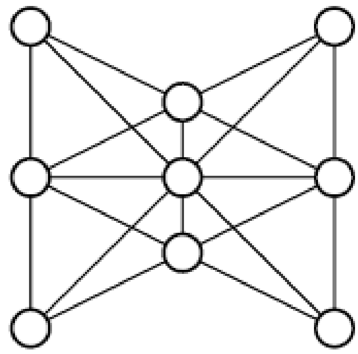
Завдання XIV обласного турніру юних математиків 2018-2019 н.р.

1. Робот придумав шифр для запису слів. Він замінив деякі букви алфавіту одноцифровими чи двоцифровими числами (різні букви – різними числами), використовуючи лише цифри 1, 2, 3. Спочатку він зашифрував себе: РОБОТ=3112131233. Потім записав своїм шифром слово МАТЕМАТИКА. Але дуже здивувався, що шифри слів КРОКОДИЛ та БЕГЕМОТ виявилися однаковими. Запишіть цим шифром слово АЛГЕБРА.
2. Оргкомітет XIV обласного турніру юних математиків відзначив переможця турніру в особистій першості зачарованою коробкою з чотирнадцятьма цукерками. Але, як тільки він забирав з коробки деяку кількість цукерок і клав їх до себе в сумку, частина цукерок із сумки (принаймні одна, а, можливо, й усі) миттєво поверталася назад у коробку. При цьому кожного разу кількості таких цукерок (чи раніше покладених у сумку, чи повернутих з неї у коробку) мали бути різними. Якщо ж на якомусь кроці дотриматися останньої вимоги не вдавалося, то коробка таємниче зникала разом з цукерками, які на цей момент у ній залишалися. Яка найбільша кількість цукерок може залишитися у сумці переможця турніру на момент зникнення чарівної коробки?
3. На столі лежать 9 яблук, утворюючи при цьому 10 рядів по три яблука як на малюнку справа. Юному математику відомо, що у дев'ятьох рядах сумарні маси трьох яблук однакові, а в одному – така маса яблук є більшою. У нього є терези з двома шальками без гир. Він може взяти зі столу довільну парну кількість яблук і, скориставшись терезами, повернути їх на стіл, кожне на своє попереднє місце. За яку найменшу кількість зважувань він гарантовано зуміє виявити ряд, в якому сумарна маса трьох яблук є найбільшою?



4. Площину розбили на одиничні квадратики й у кожен квадратик записали по одному натуральному числу. Після цього для кожного квадратика порахували різницю: добуток чисел, записаних у сусідніх з ним квадратиках зліва та справа, мінус добуток чисел, записаних у сусідніх з ним квадратиках знизу та зверху. Чи могло статися так, що усі такі різниці дорівнюють 11 ?
5. Чи існують 2018 попарно різних натуральних чисел таких, що сума обернених до них чисел дорівнює 1.
6. Крива на площині у деякій декартовій системі координат є графіком функції $y=\sin x$. Чи може вона в іншій декартовій системі координат бути графіком функції $y=\sin^2 x$?
7. Числа Фібоначчі визначаються рівностями: $F_1=F_2=1$, $F_{n+2}=F_n+F_{n+1},\ n\geq 1$. Для кожного натурального числа n розв'яжіть систему рівнянь:
$$\begin{cases} F_n x+F_{n+1}y^2=F_{n+2}z^3, \\ F_n y+F_{n+1}z^2=F_{n+2}x^3, \\ F_n z+F_{n+1}x^2=F_{n+2}y^3. \end{cases}$$
8. Нехай $a, b, c -$ довільні додатні числа; $(x,\ y,\ z)-$ деяка їх перестановка. Дослідіть, яких значень може набувати вираз $A=\dfrac{x}{a+b}+\dfrac{y}{b+c}+\dfrac{z}{c+a}$.
9. У верхньому рядку та лівому стовпці таблиці 2018×2018 проставлено одиниці. Число у будь-якій іншій комірці таблиці дорівнює сумі усіх чисел, які стоять водночас ліворуч і вище від цієї комірки. Знайдіть усі комірки, числа в яких націло діляться і на свого сусіда зверху, і на свого сусіда ліворуч.

10. Алісі якось наснилися 2018 гномів, що стояли по колу. Кожен із гномів мав спочатку деяку парну (можливо, нульову) кількість цукерок. Далі сталося таке: усі гноми одночасно поділили свої цукерки на дві рівних частини та віддали одну частину своєму сусідові зліва, а іншу – своєму сусідові справа. У підсумку у деякого гнома опинилася 1 цукерка, у наступного за годинниковою стрілкою – 2 цукерки, у наступного – 3 цукерки і т. д.; в останнього (того, що стояв перед першим гномом) стало, відповідно, 2018 цукерок. Чи могло б таке статися насправді?

11. Знайдіть усі натуральні числа p та q, які задовольняють рівняння $\operatorname{arctg}\frac{1}{p}+\operatorname{arctg}\frac{1}{q}=\frac{\pi}{4}$.

12. Нехай $x=2p$, $x+1=3q$, $x+n=2r$, $x+n+1=3s$, де $p, q, r, s-$ деякі прості числа, $n-$ натуральне число. Доведіть, що $n\geq 12$.

13. Доведіть нерівність $C_{30}^{20}+C_{31}^{20}+C_{32}^{20}+\ldots+C_{49}^{20}+C_{50}^{20}>2^{39}$, де $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

14. Назвемо дві трійки $A=(a_1, a_2, a_3)$ та $B=(b_1, b_2, b_3)$ натуральних чисел (не обов'язково різних) еквівалентними, якщо $a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3$ та $a_1a_2a_3=b_1b_2b_3$. При цьому трійки, які відрізняються лише порядком розташування елементів, будемо вважати за одну й ту ж трійку. Доведіть, що існує нескінченна кількість пар різних еквівалентних трійок A та B таких, що жодна пара не утворюється з іншої пари множенням усіх шести елементів на одне й те ж число.

15. Знайдіть кількість непорожніх підмножин множини $\{1, 2,\ldots, 1009\}$ із сумою елементів, що ділиться на 2018.

16. У прямокутній шоколадній плитці розміру 20×18 є дольки двох кольорів – білі й чорні. Ліва верхня долька завжди чорна, права нижня – завжди біла; кольори інших дольок задаються довільно. Ганнуся й Петрик почергово відрізають від шоколадки шматки Г-подібним ножем і з'їдають їх. Кожним ходом гравець забирає певну дольку і все з умовного прямокутника, в якому ця долька знаходиться у лівому верхньому куті. Починає гру Ганнуся. Програє той, хто перший з'їсть чорну дольку. Доведіть, що при довільному розфарбуванні шоколадки Ганнуся має виграшну стратегію.

17. Під час шахової партії залишилося п'ять фігур (або пішаків) на клітинках a1, b1, b5, c2, c4. Ганнуся подивилася на шахівницю і запитала, чий хід. Отримавши відповідь, вона змогла визначити останній хід кожного із суперників. Наведіть приклад такої позиції.

18. Нехай $K, T-$ точки дотику вписаного та зовнівписаного кіл до сторони BC трикутника ABC, $M-$ середина сторони BC. Побудуйте циркулем і лінійкою трикутник ABC за променями AK та AT (на них точки K, T не відмічено) та точкою M.

19. У гострокутному трикутнику ABC провели висоту AH. На відрізках AB, BH, CH та AC як на діаметрах побудовані кола $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ та ω_4 відповідно. Окрім точки H, кола ω_1 та ω_3 перетинаються у точці P, а кола ω_2 та ω_4- у точці Q. Прямі BQ та CP перетинаються у точці N. Доведіть, що ця точка лежить на середній лінії трикутника ABC, яка паралельна до BC.

20. Дослідіть, чи для кожного скінченного набору точок у просторі існує незамкнена ламана без самоперетинів з вершинами в усіх цих точках (і тільки у них).

Для узагальнення окремих задач дивіться завдання XXI Всеукраїнського турніру юних математиків імені професора М.Й. Ядренка на сайті http://www.tym.in.ua