Федак І.В.

Вибрані задачі III етапу Всеукраїнської олімпіади з математики

20 січня у м. Івано-Франківську проходив III етап Всеукраїнської олімпіади з математики за завданнями рівня Б, підготовленими Інститутом інноваційних технологій і змісту освіти. Умови задач та їх розв'язання виставлені на сайті механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Пропонуємо Вашій увазі розв'язання окремих задач олімпіади, які повністю (8.2, 10.5, 11.3) або частково (7.2, 9.5, 10.4) використовують підходи, відмінні від запропонованих їх авторами.

7.2. Серед 25 монет є рівно 2 фальшиві. Є чарівна скринька, в яку можна покласти 2 монети, і вона покаже кількість фальшивих монет у цій парі. Покажіть, як можна визначити обидві фальшиві монети не більше, ніж за 14 таких операцій.

Розв'язання. Відокремимо деяку монету A, а решту монет розіб'ємо на 12 пар. Далі послідовно покладаємо кожну пару монет у скриньку. Якщо при цьому скринька хоч раз покаже «2», то обидві фальшиві монети будуть визначені не більше, ніж за 12 операцій. Розглянемо два інші можливі випадки: 1) Скринька один раз показала «1», наприклад, у парі монет B і C. Тоді монета A фальшива. Поклавши її у скриньку разом з монетою B, за отриманим показником визначаємо, котра з монет B чи C є другою фальшивою. 2) Скринька двічі показала «1», наприклад, у парах монет B і C, D і E. Тоді перевіряємо пари монет A і B та A і D. Оскільки при цьому монета A справжня, то за отриманими результатами однозначно визначимо, котрі з монет у парах B і C, D і E були фальшивими.

8.4. Дано гострокутний трикутник ABC. Кола k_1 і k_2 проходять через вершину A і дотикаються до прямої BC у точках B і C відповідно. Висота BK трикутника ABC перетинає коло k_1 у точці P, відмінній від точки B, а висота CL перетинає коло k_2 у точці Q, відмінній від точки C. Доведіть, що точки A, P, Q лежать на одній прямій.

Розв'язання. Враховуючи, що кут між хордою і дотичною дорівнює вписаному куту, який спирається на дугу, що стягується цією хордою, а сума кутів трикутника дорівнює 180°, отримуємо

$$\angle BAP + \angle CAQ = \angle CBP + \angle BCQ = \angle CBK + \angle BCL =$$

$$= \left(90^\circ - \angle BCA\right) + \left(90^\circ - \angle CBA\right) = \angle BAC.$$

Оскільки точки P та Q знаходяться всередині кута $BAC,$ то звідси випливає, що точки A, P, Q лежать на одній прямій.

9.5. Керівник математичного гуртка намалював на дошці таблицю розміру 30×30 і запропонував учням заповнити її числами 1, 2, …, 900, записуючи щосекунди в якусь порожню клітинку на свій розсуд одне з тих чисел, що не використовувались раніше. Чи зможуть учні виконати завдання так, щоб у будь-який момент часу ані у жодному рядку, ані у жодному стовпці сума всіх записаних чисел не давала остачу 1 від ділення на 3?

Розв'язання. Доведемо, що це можливо. Серед чисел 1, 2, … , 900 кожну з остач 0, 1, 2 від ділення на 3 дають по 300 чисел. Розіб'ємо таблицю на 100 квадратиків розміру 3×3 і будемо по черзі заповнювати кожен з них. Спочатку по діагоналі квадратика запишемо довільні три із заданих чисел, які дають остачу 2 від ділення на 3, а потім у решту клітинок довільно впишемо шість чисел так, щоб у кожному рядку та кожному стовпці квадратика було по три числа з різними остачами від ділення на 3.

10.4. Нехай $H -$ точка перетину висот AQ, BL, CP гострокутного трикутника $ABC,$ $K -$ спільна точка відрізків PQ і $BH,$ $M -$ середина сторони $AC,$ $N -$ середина відрізка $BH.$ Промінь BL перетинає описане коло трикутника ABC у точці $D,$ відмінній від $B.$ $KQ = HQ.$ Доведіть, що прямі MN і AD перпендикулярні.

Розв'язання. Маємо $\angle APC = \angle AQC = 90^\circ \Rightarrow MP = MQ = 0{,}5AC,$ $\angle BPH = \angle BQH = 90^\circ \Rightarrow NP = NQ = 0{,}5BH.$ З рівності трикутників MPN та MQN (за трьома сторонами) випливає, що $MN \perp PQ.$ Далі, враховуючи умову $KQ = HQ$ та рівність вертикальних кутів, а також вписаних кутів, які спираються на одну дугу, отримаємо

$$\angle QKD = \angle QKH = \angle QHK = \angle AHL = 90^\circ - \angle HAL =$$
$$= 90^\circ - \angle QAC = \angle ACQ = \angle ACB = \angle ADB = \angle ADK.$$

Отже, $PQ \parallel AD.$ Тому $MN \perp AD.$

10.5. По колу записали 672 натуральні числа $a_1, a_2, ..., a_{672}$ такі, що $a_1 + a_2 + ... + a_{672} = 2013$ і $a_k \ne 1342$ для всіх $k, 1 \le k \le 672.$ Доведіть, що можна вибрати декілька записаних поспіль чисел, сума яких дорівнює 1342.

Розв'язання. Розглянемо 672 числа $A_1 = a_1,$ $A_2 = a_1 + a_2, ...,$ $A_{672} = a_1 + a_2 + ... + a_{672} = 2013.$ Оскільки таких чисел більше, ніж остач від ділення на 671, то серед них знайдуться два числа A_m та A_n, $m > n$, різниця яких $A_m - A_n = a_{n+1} + ... + a_m$, $0 < A_m - A_n < 2013$, ділиться на 671, а отже, дорівнює 1342 або 671. Враховуючи, що $a_k \neq 1342$ для всіх $k, 1 \le k \le 672$, у першому випадку шуканими будуть записані поспіль числа $a_{n+1},...,a_m$, яких є принаймні два А у другому випадку такими є решта записаних поспіль чисел.

11.3. У трикутнику ABC $AB = 16$ *см*, $BC = 25$ *см*, $AC = 39$ *см*. Пряма, яка проходить через центр вписаного кола трикутника ABC і середину M сторони BC, перетинає висоту AD цього трикутника у точці P. Знайдіть довжину відрізка AP.

Розв'язання. Розв'яжемо поставлену задачу для довільного трикутника ABC зі сторонами $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $b > c$. Нехай $I -$ центр, $r -$ радіус кола, вписаного у трикутник ABC, $K -$ точка дотику цього кола до сторони BC, $p -$ півпериметр, $S -$ площа трикутника ABC. Відкладемо на відрізку AD таку точку Q, що $AQ = IK = r$. Точки перетину прямої QI та бісектриси AI зі стороною BC позначимо через N та L відповідно. Тоді чотирикутник $AQKI$ буде паралелограмом, а з подібності трикутників QKN та ILN отримаємо $\frac{KN}{LN} = \frac{QK}{IL} = \frac{AI}{IL} = \frac{b+c}{a}$, тобто $\frac{KC - NC}{LC - NC} = \frac{b+c}{a}$. Враховуючи, що $KC = p - c$, $LC = \frac{ab}{b+c}$, звідси знаходимо $NC = \frac{a}{2}$. Таким чином, точка N співпадає з точкою M. Отже, і точка Q співпадає з точкою P. Тому

$$AP = AQ = r = \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Зокрема, для трикутника ABC зі сторонами $AB = 16$ *см*, $BC = 25$ *см*, $AC = 39$ *см* знайдемо

$$AP = \sqrt{\frac{(40-25)(40-39)(40-16)}{40}} = 3(см).$$

Зауважимо, що у випадку $c > b$, міркуючи аналогічно, доведемо рівність $BN = \frac{a}{2}$. Отже, також отримаємо $AP = r$. А якщо $c = b$, то прямі AD та MI не перетинаються, а співпадають.