

Тривіум зі спецкурсу
«Нелінійні диференціальні рівняння з частинними похідними першого
порядку»
для груп М-5, ММ-5

1. Розв'язати задачу Коші

$$(at + b)u_t + (bx - a)u_x = -a,$$

$$u|_{t=0} = -bx^2 + ax - 1.$$

2. Знайти найширшу смугу $(0, T] \times \mathbb{R}^1$, у якій існує класичний розв'язок задачі Коші.

$$u_t + (au^2 - 2bu)_x = 0,$$

$$u|_{t=0} = (b + 1) \cos(\pi bx + \frac{a\pi}{4}).$$

3. Розв'язати задачу Рімана

$$u_t + (\varphi(u))_x = 0$$

$$3a) u|_{t=0} = \begin{cases} a, & x < 0 \\ -b, & x > 0 \end{cases} \qquad 3b) u|_{t=0} = \begin{cases} -a, & x < 0 \\ b, & x > 0 \end{cases}$$

$$\varphi(u) = \begin{cases} au^2, & u > 0 \\ -bu^2, & u \leq 0 \end{cases}$$

4. Перевірити умови гіперболічності та сильної нелінійності для системи законів збереження

$$\begin{cases} u_t + (au_2 + 2buv + v^2)_x = 0 \\ v_t + (-2buv)_x = 0 \end{cases}$$

5. Розв'язати задачу Рімана

$$5.1) \begin{cases} u_t + (au^2)_x = 0 \\ v_t + (bv^2)_x = 0 \end{cases} \quad (u, v) = \begin{cases} (u_l, v_l), & x < 0 \\ (u_r, v_r), & x > 0 \end{cases}$$

$$5.2) \begin{cases} u_t + (av^2)_x = 0 \\ v_t + (bu^2)_x = 0 \end{cases} \quad (u, v) = \begin{cases} (u_l, v_l), & x < 0 \\ (u_r, v_r), & x > 0 \end{cases}$$

6. Скласти і реалізувати схему Лакса для однієї із задач 5.1) або 5.2) в математичному пакеті Maple або Mathematica.

Тут $a = n_1 + 1$, $b = n_2 + 1$, де $\overline{n_1 n_2} = N$ – порядковий номер за журналом групи.