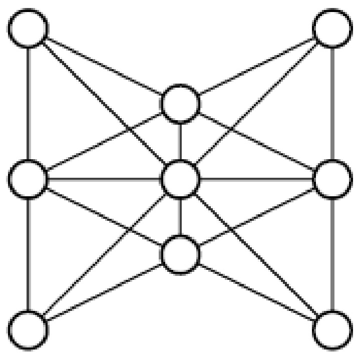
Завдання 1 – 8 XIV обласного турніру юних математиків 2018-2019 н.р.

1. Робот придумав шифр для запису слів. Він замінив деякі букви алфавіту одноцифровими чи двоцифровими числами (різні букви – різними числами), використовуючи лише цифри 1, 2, 3. Спочатку він зашифрував себе: РОБОТ=3112131233. Потім записав своїм шифром слово МАТЕМАТИКА. Але дуже здивувався, що шифри слів КРОКОДИЛ та БЕГЕМОТ виявилися однаковими. Запишіть цим шифром слово АЛГЕБРА.
2. Оргкомітет XIV обласного турніру юних математиків відзначив переможця турніру в особистій першості зачарованою коробкою з чотирнадцятьма цукерками. Але, як тільки він забирав з коробки деяку кількість цукерок і клав їх до себе в сумку, частина цукерок із сумки (принаймні одна, а, можливо, й усі) миттєво поверталася назад у коробку. При цьому кожного разу кількості таких цукерок (чи покладених у сумку, чи повернутих з неї у коробку) мали були різними. Якщо ж на якомусь кроці дотриматися останньої вимоги не вдавалося, то коробка таємниче зникала разом з цукерками, які на цей момент у ній залишалися. Яка найбільша кількість цукерок може залишитися у сумці переможця турніру на момент зникнення чарівної коробки?
3. На столі лежать 9 яблук, утворюючи при цьому 10 рядів по три яблука як на малюнку справа. Юному математику відомо, що у дев'ятьох рядах сумарні маси трьох яблук однакові, а в одному – така маса яблук є більшою. У нього є терези з двома шальками без гир. Він може взяти зі столу довільну парну кількість яблук і, скориставшись терезами, повернути їх на стіл, кожне на своє попереднє місце. За яку найменшу кількість зважувань він гарантовано зуміє виявити ряд, в якому сумарна маса трьох яблук є найбільшою?



4. Площину розбили на одиничні квадратики й у кожен квадратик записали по одному натуральному числу. Після цього для кожного квадратика порахували різницю: добуток чисел, записаних у сусідніх з ним квадратиках зліва та справа, мінус добуток чисел, записаних у сусідніх з ним квадратиках знизу та зверху. Чи могло статися так, що усі такі різниці дорівнюють 11 ?
5. Чи існують 2018 попарно різних натуральних чисел таких, що сума обернених до них чисел дорівнює 1.
6. Крива на площині у деякій декартовій системі координат є графіком функції $y = \sin x$. Чи може вона в іншій декартовій системі координат бути графіком функції $y = \sin^2 x$?
7. Числа Фібоначчі визначаються рівностями: $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$, $n \ge 1$. Для кожного натурального числа n розв'яжіть систему рівнянь:
$$\begin{cases} F_n x + F_{n+1} y^2 = F_{n+2} z^3, \\ F_n y + F_{n+1} z^2 = F_{n+2} x^3, \\ F_n z + F_{n+1} x^2 = F_{n+2} y^3. \end{cases}$$
8. Нехай $a, b, c -$ довільні додатні числа; $(x, y, z) -$ деяка їх перестановка. Дослідіть, яких значень може набувати вираз $A = \dfrac{x}{a+b} + \dfrac{y}{b+c} + \dfrac{z}{c+a}$.

Примітка. Завдання 9 – 20 будуть розміщені на нашому сайті після оприлюднення задач Всеукраїнського турніру юних математиків імені професора М.Й. Ядренка.