Завдання фінального бою
IX обласного турніру юних математиків

1. Друзі подарували Незнайкові на день народження два комплекти шахових фігур. Йому особливо сподобалися коні. Наступного дня він похвалився, що зумів поставити на шаховій дошці всі 8 коней так, що кожен білий кінь може побити трьох чорних, а кожен чорний – трьох білих. Чи можуть його слова бути правдою? Якщо так, то чи міг би Незнайко за таким же принципом поставити на дошці 8 білих та 8 чорних коней?

2. Невмійко також вирішив похизуватися перед друзями і заявив, що знайшов унікальне складене десятицифрове число, у записі якого використані всі цифри від 0 до 9, і яке залишається складеним при викреслюванні у ньому будь-яких однієї, двох, трьох, чотирьох, п’яти, шести чи семи цифр. Чи справді існує таке число? Якщо так, то чи є воно настільки унікальним, як вважає Невмійко?

3. На одному з ребер одиничного куба у точці M сидить муха. Вона хоче проповзти по всіх гранях куба і повернутися у точку M. Вкажіть найкоротший шлях мухи та знайдіть його довжину. Відповідь обґрунтуйте.

4. Дослідіть, якого найбільшого значення набуває вираз
$$f(x,y)=5\sin x\cos y+4\sin x\sin y+3\cos x.$$

5. Розв’яжіть рівняння $(x-1)(503x-504)(1006x-1007)^2=2013.$

6. Знайдіть всі прості числа $p,$ для яких число $p^3+p^2+20p-13$ також є простим.

7. Дослідіть, за яких значень параметра a для всіх додатних чисел x, y виконується нерівність
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{a}{x+y}>\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}.$$

8. Нехай O – середина гіпотенузи прямокутного трикутника ABC, а точки M та K на катетах AC та BC відповідно такі, що кут MOK – прямий. Доведіть, що $AM^2+BK^2=MK^2$.

Вказівки до розв’язування задач фінального бою.

1. Можуть. Наприклад, якщо поставити коней, як на мал.1

				Ч			
		Б				Б	
			Б	Ч			
	Ч				Ч		
			Б				

Мал.1

		Ч					
			Ч	Б			
	Б		Б			Ч	
	Ч	Б		Б	Ч		
Ч			Б		Б		
		Б	Ч				
				Ч			

Мал.2

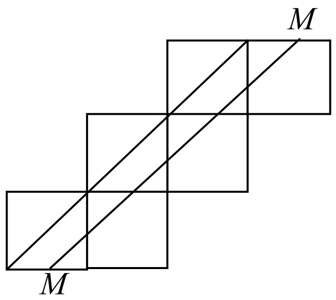
Відзначимо, що з’єднавши на мал.1 попарно відрізками центри клітинок, у яких знаходяться пари коней, які взаємно б’ють один одного, отримаємо схематичне зображення куба. При цьому коні, які знаходяться на кінцях кожного з ребер куба, виявляться різного кольору.

На мал.2 зображене відповідне розташування 8 білих та 8 чорних коней.

2. Існує. Таким, наприклад, є число 7931524680. Якщо залишити не викресленою хоч одну з шести останніх його цифр, то отримуємо або парне число, або число кратне 5. А якщо викреслені всі 6 останніх цифр, то неважко переконатися, що кожне з наступних п'яти чисел: 7931=103x11x7, 793=61x13, 791=113x7, 731=43x17, 931=19x7x7 – складене.

Наведене число не є унікальним. Довільна перестановка серед його шести останніх цифр зберігає вказану властивість. Отже, таких чисел є принаймні 720.

3. Розглянемо розгортку куба.



Мал.3

З мал. 3 видно, що довжина найкоротшого шляху мухи дорівнює довжині трьох діагоналей одиничних квадратиків, тобто дорівнює $3\sqrt{2}$.

4. Нехай $\vec{a}=(5,4,3)$, $\vec{b}=(\sin x\cos y,\sin x\sin y,\cos x)$. Тоді $f(x,y)=\vec{a}\cdot\vec{b}\le|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|=5\sqrt{2}\cdot 1=5\sqrt{2}$.

Звідси отримуємо $\max f(x,y)=5\sqrt{2}$ при $tgy=\frac{4}{5}, y\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $tgx=\frac{4}{3\sin y}$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

5. $x=\frac{1007\pm\sqrt{2013}}{1006}$. Помноживши обидві частини рівняння на 2012, запишемо його у вигляді $(1006x-1006)(1006x-1008)(1006x-1007)^2=2012\cdot 2013$. Заміною $y=1006x-1007$ воно зводиться до біквадратного рівняння $y^4-y^2-2012\cdot 2013=0$.

6. $p=3$. Тоді $3^3+3^2+20\cdot 3-13=83$. Для всіх інших простих чисел отримуємо числа, кратні 3.

7. $a\le 1$. Піднесенням до квадрату нескладно переконатися, що при $a=1$ задана нерівність виконується для всіх додатних чисел x,y. Тоді також для всіх $a<1$, $x>0$, $y>0$ отримуємо

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{a}{x+y}>\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{x+y}>\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}.$$

А для $a>1$ при $x=1$, $y=\frac{1}{a-1}$ ліва частина нерівності дорівнює 1, а права є більшою, ніж 1.

8. Нехай точка *P* симетрична до точки *M* відносно точки *O*. З рівності трикутників *AMO* та *BPO* (за двома сторонами і кутом між ними) і перпендикулярності прямих *BP* та *BK* отримуємо $AM^2+BK^2=BP^2+BK^2=PK^2=MK^2$. Остання рівність випливає з того, що *KO* є одночасно висотою і медіаною трикутника *MKP*.