Завдання X обласного турніру юних математиків
2014-2015 н.р.

1. На площині задані чотири точки з координатами $(0,0)$, $(0,14)$, $(20,0)$ та $(20,14)$. Ще дві точки, обидві координати яких є натуральними числами, вибрані так, що існує шестикутник (не обов'язково опуклий) з вершинами у таких шести точках. Яку найменшу площу може мати цей шестикутник?
2. 100 гир з масами 1г, 2г, 3г, …, 100г поставлені на шальки терезів так, що шальки знаходяться у положенні рівноваги. Чи завжди вдасться зняти деякі три із цих гир, щоб після їх зняття рівновага шальок збереглася?
3. Задане додатне число a є різницею обернених квадратів, тобто $a=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}$, де $n, m-$деякі натуральні числа. Чи може так трапитись, що число $2a$ також є різницею обернених квадратів?
4. Знайдіть усі такі шістки простих чисел, для яких сума квадратів п'яти із них дорівнює квадрату шостого числа.
5. На дошці записаний квадратний тричлен $x^2+x+2014.$ Миколка і Петрусь по черзі (розпочинає Миколка) роблять ходи у такій грі. За один хід Миколка має право збільшити або зменшити на 1 коефіцієнт біля x, а Петрусь – збільшити або зменшити на 1 останній доданок тричлена. Миколка перемагає, якщо у деякий момент отриманий тричлен матиме два (не обов'язково різні) цілі корені. Дослідіть, чи є у нього виграшна стратегія.
6. У трикутнику ABC зі сторонами $AB=3$см, $BC=5$см, $AC=7$см проведені бісектриси AA_1, BB_1 та CC_1. Запишіть у градусах величину кута $A_1B_1C_1$.
7. Нехай $a,b,c-$ додатні числа такі, що $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3.$ Знайдіть найменше можливе значення виразу $a+\frac{b^2}{2}+\frac{c^3}{3}.$
8. Відомо, що сума квадратів діагоналей довільного паралелограма дорівнює сумі квадратів чотирьох його сторін. Як виглядатиме аналогічна формула для суми квадратів чотирьох діагоналей довільного паралелепіпеда?
9. У кожній вершині трикутної піраміди записане число. На кожному ребрі записана сума чисел, які стоять на його кінцях. Відомо, що сума всіх чисел на ребрах дорівнює 3 і сума їх квадратів також дорівнює 3. Яких значень може набувати сума їх кубів?
10. Відстань між пунктами A та B становить 40 км. Два велосипедисти одночасно виїхали з цих пунктів назустріч один одному. Перший рухався зі швидкістю 23 км/год, а другий – зі швидкістю 17 км/год. Разом з ними з одного з цих пунктів вилетіла муха, яка до їхньої зустрічі весь час літала від одного велосипедиста до іншого. Яку найменшу відстань могла пролетіти муха, якщо в одному напрямі вона літала зі швидкістю 40 км/год, а в іншому – 30 км/год?
11. Орися записала у зошиті подвійну тотожність, після чого зачитала її вголос:
Ікс плюс ікс на ікс плюс ікс на ікс плюс ікс на ікс плюс ікс *дорівнює* ***ікс плюс ікс на ікс плюс ікс на ікс плюс ікс*** *дорівнює* ***ікс плюс ікс на ікс плюс ікс***.
Наведіть приклад тотожності, яку могла записати Орися, або доведіть, що дівчина помилилася.

12. Обчисліть знакозмінну суму біноміальних коефіцієнтів:

$$C_{2014}^{0}-C_{2013}^{1}+C_{2012}^{2}-C_{2011}^{3}+...+C_{1008}^{1006}-C_{1007}^{1007}.$$

13. Для послідовності цілих чисел $\{a_n, n\geq 1\}$ виконується умова $a_{n+1}=\min(a_n,0)-a_{n-1}$ для всіх $n\geq 2$. Доведіть, що ця послідовність періодична.

14. Знайдіть усі набори натуральних чисел k та додатних дійсних чисел a_1, a_2, …, a_k таких, що

$$\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+...+\sqrt[n]{a_k}=\sqrt[n]{20}+\sqrt[n]{14}$$

для всіх натуральних $n\geq 2$.

15. У трикутнику ABC на промені BA відмітили точку K так, що $\angle BCA=\angle KCA$, а на медіані BM відмітили точку T так, що $\angle CTK=90°$. Доведіть, що $\angle MTC=\angle MCB$.

16. Жодна грань опуклого многогранника не є трикутником. Доведіть, що існує не менше восьми його вершин, з яких виходить рівно по три ребра. (Наприклад, у куба таких вершин рівно вісім).

17. У Миколки є набір із 2014 фігурок: 1007 кутиків та 1007 зигзагів (див. рис. 1). Яку найбільшу кількість квадратів, кожен з яких складається з непарної кількості клітинок, зможе викласти Миколка, якщо кутики та зигзаги дозволяється довільним чином повертати чи перевертати? Вже викладені квадрати він не розбирає. Жодні два з викладених квадратів не мають спільних клітинок.

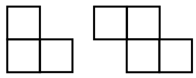

Рис. 1

18. Катруся й Михайлик мають по калькулятору. Катрусин калькулятор може або збільшити число на 1, або помножити число на 2. Калькулятор Михайлика також може збільшувати число на 1, проте множить на 3. Жодні інші операції калькулятори не виконують. У початковий момент на обох калькуляторах нулі. Катруся й Михайлик хочуть отримати на своїх калькуляторах з нуля число 2013. Яка найменша кількість операцій знадобиться для цього Катрусі, а яка Михайлику? Розв'яжіть аналогічну задачу про отримання числа 2014.

19. Господиня чекає гостей і приготувала велику каструлю компоту. Але вона достеменно не знає, скільки буде гостей: чи то 3, чи то 7, чи то 11. Якого найбільшого об'єму може бути черпак, щоб ним приготовлений напій можна було розділити *приблизно* порівну? «Приблизно» означає, що дозволені відхилення до 5%, тобто якщо гостей буде троє, то кожному повинно дістатися напою від 1/3 – 1/60 до 1/3 + 1/60, якщо семеро – від 1/7 – 1/140 до 1/7 + 1/140 від об'єму каструлі, аналогічно для 11 гостей.

20. Нехай $P(x)=a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+...+a_0$ та $Q(x)=b_n x^n+b_{n-1}x^{n-1}+...+b_0$ – два многочлени, причому їх коефіцієнти дорівнюють 1 або 2014. Відомо, що $Q(x)$ ділиться на $P(x)$. Доведіть, що $m+1$ є дільником числа $n+1$.

Примітка. При підготовці доповіді звернути увагу на:

- аналіз моделі та етапів розв'язування задачі;
- методи реалізації цих етапів;
- безпосереднє розв'язування задачі;
- висновки та узагальнення.