Завдання фінального бою X обласного турніру юних математиків

1. В аптеці є терези з двома шальками та 6 гир загальною масою 364*г*. Аптекар стверджує, що ними йому вдається зважити будь-яке ціле число грамів від 1 до 364 включно. Чи можуть його слова бути правдою? Відповідь обґрунтуйте.
2. У Миколки є 12 мишей, одинадцять з яких їдять сир з однаковою швидкістю, а одна – швидше за інших. Чи може він виявити найшвидшу мишу, маючи 5 однакових шматків сиру?
3. На столі лежать у ряд 10 карток, занумерованих у певному порядку цілими числами від 1 до 10. Миколка і Петрусь по черзі забирають собі зліва чи справа по одній крайній картці доти, поки у кожного не стане по 5 карток. Виграє той, у кого сума номерів карток виявиться більшою. Розпочинає гру Миколка. Чи є у нього виграшна стратегія? Якщо ні, то чи є вона у Петруся? Сформулюйте та розв'яжіть аналогічну задачу для 2014 карток.
4. Довжини сторін трикутника ABC задовольняють умову $c^2 = a^2 + ab.$ Доведіть, що один з кутів цього трикутника вдвічі більший від його іншого кута.
5. Коло радіуса $r = 3см,$ вписане у трикутник $ABC,$ дотикається до сторони AC у точці $K.$ Перпендикуляр, опущений з точки K на сторону $BC,$ перетинає бісектрису кута ACB у точці $E.$ Знайдіть довжину відрізка $KE.$
6. Знайдіть усі трійки натуральних чисел m, n, k таких, що $2^m + 3^n + 1 = 6^k.$
7. Розв'яжіть рівняння $(x-1)^4 - x^3 = 17.$
8. Знайдіть найменшу можливу кількість кольорів, якими можна пофарбувати всі натуральні числа так, щоб довільні два числа, різниця яких є простим числом, були пофарбованими у різні кольори.

Вказівки до розв'язування задач

1. Можуть, якщо маси гир становлять 1, 3, 9, 27, 81 та 243 грами відповідно.
2. Може. Для цього треба розбити мишей на 4 групи по 3 миші у кожній. Давши трьом групам по одному шматкові сиру, виявимо групу, в якій є найшвидша миша. Давши двом мишам цієї групи по шматкові сиру, знайдемо і її саму.
3. Виграшна стратегія є у Миколки. Пофарбуємо почергово картки у синій та жовтий кольори і порахуємо суми номерів карток кожного кольору. Ці суми різні, тому Миколці достатньо весь час брати картки того кольору, на яких відповідна сума більша. Аналогічно для 2014 карток.
4. Продовжимо сторону BC поза точку C на відрізок $CD = b.$ Запишемо умову $c^2 = a^2 + ab$ у вигляді $\frac{c}{a} = \frac{a+b}{c}.$ Отже, з подібності трикутників ABC та DBA і рівності $CD = CA$ отримуємо $\angle BCA = \angle CDA + \angle CAD = 2\angle CDA = 2\angle CAB.$
5. Нехай $I -$ центр вписаного кола, $L -$ основа перпендикуляра, опущеного з точки K на сторону $BC.$ Тоді у прямокутних трикутниках IKC та ELC кути при вершині C рівні. Тому $\angle KEI = \angle LEC = \angle KIE.$ Отже, $KE = KI = r = 3см.$
6. Для $k \le 2$ простим перебором знаходимо такі впорядковані трійки розв'язків (m, n, k): $(1, 1, 1),$ $(5, 1, 2)$ та $(3, 3, 2).$ Для $k > 2$ права частина рівняння ділиться на 8, а його ліва частина може ділитися на 8 лише при $m = 2$ та непарних $n.$ Оскільки при цьому вона не ділиться на 3, то інших розв'язків немає.
7. $(x-1)^4 - x^3 = 17 \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1)^2 - 3^2 = x^3 + 2^3 \Leftrightarrow (x^2 - 3x - 4)(x^2 - 2x + 4) = 0.$ $x_1 = 4,$ $x_2 = -1.$ Два інші корені рівняння є комплексними.
8. Числа 1, 3, 6, 8 повинні бути пофарбовані у різні кольори, тому кольорів не менше, ніж 4. Їх вистачить, якщо кожним кольором фарбувати числа з однаковими остачами від ділення на 4.