Відповіді та вказівки до розв’язування

5 клас

1. 17 ґудзиків. 16 ґудзиків буде недостатньо, бо може статися так, що взяли по 4 ґудзики кожного кольору, а 5 ґудзиків одного кольору не виявилося.
2. Трьома: (2, 3, 4), (2, 4, 5) та (3, 4, 5). Врахуйте, що сума довжин двох сторін трикутника більша за довжину третьої сторони.
3. 4 великі відра. З умови задачі випливає, що 4 малі та 2 середні відра можна замінити двома великими. Тому у другому випадку достатньо замінити 2 малі та 1 середнє відро на одне велике.
4. У Петруся є принаймні такі дві виграшні стратегії:

   а) він повторює ходи Миколки, очікуючи, поки той не поставить гирьку в 50г, а отже, програє;

   б) він відкладає набік гирьку в 50г і робить ходи іншими 49-ма гирьками довільним чином. Після останнього ходу Миколки різниця між масами викладених гирьок дорівнюватиме 50г.
5. Найменшим шуканим числом є 10223456789…9 з 220-ма цифрами 9 вкінці, записаними підряд. Врахуйте, що таке число повинно мати найменшу кількість цифр, не може починатися з нуля, менші цифри мають передувати більшим, і остача від ділення 2018 на 9 дорівнює 2. Тому цифра 2 записана двічі.

   Найбільшого натурального з такими властивостями не існує. Припустивши протилежне, допишемо справа ще один нуль і отримаємо більше від нього натуральне число з такими ж властивостями.
6. Заповнена таблиця зображена на малюнку справа. Заповнення слід розпочати з нижньої лівої кутової клітинки, потім перейти до центральної клітинки, тоді – до інших клітинок цієї ж діагоналі і т.д., вибираючи кожен раз клітинку, в якій записати цифру можна однозначно.

3	4	1	2	5
2	5	3	4	1
4	1	2	5	3
5	3	4	1	2
1	2	5	3	4

6 клас

1. Наприклад, $a = 9, b = 1, c = 7, d = 8$. Тоді $\dfrac{9}{1 - \dfrac{7}{8}} = 72$.

2. Додавання А + А виконується у трьох різних розрядах, при цьому результати записуються трьома різними буквами У, Н та Р. Але це неможливо, бо А + А може набувати лише два різні значення: ця сума є деяким парним числом, якщо не було перенесення одиниці з попереднього розряду, або наступним за ним непарним числом, якщо таке перенесення відбулося.

3. 360 грамів. Якщо груша, яблуко і слива разом важать S грамів, то додавши ці три показники ваги, отримаємо, що
$$3S - S = 230 + 200 + 290.$$

4. $P = 1\,2 + 6 + 6 + 8 - 4 =$. Врахуйте, що периметр початкового прямокутника дорівнює довжині контуру, який обмежує виділені 5 клітинок. При додаванні перших чотирьох периметрів додатково був порахований ще й периметр центрального прямокутника.

5. Ні. Зігравши 4 партії, учень виграв принаймні у трьох інших учасників турніру (переможець міг виграти у чотирьох). Отже, принаймні 18 учасників турніру зазнали поразок. Але це неможливо, бо переможець турніру не програв нікому.

6. 18162. Для знаходження добутку заданих чисел представимо 189 як різницю чисел 200 та 11 і порахуємо різницю отриманих добутків другого множника, записаного цифрами 6, на ці числа. У результаті дістанемо число 12599…99874, в якому кількість дев’яток, записаних посередині, дорівнює 2015. Можна також шукати закономірність, перемножуючи 189 на числа з меншою кількістю цифр 6.

7 клас

1. Наприклад, $S = 594 = 55 + 59 + 54 + 99 + 95 + 94 + 44 + 49 + 45$. Якщо ж вважати, що й у двоцифрових числах цифри не повторюються, то отримаємо $S = 132 = 13 + 31 + 32 + 23 + 12 + 21$.

2. $\frac{6}{11}$ місяця. Врахуйте, що за 6 місяців вони разом з'їдять $6+3+2=11$ возів сіна. Тому на один віз вони витратять в 11 разів менше часу.

3. $S=99$. Спочатку доводимо рівність $xt=yz$ для площ довільних чотирьох прямокутників таблиці

x	y
z	t

Далі знаходимо площі інших чотирьох прямокутників на малюнку справа.

18	6	9
12	4	6
24	8	12

4. 5050505. Врахуйте що $\overline{a0a0a0a}=a\cdot 1010101$ та скористайтеся рівністю $3^2+4^2=5^2$.

5. З умови задачі випливає, що $a^3=1+a$. Тому

$$\frac{a^6-2a^4}{1-a^2}=\frac{(1+a)(1+a)-2a(1+a)}{1-a^2}=\frac{(1+a)(1-a)}{1-a^2}=1.$$

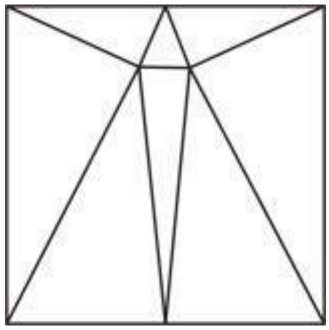
6. Натуральне число n має 2 дільники тоді і тільки тоді, коли воно є простим числом. Число $n+1$ має 3 дільники тоді і тільки тоді, коли воно є квадратом простого числа. Обидві ці умови задовольняє лише число $n=3$. Тому $n+2018=2021$, дільниками якого є такі 4 числа: 1, 43, 47 та 2021.

8 клас

1. 28%. Якщо зараз у класі Михайлика є n учнів, серед яких x відмінників, то отримуємо рівності $\frac{x-1}{n}=\frac{24}{100}$ та $\frac{x-1}{n-1}=\frac{25}{100}$. Звідси знаходимо $n=25,\ x=7$.

2. Таке, наприклад, можливе, якщо на одній шальці всі гирьки важать непарну, а на іншій – парну кількість грамів, а кожен учень, який виходить, забирає гирьку найбільшої маси з тих, що залишилися. Останньою залишиться гирька масою 1г. Інша гирька залишитися не зможе, бо, якщо гирька в 1г буде забрана, то після цього протилежна шалька не переважить.

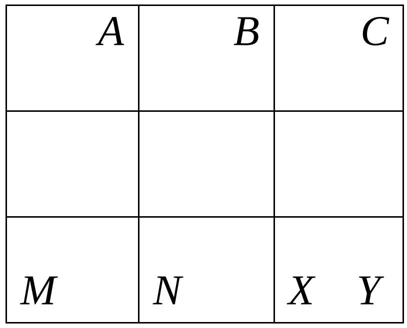
3. Вони обидва мають рацію. Приклад для Миколки наведений нижче на малюнку справа. Далі відзначимо, що довільний гострокутний трикутник можна розрізати на 4 гострокутні трикутники, провівши у ньому середні лінії.



Оскільки $2018-8=2010$ ділиться на 3, то здійснивши таку процедуру з проведенням середніх ліній 670 разів, Петрусь, відштовхуючись від малюнка Миколки, отримає 2018 гострокутних трикутників.

4. $n=10$. При цьому добуток чисел 6 та 7 дорівнює сумі решти восьми чисел. Якщо сума перших n таких чисел дорівнює S, а вибраними двома числами є x та y, то отримуємо рівняння $xy=S-x-y \Leftrightarrow (x+1)(y+1)=S+1$. Для $n=10$ маємо $S=55$.

5. Врахуйте, що $\angle MAN = \angle XCY$, $\angle MBN = \angle NCX$ (див. малюнок справа) . Тому вказана сума кутів дорівнює куту MCY, тобто дорівнює 45 градусів.



6. $x=1+\sqrt{2}$. Прирівнявши обидві частини рівняння до $y \geq 0$, отримаємо систему рівнянь $\begin{cases} 2x+1=y^2, \\ x^2-1=2y. \end{cases}$. Додавши рівняння цієї системи, знайдемо $y=x$ або $y=-x-2$, звідки отримуємо два квадратні рівняння $x^2-2x-1=0$ та $x^2+2x+3=0$. Від'ємний корінь першого з них є стороннім, а друге з цих рівнянь дійсних коренів не має.

Можна було також піднести обидві частини заданого рівняння до квадрату і звести його до рівняння

$$\left(x^2-2x-1\right)\left(x^2+2x+3\right)=0.$$

Також можна скористатися властивостями графіків взаємно обернених функцій.