

Let, $A = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)$, $a^i_j \in C^2$, and $a^i_j \neq 0$ perhaps only at $j - i \equiv 0, 1(\mathrm{mod}N)$. Also consider that the system (1) is hyperbolic and strongly nonlinear ([1]). Further we study the Cauchy problem and the Riemann's problem for the system (1) with the initial condition

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad \text{where} \quad u_0^i \in L_\infty, \quad i = 1, ..., N. \tag{2}$$

Definition *Bounded measurable vector function is called the generalized solution of problem (1), (2) if the system (1) is understood in the sense of distributions, satisfies by entropy condition on characteristics ([1]), and condition (2) is taken in the weak sense.*

Теорема 1 *Let at $p = p^0$ the system (1) is hyperbolic and strongly nonlinear, and for $u_l, u_r \in \mathbb{R}^N$ a shock wave (centered wave), which connects u_l, u_r, is exist. Then at some $\varepsilon_0 > 0$ for $|p - p^0| < \varepsilon_0$ system (1) is hyperbolic, strongly nonlinear and an appropriate shock wave (centered wave) is exist.*

Теорема 2 *Let at $p = p^0$ the system (1) is hyperbolic and strongly nonlinear, and for vectors $u_l, u_r \in \mathbb{R}^N$ the Riemann's problem automodel solution for $u_0(x) = u_l + \chi(x)(u_r - u_l)$ is exist. Then at some $\varepsilon_0 > 0$ for $|p - p^0| < \varepsilon_0$ the system (1) is hyperbolic, strongly nonlinear and an appropriate automodel solution is exist.*

In the case $a^j_i(p,u) - a^j_i(p_0,u) = 0$ at $(i,j) \neq (N,1)$ we can obtain some structure of given approximations for initial value problem too.

[1] *Lax P. D.* Hyperbolic system of conservation laws // Comm. Pure Appl. Math. - 1957.-V.10.-p.537-566.

Критерій розв'язності багатоточкової задачі для диференціальної системи з мірами

Віктор Мазуренко

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
vicmazu@yahoo.com

У доповіді обговорюються необхідні і достатні умови існування та єдиності розв'язку $Y(x),\ x \in [a, b]$, багатоточкової задачі

$$Y' = A'(x)Y + F'(x), \tag{1}$$

$$LY \equiv \sum_{i=1}^{s} M_i Y(x_i) + \int_a^b dH(x)Y(x) = Q. \tag{2}$$

Елементи $(n\times n)$-матриці $A(x)$ і n-вимірного вектора $F(x)$ вважаються неперервними справа функціями обмеженої на $[a, b]$ варіації ($BV^+[a, b]$), так що диференціювання і рівність в (1) розуміються в узагальненому сенсі. При цьому припускається виконання умов коректності $[\triangle A(x)]^2 = 0$, $\triangle A(x)\triangle F(x) = 0\ \forall x \in [a, b]$, за яких при дослідженні системи (1) не виникатиме проблема множення розподілів [1]. В умовах (2) M_i і Q — сталі матриці розміру $m \times n$ і $m \times 1$ відповідно, $H \in BV^+[a, b]$ і задовольняє умови $\triangle H(x)\triangle A(x) = 0$, $\triangle H(x)\triangle F(x) = 0\ \forall x \in [a, b]$, котрі гарантуватимуть існування інтеграла в сенсі Рімана–Стільтьєса, $a \le x_1 < x_2 < \ldots < x_s \le b$.

Нехай $(m\times n)$–матриця $L_B = \sum\limits_{i=1}^{s} M_i B(x_i, a) + \int_a^b dH(x)B(x, a)$, де $B(x, s)$ — матриця Коші однорідної системи, і $Y^*(x) = \int_a^x B(x, s)dF(s)$. Нехай L_B^+ — псевдообернена до L_B $(n\times m)$-матриця Мура-Пенроуза, тобто $L_B L_B^+ L_B = L_B$ (при $m = n$ і $\det L_B \ne 0$ матриця $L_B^+ = L_B^{-1}$).

Теорема 1 *Розв'язок* $Y \in BV^+[a, b]$ *задачі* (1), (2) *існує і має вигляд* $Y(x) = B(x, a)\left[L_B^+(Q - LY^*) + (E_n - L_B^+ L_B)C\right] + Y^*(x)$, *де* C — *довільний сталий вектор, якщо і тільки якщо* $(E_m - L_B L_B^+)(Q - LY^*) = 0$. *Для єдиності розв'язку цієї задачі необхідно і досить виконання додаткової умови* $L_B^+ L_B = E_n$.

Наслідок 2 *При* $m = n$ *задача* (1), (2) *має єдиний розв'язок тоді і тільки тоді, коли* $\det L_B \ne 0$.

Анонсовані у доповіді результати отримані спільно з Тацієм Р.М.

[1] *Тацій Р.М., Стасюк М.Ф., Мазуренко В.В., Власій О.О.* Узагальнені квазідиференціальні рівняння. – Дрогобич: Коло, 2011.

Початково-нелокальна задача для факторизованого рівняння із частинними похідними

Савка І.Я.[1,2], Симотюк М.М.[1]

ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України[1]

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника[2]

s-i@ukr.net, quaternion@ukr.net

Нехай Ω_p — p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, $T>0$, $Q_p^T=(0,T)\times\Omega_p$, $k=(k_1,\dots,k_p)\in\mathbb{Z}^p$, $|k|=|k_1|+\ldots+|k_p|$, $D_x=(-i\partial/\partial x_1,\dots,-i\partial/\partial x_p)$, $\Pi_n=\{\vec{\lambda}\equiv(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n:\lambda_1<\ldots<\lambda_n\}$; $B(D_x)$ — такий диференціальний вираз, що

$$(\exists\, N_1,N_2\in\mathbb{N})\ (\exists\, C_1,C_2>0)$$
$$(\forall\, k\in\mathbb{Z}^p)\qquad C_1(1+|k|)^{N_1}\le|B(k)|\le C_2(1+|k|)^{N_2}.$$

В області Q_p^T розглядаємо таку задачу:

$$\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial t}-\lambda_j B\left(D_x\right)\right)u(t,x)=0,\quad (t,x)\in Q_p^T, \tag{1}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^{j-1}u(t,x)}{\partial t^{j-1}}\Big|_{t=0}=\varphi_j(x), & j=1,\dots,r,\\[2mm] \dfrac{\partial^{j-1}u(t,x)}{\partial t^{j-1}}\Big|_{t=0}-\mu\dfrac{\partial^{j-1}u(t,x)}{\partial t^{j-1}}\Big|_{t=T}=\varphi_{r+j}(x), & j=1,\dots,l,\end{cases} \tag{2}$$

де $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\Pi^p$, $\mu\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$, $1\le r<n$, $l=n-r$. Задачу (1), (2) будемо називати початково-нелокальною задачею, оскільки умови (2) містять в собі поєднання r початкових умов для шуканого розв'язку в точці $t=0$ і l нелокальних умов, які пов'язують значення цього розв'язку та його похідних на кінцях відрізку $[0,T]$.

Основною метою роботи є встановлення результату про коректну розв'язність задачі (1), (2) в просторах експоненційного типу для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів $\vec{\lambda}\in\Pi^p$ при довільних фіксованих T і μ.

Дана робота близько примикає до робіт [1, 2], розвиває та доповнює їх.

[1] *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.

[2] *Бобик І.О., Симотюк М.М.* Задача з двома кратними вузлами для лінійних факторизованих рівнянь із частинними похідними// Вісник НУ "Львівська політехніка". Фізико математичні науки, 2010. – Вип. 687. – С. 11–19.

Про одну некласичну модель взаємодії фірм в термінах концепції рівноваги за Нешом

Косаревич Катерина Вікторівна

Львівський національний університет імені Івана Франка

katia_kosarevych@mail.ru

Розглянемо модель кількісної конкуренції фірм-виробників однорідного продукту на ринку як гру n осіб, що приймають рішення в динамічному випадковому середовищі.

Обсяг випуску i-ї фірми з точки зору її конкурентів є випадковою величиною x_i, $i \in \{1, ..., n\}$. Нехай для вектора $x = (x_1, ..., x_n) \in X$, $X = \prod_{i=1}^{n} [\alpha_i, \beta_i]$, задана щільність розподілу $f(x)$. Припустимо, що кожен гравець володіє інформацією про розподіл випусків інших виробників. Поведінку i-го гравця описує функція $q_i(x'_i)$, $i \in \{1, ..., n\}$, що формується на основі відомої йому інформації про тип розподілу випусків конкурентів, причому $x'_i = (x_k)_{k \in I^{(i)}}$, $I^{(i)} \subseteq \{1, ..., n\}$. Нехай $q = (q_1(x'_1), ..., q_n(x'_n))$ – вектор поведінки гравців, де $q \in Y = \prod_{i=1}^{n} Y_i$, $q_i(x'_i) \in Y_i \subseteq C^1(X)$. Надалі вважатимемо $\frac{\partial q_i(x'_i)}{\partial x_k} = 0$, $k \notin I^{(i)}$, $i \in \{1, ..., n\}$.

В термінах взаємодії фірм цільовою функцією i-го гравця є його сподіваний прибуток $\overline{\pi_i} = E[\pi_i(x, q(x'_i))]$, де $\pi_i(\cdot)$ – прибуток i-ї фірми при детермінованих рівнях випуску конкурентів. Таким чином, задачу максимізації прибутку для i-ї фірми

$\overline{\pi_i} = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} ... \int_{\alpha_n}^{\beta_n} \pi_i(x, q_1(x'_1), ..., q_n(x'_n)) f(x) dx \to \max_{q_i \in Q_i}$, $i \in \{1, ..., n\}$, де

$Q_i = \{q_i : \quad \frac{\partial q_i(x)}{\partial x_k} = 0 \ \ (k \notin I^{(i)}), \ \ q_i \in C^2(X)\}$

будемо розглядати як некооперативну гру n осіб із стратегіями $q_1(x), ..., q_n(x)$ та функціями виграшу $\overline{\pi_1}(q), ..., \overline{\pi_n}(q)$ відповідно.

Нехай $\pi_i(x, q) = \left(a - b \sum_{i \in I} q_i(x'_i)\right) q_i(x'_i) - c_i q_i(x'_i)$, $\forall i \in \{1, ..., n\}$, де $\sum_{i \in I} q_i(x'_i)$ – обсяг товару, виробленого (і проданого) усіма фірмами, $a > 0$ – потенціал ринку (максимально можлива ціна продукції на ринку), b– показник еластичності попиту (зниження ціни при одиничному збільшенні об'єму продукції) на ринку. Тоді задача максимізації прибутку для i-ї фірми набуде вигляду

$\overline{\pi_i} = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} ... \int_{\alpha_n}^{\beta_n} \left(\left(a - b \sum_{i \in I} q_i(x_i') \right) q_i(x_i') - c_i q_i(x_i') \right) f(x) dx \to \max_{q_i \in Q_i}$, $i \in \{1, ..., n\}$, де $Q_i = \{q_i : \quad \frac{\partial q_i(x)}{\partial x_k} = 0 \ \ (k \notin I^{(i)}), \ \ q_i \in C^2(X)\}$

В межах даного припущення про вигляд функціоналу $\pi_i(x, q)$ та припущення про незалежність компонент вектора x знайдено розв'язок даної задачі у випадку $n = 2$ в термінах поширеної в сучасній теорії ігор концепції рівноваги за Нешом [1].

[1] *Nash J. F.* Noncooperative games // Ann.Math. - 1951. - 45. - P.286-295.

Про існування та єдиність оптимальних інвестицій в біноміальній ціновій моделі

Підкуйко Сергій Іванович

Львівський національний університет імені Івана Франка

pidkuyko@gmail.com

Баб'як Микола Васильович

CERGE-EI, Prague, Czech Republic

mykola.babyak@gmail.com

Розглядається *Задача II оптимальних інвестицій* [1]. Доведено такі результати.

Теорема 1 *Нехай функція корисності $\mathcal{U} : (a, b) \to \mathbf{R}$ задовільняє умови:*

(i) $\mathcal{U}$ строго опукла вверх,

(ii) $\mathcal{U}$ не має локальних екстремумів,

(iii) $\mathcal{U}$ диференційовна на (a, b),

(iv) $\mathcal{U}'(x) \to 0, x \to b_-, \quad \mathcal{U}'(x) \to +\infty, x \to a_+$.

Нехай задано N-періодну безарбітражну біноміальну цінову модель з ймовірностями $p, q > 0$ та безризиковою відсотковою ставкою $r > 0$. Тоді

$$\forall X_0 \in \left(\frac{a}{(1+r)^N}, \frac{b}{(1+r)^N} \right) \tag{1}$$

існує й до того ж єдиний строгий локальний максимум задачі

$$\mathbb{E}[\mathcal{U}(X_N)] \to \max, \tag{2}$$

за умови

$$\widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{X_N}{(1+r)^N}\right] = X_0. \tag{3}$$

Теорема 2 *Нехай функція корисності* $\mathcal{U} : (a, b) \to \mathbf{R}$ *задовільняє умови:*

(i) $\mathcal{U}$ *строго опукла вверх,*

(ii) $\mathcal{U}$ *не має локальних екстремумів,*

(iii) $\mathcal{U}$ *диференційовна на* (a, b)*,*

(iv) $\mathcal{U}'(x) \to 0, x \to b_-, \quad \mathcal{U}'(x) \to +\infty, x \to a_+$.

Нехай задано N*-періодну безарбітражну біноміальну цінову модель з ймовірностями* $p, q > 0$ *та безризиковою відсотковою ставкою* $r > 0$*. Тоді*

$$\forall X_0 \in \left(a \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(1+r)^N}, b \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(1+r)^N}\right) \tag{4}$$

існує й до того ж єдиний строгий локальний максимум задачі

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \alpha_n \mathcal{U}(C_n)\right] \to \max, \tag{5}$$

за умови

$$\widetilde{\mathbb{E}}\left[\sum_{n=0}^{N} \frac{C_n}{(1+r)^n}\right] = X_0, \tag{6}$$

де $C = \{C_0, ..., C_N\}$ *адаптований стохастичний процес,* $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ *довільний фіксований набір додатніх чисел.*

[1] *Shreve S.E.* Stochastic Calculus for Finance I., //Springer-Verlag, New York: 187 p., 2004.

Про апроксимацію передбачуваної волатильності в моделях локальної волатильності

Підкуйко Сергій Іванович

Львівський національний університет імені Івана Франка
pidkuyko@gmail.com

Підкуйко Мирослав Сергійович

CERGE-EI, Prague, Czech Republic
myroslav.pidkuyko@cerge-ei.cz

Нехай ціна деякого базового активу S задовільняє стохастичне диференціальне рівняння

$$\frac{dS_t}{S_t} = \sigma(S_t, t)dW_t,$$

де $\sigma(S_t, t)$ — функція локальної волатильності, W_t — деякий Вінерівський процес.

Нехай $C(S_0, K, T)$ позначає вартість деякого європейського call-опціону зі спот-ціною S_0, страйк-ціною K та терміном виконання T, $C_{BS}(S_0, K, \sigma, T)$ — формулу Блека-Скоулза для цього call-опціону, σ_{BS} — передбачувану волатильність Блека-Скоулза, тобто

$$C(S_0, K, T) = C_{BS}(S_0, K, \sigma_{BS}, T).$$

Нехай справедлива асиптотика передбачуваної волатильності

$$\sigma_{BS}(t, T) = \sigma_{BS,0}(t) + \sigma_{BS,1}(t)(T-t) + \sigma_{BS,2}(t)(T-t)^2 + \\ + \sigma_{BS,3}(t)(T-t)^3 + O\big((T-t)^4\big), \quad t \to T.$$

Тоді,

$$\sigma_{BS,3} = \frac{\sigma_{BS,0}^3}{\xi^2}\left(\frac{15a(K,t) + 5d^2 a_t(K,t)}{d^4 a(K,t)} + \frac{a_{tt}(K,t)}{2a(K,t)} + \right. \\ \left. + \left(\frac{5}{d^2} + \frac{a_t(K,t)}{a(K,t)}\right)\frac{u_1(s,K,t)}{u_0(s,K,t)} + \frac{u_2(s,K,t)}{u_0(s,K,t)}\right) + \\ + \sigma_{BS,0}\left(-\frac{\sigma_{BS,2}}{\sigma_{BS,0}} + \left(\frac{\sigma_{BS,1}}{\sigma_{BS,0}}\right)^2\right) - \frac{2\xi^2}{\sigma_{BS,0}}\left(\frac{\sigma_{BS,1}\,\sigma_{BS,2}}{\sigma_{BS,0}^2} - \frac{\sigma_{BS,1}^3}{\sigma_{BS,0}^3}\right)^2 +$$

$$+\frac{1}{2\sigma_{BS,0}^2}\left(3\sigma_{BS,0}^2\,\sigma_{BS,1}+\sigma_{BS,0}^5\left(-\frac{3}{\xi^2}-\frac{1}{8}\right)\right)+$$

$$+\frac{1}{\xi^2}\Bigg(3\sigma_{BS,0}\,\sigma_{BS,1}^2+3\sigma_{BS,0}^2\,\sigma_{BS,2}+5\sigma_{BS,0}^4\,\sigma_{BS,1}\left(-\frac{3}{\xi^2}-\frac{1}{8}\right)+$$

$$+\,\sigma_{BS,0}^7\left(\frac{15}{\xi^4}+\frac{5}{8\xi^2}+\frac{1}{128}\right)\Bigg),$$

де

$$\sigma_{BS,0}=\frac{\xi}{d}$$

— BBF-наближення [1],

$$\sigma_{BS,1}=\frac{\xi}{d^3}\ln\left[\frac{a(K,t)\,u_0(s,K,t)\,d}{\xi\sqrt{sK}}\right]$$

— наближення Анрі-Лабордера [3],

$$\sigma_{BS,2}=-\frac{3\sigma_{BS,1}}{d^2}+\frac{3\sigma_{BS,1}^2}{2\sigma_{BS,0}}+\frac{\xi^3}{8d^5}+\frac{\xi}{d^3}\left[\frac{a_t(K,t)}{a(K,t)}+\frac{u_1(s,K,t)}{u_0(s,K,t)}\right]$$

— наближення Ґатерала [2],

$$a(s,t)=s\,\sigma(s,t),\quad d(K,s,t)=\int_K^s\frac{d\eta}{a(\eta,t)},\quad \xi=\ln\frac{s}{K},$$

а функції $u_i(s,K,t)$ обчислюються за формулами:

$$u_0(s,K,t)=\sqrt{\frac{a(s,t)}{a(K,t)}}\exp\left[-\int_K^s\frac{d_t(K,\eta,t)}{a(\eta,t)}d\eta\right],$$

$$u_i(s,K,t)=\frac{u_0(s,K,t)}{d(K,s,t)^i}\int_K^s\frac{d(K,\eta,t)^{i-1}}{u_0(\eta,K,t)}\left(\frac{1}{2}\,a(\eta,t)^2\,\frac{\partial^2 u_{i-1}}{\partial\eta^2}+\frac{\partial u_{i-1}}{\partial t}\right)\frac{d\eta}{a(\eta,t)},$$

$i=1,\ 2.$

[1] *Berestycki, H., Busca, J., and Florent, I.* Computing the Implied Volatility in Stochastic Volatility Models., //Communications on Pure and Applied Mathematics, LVII: 1352-1373, 2004.

[2] *Gatheral, J., Hsu, E. P., Laurence, P., Ouyang, C., and Wang, T.-H.* Asymptotics of Implied Volatility in Local Volatility Models., //Mathematical Finance, 2010.

[3] *Henry-Labordere, P.* A General Asymptotic Implied Volatility for Stochastic Volatility Models., //Working Paper, 2005.

Зміст