Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника
Інститут математики НАН України
Інститут прикладних проблем механіки і математики
імені Я. С. Підстригача НАН України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Національний університет "Львівська політехніка"
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича

VI ВСЕУКРАЇНСЬКА МАТЕМАТИЧНА КОНФЕРЕНЦІЯ ІМЕНІ Б. В. ВАСИЛИШИНА

"НЕЛІНІЙНІ ПРОБЛЕМИ АНАЛІЗУ"

(26 – 28 вересня 2018 року, Івано-Франківськ – Микуличин)

ТЕЗИ ДОПОВІДЕЙ

Івано-Франківськ — 2018

УДК 51(063)-03
ББК 22-1
П99

П99 Нелінійні проблеми аналізу : VI Всеукраїнська математична конференція імені Б. В. Василишина : Тези доповідей, (26 – 28 вересня 2018 р., Івано-Франківськ – Микуличин). – Івано-Франківськ : Голіней, 2018. – 92 с.

Організаційний комітет конференції
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника

Співголови:
Загороднюк А. В., доктор фіз.-мат. наук, професор, проректор з наукової роботи;
Шарин С. В., доктор фіз.-мат. наук, проректор з науково-педагогічної роботи.

Члени оргкомітету:
Пилипів В. М., доктор фіз-мат. наук, професор, декан факультету математики та інформатики;
Заторський Р. А., доктор фіз-мат. наук, професор, завідувач кафедри диференціальних рівнянь і прикладної математики;
Василишин П. Б., канд. фіз-мат. наук, доцент;
Гой Т. П., канд. фіз-мат. наук, доцент;
Казмерчук А. І., канд. фіз-мат. наук, доцент;
Костишин Л. П., канд. фіз-мат. наук;
Мазуренко В. В., канд. фіз-мат. наук, доцент;
Махней О. В., канд. фіз-мат. наук, доцент.

Секретар:
Савка І. Я., канд. фіз-мат. наук.

У збірнику представлені тези доповідей VI Всеукраїнської математичної конференції імені Б. В. Василишина "Нелінійні проблеми аналізу". Розглянуто питання побудови і дослідження властивостей розв'язків звичайних диференціальних рівнянь, рівнянь із частинними похідними, інтегро–диференціальних та диференціально–операторних рівнянь, актуальні питання теорії функцій, функціонального аналізу і прикладної математики.

Гранична теорема для розподілу кількості частинок, що емігрували з системи

Базилевич І.Б.
Львівський національний університет імені Івана Франка
Якимишин Х.М.
Львівський національний університет імені Івана Франка

Розглянемо однорідний марківський гіллястий процес з одним типом частинок та міграцією $\mu(t)$, $t \in [0, \infty)$ [1].

Нехай $\tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3,\ \ldots$ — незалежні випадкові величини, які визначають інтервали між перетвореннями частинок у системі. Випадкові величини θ_1, θ_2, $\theta_3, \ldots$ визначаються наступним чином

$$\theta_0 = 0,\ \theta_1 = \tau_1,\ \theta_2 = \tau_1 + \tau_2,\ \ldots,\ \theta_n = \tau_1 + \ldots + \tau_n,\ \ldots$$

$\rho(t)$ — кількість перетворень у системі до моменту часу t.

Випадковий процес $\nu(t)$ визначає кількість частинок процесу $\mu(t)$, які емігрували до моменту часу t

$$\nu(t) = \nu_0 + \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_{\rho(t)}, \tag{1}$$

де ν_k $(k = 1, \ldots, \rho(t))$ — кількість частинок, що емігрували під час k-го перетворення у системі, причому,

$$\nu(0) = \nu_0 = 0.$$

Розподіл процесу $\nu(t)$ задається перехідними ймовірностями

$$P\{\nu(t+\Delta t) = j \mid \nu(t) = i,\ \mu(t) = n\} =$$
$$= \left\{ \begin{array}{ll} \left\{ \begin{array}{ll} r_0 \Delta t + o(\Delta t), & i = j; \\ r_{j-i} \Delta t + o(\Delta t), & i < j < i + n; \\ \sum_{l=n}^{m} r_l \Delta t + o(\Delta t), & j = i + n; \\ o(\Delta t), & \textit{в інших випадках}; \end{array} \right. & m > n; \\ \left\{ \begin{array}{ll} r_{j-i} \Delta t + o(\Delta t), & i \le j \le i + m; \\ o(\Delta t), & \textit{в інших випадках}; \end{array} \right. & m \le n. \end{array} \right.$$

Теорема 1. *Нехай $\nu(t)$ — кількість частинок, що емігрували за період часу $[0, t]$ з процесу $\mu(t)$, тоді*

$$\lim_{t \to \infty} P\left\{ \frac{\nu(t) - M\nu(t)}{\sqrt{D\nu(t)}} < x | \mu(t) > 0 \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

[1] Якимишин Х.М. Рівняння для твірної функції гіллястого процесу з міграцією // Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. – 2017. – № 84. – С. 119-125.

e-mail: i_bazylevych@yahoo.com, yakymyshyn_hrystyna@ukr.net

Нелокальна багатоточкова задача для рівнянь з частинними похідними парного порядку зі сталими коефіцієнтами

Баранецький Я.О.
Національний університет "Львівська політехніка"
Каленюк П.І.
Національний університет "Львівська політехніка"

В області $G := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1, x_2 < 1\}$ вивчається задача

$$L(-D_1^2, -D_2^2)u := \sum_{q=0}^{n} a_q D_1^{2q} D_2^{2n-2q} u(x) = f(x),\ x \in G, \tag{1}$$

$$\ell_{s,1}u := D_1^{2s-2}u(0, x_2) + D_1^{2s-2}u(1, x_2) + \ell_s^1 u = 0,\ s = 1, 2, \dots, n, \tag{2}$$

$$\ell_{n+s,1}u := D_1^{2s-2}u(0, x_2) - D_1^{2s-2}u(1, x_2) = 0,\ s = 1, 2, \dots, n, \tag{3}$$

$$\ell_{s,2}u := D_2^{2s-2}u(x_1, 0) + D_2^{2s-2}u(x_1, 1) + \ell_s^2 u = 0,\ s = 1, 2, \dots, n, \tag{4}$$

$$\ell_{n+s,2}u := D_2^{2s-1}u(x_1, 0) + D_2^{2s-1}u(x_1, 1) = 0,\ s = 1, 2, \dots, n, \tag{5}$$

де $D_1,\ D_2$ – оператори диференціювання за змінною $x_1,\ x_2$ відповідно,

$$\ell_s^1 u := \sum_{q=0}^{k_{s,1}} \sum_{r=0}^{r_1} b_{s,q,r,1} D_1^q u(x_{1,r}, x_2),\ s = 1, 2, ..., n, \tag{6}$$

$$\ell_s^2 u := \sum_{q=0}^{k_2} \sum_{r=0}^{r_2} b_{q,r,2} D_2^{q+2s-2} u(x_1, x_{2,r}),\ s = 1, 2, ..., n. \tag{7}$$

$0 = x_{1,1} < x_{1,2}, ..., x_{1,r_1} \le 1,\ 0 = x_{2,1} < x_{2,2}, ..., x_{2,r_2} \le 1,\ b_{s,q,r,1},\ b_{s,r,2} \in \mathbb{R}$, $q = 0, 1, ..., k_{s,j},\ k_{s,j} < 2n,\ j = 1, 2,\ r = 0, 1, ..., r_j,\ s = 1, 2, \dots, n$.

Нехай $L : L_2(G) \to L_2(G)$ – оператор задачі (1)–(7), $Lu := L(-D_1^2, -D_2^2)u$, $u \in D(L),\ D(L) := \{u \in L_2(G) : \ell_{s,j}u = 0,\ s = 1, 2, ..., 2n,\ j = 1, 2\}$.

Припущення $P_1 : b_{s,q,r,1} = -(-1)^q b_{q,1,r_j-r,1},\ b_{q,r,2} = -(-1)^q b_{q,r_j-r,2},\ j = 1, 2,\ x_{2,r} = 1 - x_{2,r_2-r},\ x_{1,r} = 1 - x_{1,r_2-r},\ r = 0, 1, ..., r_j,\ s = 1, 2, \dots, n,\ j = 1, 2.$

Припущення $P_2 : k_{s,1} \le 2s - 2,\ s = 1, 2, ..., n,\ k_2 < 2.$

Припущення P_3 : існує додатнє число C_1 таке, що для будь-яких дійсних чисел $\mu_1,\ \mu_2$ справджується нерівність

$$C_1|\mu|^n \le |L(\mu_1, \mu_2)|, \quad \mu := (\mu_1, \mu_2),\ |\mu|^2 := |\mu_1|^2 + |\mu_2|^2.$$

Теорема 1. *Нехай справджується припущення P_1. Тоді для будь-яких $a_q,\ b_{s,q,r,1},\ b_{s,r,2} \in \mathbb{R}$ оператор L має повну і мінімальну в просторі $L_2(G)$ систему кореневих функцій $V(L)$.*

Теорема 2. *Нехай справджуються припущення P_1–P_3. Тоді система функцій $V(L)$ є базою Ріса простору $L_2(G)$ та для будь-якої функції $f \in H_1$ існує единий розв'язок задачі (1)–(7).*

e-mail: baryarom@ukr.net, pkalenyuk@gmail.com

Асимптотика логарифмічної похідної цілих функцій повільного зростання з нулями на логарифмічній спіралі

Басюк Ю.В.
Львівський національний університет імені Івана Франка
Заболоцький М.В.
Львівський національний університет імені Івана Франка

Позначимо через L клас таких функцій зростання υ, що $r\upsilon'(r)/\upsilon(r) \to \infty$ при $r \to +\infty$; $H_0(\upsilon)$ — клас таких цілих функцій нульового порядку, що $0 < \varlimsup\limits_{r\to+\infty} n(r)/\upsilon(r) < +\infty$, де $n(r) = n(r, 0, f)$ — кількість нулів функції f у крузі $\{z : |z| \leqslant r\}$; $F(z) = zf'(z)/f(z)$ — логарифмічна похідна функції f; $l_\theta^c = \{z : z = re^{i(\theta + c\ln r)},\ 1 \leqslant r < +\infty\}$, $c \in \mathbb{R}$, $\theta \in [0, 2\pi)$ — логарифмічна спіраль.

Теорема 1. *Нехай $\upsilon \in L$, $f \in H_0(\upsilon)$, нулі функції f розташовані на логарифмічній спіралі l_θ^c, $n(r) = \upsilon(r) + o(\upsilon(r))$, $r \to +\infty$. Тоді*

$$\forall\varphi \in (\theta, \theta + 2\pi) : F(re^{i(\varphi + c\ln r)}) = \upsilon(r) + o(\upsilon(r)),\ r \to +\infty,$$

причому останнє співвідношення виконується рівномірно щодо $\varphi \in [\theta + \delta, \theta + 2\pi - \delta]$, $0 < \delta < 1$.

Теорема 2. *Нехай $\tilde{\upsilon} \in L$, $\upsilon(r) = \int\limits_1^r \frac{\tilde{\upsilon}(t)}{t}dt$. Якщо за умов теореми 1*

$$n(r) = \upsilon(r) + o(\tilde{\upsilon}(r)),\ r \to +\infty,$$

то для довільного $\varphi \in (\theta, \theta + 2\pi)$

$$F(re^{i(\varphi + c\ln r)}) = \upsilon(r) + i(\varphi - \theta - \pi)\tilde{\upsilon}(r) + o(\tilde{\upsilon}(r)),\ r \to +\infty.$$

Зауваження. *Легко бачити, що якщо $\tilde{\upsilon} \in L$, то $\upsilon \in L$ і $\tilde{\upsilon}(r) = o(\upsilon(r))$, $r \to +\infty$.*

[1] Заболоцький М.В., Мостова М.Р. Асимптотичне поводження логарифмічної похідної цілих функції нульового порядку // Карпатські матем. публ. – 2014. – Т. 6, № 2. – С. 237-241.

e-mail: yuliya.basyuk.92@gmail.com, mykola.zabolotskyy@lnu.edu.ua

Усереднення в m-частотних системах із запізненням та нелокальними умовами

Бігун Я.Й.
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Проблема. *Методом усереднення багаточастотні системи звичайних диференціальних рівнянь досліджувались в монографії* [1], *системи з лінійно перетвореним аргументом й інтегральними умовами — в* [2]. *У даній роботі розглянуто питання існування розв'язку та обґрунтовано метод усереднення за швидкими змінними, коли задано нелокальні умови спеціального вигляду, для m-частотної системи вигляду* [2]

$$\frac{da}{d\tau} = X(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta), \tag{1}$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + Y(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta), \tag{2}$$

де $\tau \in [0, L]$, $a \in \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathbb{T}^m$, $m \geqslant 1$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 \ll 1$, $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$, $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_s)$, $\lambda_i, \theta_j \in (0; 1]$, $a_\Lambda = (a_{\lambda_1}, \dots, a_{\lambda_r})$, $a_{\lambda_i}(\tau) = a(\lambda_i \tau)$, $i = \overline{1, r}$, $\varphi_\Theta = (\varphi_{\theta_1}, \dots, \varphi_{\theta_s})$, $\varphi_{\theta_j}(\tau) = \varphi(\theta_j \tau)$, $j = \overline{1, s}$.

Для розв'язку системи (1), (2) розглянуто умови вигляду

$$a(0) = a_0, \tag{3}$$

$$a(L) = \int_0^1 \Bigg[\sum_{j=1}^{s} b_j(\tau, a_\Lambda(\tau)) \varphi_{\theta_j}(\tau) + g(\tau, a_\Lambda(\tau), \varphi_\Theta(\tau)) \Bigg] d\tau \tag{4}$$

та деякі їх узагальнення. Тут $b_j(\tau, a_\Lambda)$ — задані матриці порядку m.

Багаточастотні системи із запізненням та інтегральними умовами досліджувались в [3]. Основною трудністю дослідження таких систем є резонанси частот. Умовою резонансу в точці $\tau \in [0, L]$ є виконання рівності

$$\sum_{\nu=1}^{s} \theta_\nu (k_\nu, \omega(\theta_\nu \tau)) = 0, \quad k_\nu \in \mathbb{R}^m, \quad \|k\| \neq 0.$$

Теорема 1. *Нехай: 1) функції в правих частинах (1), (2) і (4) — достатньо гладкі;*

2) визначник Вронського $V(\tau)$, побудований за системою функцій $\big\{\omega(\theta_1 \tau), \dots, \omega(\theta_s \tau)\big\}$, відмінний від нуля при $\tau \in [0, L]$;

3) існує единий розв'язок усередненої задачі, який лежить в області разом із деяким ρ-околом;

4) матриця

$$\sum_{j=1}^{s} \int_0^L b_j(\tau, \overline{a}_\Lambda(\tau)) d\tau$$

— невироджена.

Тоді для досить малого $\varepsilon_0 > 0$ *існує єдиний розв'язок задачі* (1)–(4) *і для всіх* $\tau \in [0, L]$ *і* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *виконується оцінка*

$$\|a(\tau, \overline{y} + \mu, \overline{\psi} + \xi, \varepsilon) - \overline{a}(\tau, \overline{y})\| + \\ + \|\varphi(\tau, \overline{y} + \mu, \overline{\psi} + \xi, \varepsilon) - \overline{\varphi}(\tau, \overline{y}, \overline{\psi}, \varepsilon) - \eta(\varepsilon)\| \leqslant c_5 \varepsilon^{\alpha}, \tag{5}$$

де $\alpha = (rm)^{-1}$, $\|\eta(\varepsilon)\| \leqslant c_6 \varepsilon^{\alpha - 1}$, $\overline{a}(\tau, \overline{y}), \overline{\varphi}(\tau, \overline{y}, \overline{\psi}, \varepsilon)$ *— розв'язок усередненої системи*

$$\frac{d\overline{a}}{d\tau} = X_0(\tau, \overline{a}_\Lambda), \tag{6}$$

$$\frac{d\overline{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + Y_0(\tau, \overline{a}_\Lambda) \tag{7}$$

з умовами для розв'язку, аналогічними (3), (4).

Зауваження. *Усереднена задача значно простіша порівняно з* (1)–(4), *оскільки праві частини рівнянь* (6) *і* (7) *не залежать від* $\overline{\varphi}$. *Компонента розв'язку* $\overline{a}(\tau)$ *знаходиться із* (6), $\overline{a}(0) = a_0$, *після чого знаходження компоненти розв'язку* $\overline{\varphi}$ *зводиться до інтегрування з початковою умовою, що знаходиться із системи лінійних алгебраїчних рівнянь.*

Приклад 2. *Одержані результати проілюстровано на модельній задачі*

$$\frac{da}{d\tau} = 1 + \cos(\varphi - 2\varphi_\theta), \qquad \theta = 0.5;$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{1 + 2\tau}{\varepsilon}, \qquad \tau \in [0, 1];$$

$$a(0) = a_0, \qquad a(1) = \int\limits_0^1 \varphi(\tau) d\tau.$$

[1] Самойленко А.М., Петришин Р.І. Математичні аспекти теорії нелінійних коливань. – Київ: Наукова думка, 2004.

[2] Бігун Я.Й., Краснокутська І.В., Петришин Р.І. Усереднення в багаточастотних системах із лінійно перетвореними аргументами і багатоточковими та інтегральними умовами // Буковинський математичний журнал. – 2016. – Т. 4, № 3-4. – С. 30-35.

[3] Henderson Johnny and Luca Rodica Boundary Value Problems for Systems of Differential, Difference and Fractional Equation. – Kluwer, Dordrecht–Boston–London, Netherlands, 2016.

[4] Jankowski T. Diferential equations with integral boundary conditions // Journal Comput. Appl. Math. – 2002. – Vol. 147. – P. 1-8.

e-mail: yaroslav.bihun@gmail.com

Кутові області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду

Боднар Д.І.
Тернопільський національний економічний університет
Біланик І.Б.
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

Об'єктом дослідження є гіллясті ланцюгові дроби (ГЛД) спеціального вигляду

$$b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{1}{b_{i(k)}}, \tag{1}$$

де $b_0, b_{i(k)} \in \mathbb{C}$, $i(k) \in \mathcal{I}, \mathcal{I} = \{i_1 i_2 \dots i_k : 1 \leq i_k \leq i_{k-1} \leq \dots \leq i_0; k \geq 1; i_0 = N\}$, N — фіксоване натуральне число.

Теорема 1. *Нехай елементи N-вимірного ГЛД (1) задовольняють умови*

$$\mathrm{Re}(b_{i(k)}) > \delta,\ 0 < \delta < 1,\ \left|\arg b_{i(k)}\right| < \theta,\ \theta < \frac{\pi}{4},\ i(k) \in \mathcal{I}. \tag{2}$$

Тоді ГЛД (1) збігається і справджується оцінка швидкості збіжності

$$|f_m - f_{Nn}| < \frac{M_N}{\ln(1 + \alpha n)},\ m \geq Nn,$$

де M_N і α — деякі додатні сталі, що не залежать від m і n.

Зауваження. *Твердження теореми залишається правильним, якщо умови (2) теореми замінити умовами:*

a)

$$\mathrm{Re}(b_{i(k)}) > 0;$$

b)

$$\begin{cases} \mathrm{Im}\left(b_{i(2l)}\right) > 0, \\ \mathrm{Im}\left(b_{i(2l+1)}\right) < 0, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} \mathrm{Im}\left(b_{i(2l)}\right) < 0, \\ \mathrm{Im}\left(b_{i(2l+1)}\right) > 0, \end{cases}$$

$l = 1, 2, \dots$

[1] Боднар Д.И. Ветвящиеся цепные дроби. – Киев: Наук. думка, 1986. – 176 с.
[2] Bodnar D.I., Bilanyk I.B. Convergence criterion for branched continued fractions of the special form with positive elements // Карпат. мат. публікації. – 2017. – Т. 9, № 1. – P. 13-21.
[3] Gragg W.B., Warner D.D. Two constructive results in continued fractions // SIAM J. Numer. Anal. – 1983. – Vol. 20, No. 3. – P. 1187-1197.

e-mail: bodnar4755@ukr.net, i.bilanyk@ukr.net

Послідовність мероморфних функцій багатьох змінних відповідна до формального кратного ряду Лорана

Боднар Д.І.
Тернопільський національний економічний університет
Дмитришин Р.І.
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

Нехай N — фіксоване натуральне число, $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_N)$ — мультиіндекс. Для $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^N$ і $\mathbf{z} \in \widehat{\mathbb{C}}^N$, де $\widehat{\mathbb{C}}^N$ — розширений N-вимірний комплексний простір, $|\mathbf{k}| = k_1 + k_2 + \ldots + k_N$, $\mathbf{z}^{\mathbf{k}} = z_1^{k_1} z_2^{k_2} \ldots z_N^{k_N}$.

За П. Хенріці [2] вираз

$$L(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k} \geq \mathbf{m}} c_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} = \sum_{k_1=m_1}^{\infty} \sum_{k_2=m_2}^{\infty} \ldots \sum_{k_N=m_N}^{\infty} c_{k_1,k_2,\ldots,k_N} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \ldots z_N^{k_N}, \qquad (1)$$

де $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^N$, $c_{\mathbf{k}} \in \mathbb{C}$, $\mathbf{k} \geq \mathbf{m}$, і $c_{\mathbf{m}} \neq 0$ або всі $c_{\mathbf{k}} = 0$, назвемо формальним кратним рядом Лорана. Множина $\mathbb{L}^N$ усіх формальних кратних рядів Лорана утворює поле над $\mathbb{C}$ відносно операцій додавання і множення (див. [1, 2]).

Нехай функція багатьох змінних $R(\mathbf{z})$ мероморфна в початку координат, тобто припустимо, що існує мультиіндекс $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}_+^N$ такий, що $R(\mathbf{z})\mathbf{z}^{\mathbf{m}}$ є голоморфна в початку координат (тобто, у відкритому полікрузі, що містить початок координат). Для функції багатьох змінних $R(\mathbf{z})$ означимо її розвинення в формальний кратний ряд Лорана (1) в початку координат (таке, що збігається у відкритому полікрузі із виколотим початком координат) через $\Lambda(R)$, тобто задамо відображення $\Lambda : R(\mathbf{z}) \to \Lambda(R)$. Послідовність функцій багатьох змінних $\{R_n(\mathbf{z})\}$, мероморфних в початку координат, є відповідною до формального кратного ряду Лорана $L(\mathbf{z})$, якщо

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(L - \Lambda(R_n)) = \infty,$$

де λ — функція означена у такий спосіб: $\lambda : \mathbb{L}^N \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$; якщо $L = 0$, то $\lambda(L) = \infty$; якщо $L \neq 0$, то $\lambda(L) = |\mathbf{m}|$, де $\mathbf{m}$ визначається із (1). Якщо послідовність $\{R_n(\mathbf{z})\}$ є відповідною до формального кратного ряду Лорана $L(\mathbf{z})$, то порядок відповідності функції багатьох змінних $R_n(\mathbf{z})$ визначимо так:

$$\nu_n = \lambda(L - \Lambda(R_n)).$$

У цьому випадку за означенням функції λ випливає, що формальні кратні ряди Лорана $L(\mathbf{z})$ і $\Lambda(R_n)$ збігаються за всіма однорідними поліномами до степеня $(\nu_n - 1)$ включно.

Узагальнимо означення відповідності у такий спосіб: послідовність функцій багатьох змінних $\{R_n(\mathbf{z})\}$, мероморфних в $\mathbf{z} = \boldsymbol{\infty}$, є відповідною до формального кратного ряду Лорана

$$L^*(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k} \geq \mathbf{m}} c_{-\mathbf{k}} z^{-\mathbf{k}},$$

де $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^N$, $c_{-\mathbf{k}} \in \mathbb{C}$, $\mathbf{k} \geq \mathbf{m}$, і $c_{-\mathbf{k}} \neq 0$ або всі $c_{-\mathbf{k}} = 0$, в точці $\mathbf{z} = \boldsymbol{\infty}$, якщо послідовність функцій багатьох змінних $\{R_n(\mathbf{1}/\mathbf{w})\}$, мероморфних в початку координат, є відповідною до формального кратного ряду Лорана $L(\mathbf{1}/\mathbf{w})$, отриманому із $L^*(\mathbf{z})$ заміною z_k на $1/w_k$, $1 \leq k \leq N$. За аналогією відповідність в точці $\mathbf{z} = \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^N$, можна означити, розглядаючи $\mathbf{z} = \mathbf{w} + \mathbf{a}$.

Теорема 1. *Нехай $\{R_n(\mathbf{z})\}$ — послідовність функцій багатьох змінних, мероморфних в початку координат. Тоді:*

(А) *Існує формальний кратний ряд Лорана* (1) *такий, що $\{R_n(\mathbf{z})\}$ відповідна до L тоді і лише тоді, коли*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(\Lambda(R_{n+1}) - \Lambda(R_n)) = \infty. \tag{2}$$

(Б) *Якщо виконується* (2)*, то формальний кратний ряд Лорана L, якому відповідна послідовність функцій багатьох змінних $\{R_n(\mathbf{z})\}$, визначається однозначно.*

(В) *Якщо послідовність $\{\lambda(\Lambda(R_{n+1}) - \Lambda(R_n))\}$ прямує монотонно до ∞, то порядок відповідності $R_n(\mathbf{z})$ визначається так:*

$$\nu_n = \lambda(\Lambda(R_{n+1}) - \Lambda(R_n)).$$

Нехай D — область в $\mathbb{C}^N$, тобто відкрита зв'язна множина. Послідовність $\{f_n(\mathbf{z})\}$ функцій, мероморфних в області D, збігається рівномірно на компактній підмножині K області D, якщо

1) існує таке число $N_K \in \mathbb{Z}_+$, що для всіх $n \geq N_K$ функція $f_n(\mathbf{z})$ є голоморфна в деякій області, що містить K, і

2) для заданого $\varepsilon > 0$ існує число $N_\varepsilon > N_K$ таке, що

$$\sup_{\mathbf{z}\in K} |f_{n+k}(\mathbf{z}) - f_n(\mathbf{z})| < \varepsilon \text{ для } n \geq N_\varepsilon,\ k \geq 0.$$

Послідовність функцій багатьох змінних $\{f_n(\mathbf{z})\}$, мероморфних в області D, рівномірно обмежена на компактній підмножині K із D, якщо існують N_K і M_K такі, що

$$\sup_{\mathbf{z}\in K} |f_n(\mathbf{z})| \leq M_K, \quad n \geq N_K.$$

Теорема 2. *Нехай $\{R_n(\mathbf{z})\}$ — послідовність функцій багатьох змінних, мероморфних в початку координат, відповідна до формального кратного ряду Лорана* (1)*, де $c_{\mathbf{m}} \neq 0$, і нехай існує множина*

$$D_\delta = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N :\ 0 < |z_k| < \delta,\ 1 \leq k \leq N\}, \quad \delta > 0,$$

така, що для кожного $n \geq 0$ функція багатьох змінних $R_n(\mathbf{z})$ є голоморфна в D_δ. Нехай, далі, D — область, яка містить D_δ, і $\mathbf{0} \notin D$, якщо в мультиіндексі $\mathbf{m}$ принаймні один індекс $m_k < 0$, де $1 \leq k \leq N$. Тоді:

(А) *Послідовність функцій багатьох змінних $\{R_n(\mathbf{z})\}$ збігається рівномірно на кожній компактній підмножині із D тоді і лише тоді, коли $\{R_n(\mathbf{z})\}$ є рівномірно обмежена на кожній такій підмножині.*

(Б) *Якщо послідовність функцій багатьох змінних $\{R_n(\mathbf{z})\}$ збігається рівномірно на кожній компактній підмножині із D, то*

$$f(\mathbf{z}) = \lim_{n\to\infty} R_n(\mathbf{z})$$

— *функція багатьох змінних, голоморфна в* D, *і* $L(\mathbf{z}) \equiv \Lambda(f)$.

Наступний результат є безпосереднім наслідком теореми 2.

Наслідок. *Нехай* $\{R_n(\mathbf{z})\}$ *і* $\{Q_n(\mathbf{z})\}$ *— дві послідовності функцій багатьох змінних, мероморфних в початку координат, відповідні до одного формального кратного ряду Лорана* (1), *де* $c_{\mathbf{m}} \neq 0$, *і нехай обидві ці послідовності збігаються рівномірно на кожній компактній підмножині із* D, *яка містить відкритий полікруг* D^* *із виколотим початком координат. Нехай, далі, для кожного* $n \geq 0$ *функції багатьох змінних* $R_n(\mathbf{z})$ *і* $Q_n(\mathbf{z})$ *є голоморфні в* D^* *і* $\mathbf{0} \notin D$, *якщо в мультиіндексі* $\mathbf{m}$ *принаймні однин індекс* $m_k < 0$, *де* $1 \leq k \leq N$. *Тоді* $\{R_n(\mathbf{z})\}$ *і* $\{Q_n(\mathbf{z})\}$ *збігаються до однієї функції багатьох змінних* $f(\mathbf{z})$, *голоморфної в* D, *і для якої* $L(\mathbf{z}) \equiv \Lambda(f)$.

Для $\lambda(L) = \mathbf{m} \geq \mathbf{0}$ твердження теореми 2 спрощується і, тому, сформулюємо його окремо.

Теорема 3. *Нехай* $\{R_n(\mathbf{z})\}$ *— послідовність функцій багатьох змінних, мероморфних у початку координат, відповідна до формального кратного степеневого ряду*

$$L(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k} \geq \mathbf{0}} c_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}$$

де $c_{\mathbf{k}} \in \mathbb{C}$, $\mathbf{k} \geq \mathbf{0}$, *і* D *— область, яка містить початок координат. Тоді:*

(А) *Послідовність функцій багатьох змінних* $\{R_n(\mathbf{z})\}$ *збігається рівномірно на кожній компактній підмножині із* D *тоді і лише тоді, коли* $\{R_n(\mathbf{z})\}$ *є рівномірно обмежена на кожній такій підмножині.*

(Б) *Якщо послідовність функцій багатьох змінних* $\{R_n(\mathbf{z})\}$ *збігається рівномірно на кожній компактній підмножині із* D, *то*

$$f(\mathbf{z}) = \lim_{n \to \infty} R_n(\mathbf{z})$$

— функція багатьох змінних, голоморфна в D, *і* $L(\mathbf{z}) \equiv \Lambda(f)$, *тобто* $L(\mathbf{z})$ *— формальний кратний ряд Тейлора для* $f(\mathbf{z})$.

Наведені вище результати є багатовимірним узагальнення відповідних результатів, отриманих В.Б. Джоунсом і В.Йо. Троном у роботі [3].

[1] Henrici P. Die Lagrange-Bürmannsche Formel bei formalen Potenzreihen // Jber. d. Dt. Math.-Verein. – 1984. – Bd. 86. – S. 115-134.

[2] Henrici P. Topics in computational complex analysis, IV: The Lagrange-Bürmann formula for systems of formal power series // Computational Aspects of Complex Analysis: Proc. of the NATO Advanced Study Ins. held at Braunlage, Harz, Germany, July 26 – August 6, 1982. – Springer: Dordrecht, 1983. – Vol. 102. – S. 193-216.

[3] Jones W.B., Thron W.J. Sequences of meromorphic functions corresponding to a formal Laurent series // SIAM J. Math. Anal. – 1979. – Vol. 10, No. 1. – P. 1-17.

e-mail: bodnar4755@ukr.net, dmytryshynr@hotmail.com

Базиси алгебр симетричних поліномів на деяких банахових просторах

Василишин Т.В.
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

Базисом алгебри A називають множину $B \subset A$ таку, що кожен елемент алгебри A можна єдиним чином подати у вигляді лінійної комбінації добутків елементів множини B.

Нехай Ξ — множина всіх бієкцій $\sigma : [0,1] \to [0,1]$ таких, що σ і σ^{-1} є вимірними за Лебегом і зберігають міру. Нехай $L_\infty[0,1]$ — це комплексний банахів простір всіх вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій $x : [0,1] \to \mathbb{C}$ із нормою $\|x\| = \operatorname{ess\,sup}_{t\in[0,1]}|x(t)|$. Функцію $f : L_\infty[0,1] \to \mathbb{C}$ називають симетричною, якщо $f(x \circ \sigma) = f(x)$ для всіх $x \in L_\infty[0,1]$ і $\sigma \in \Xi$.

Теорема 1. *Сукупність поліномів $\{R_n : \ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, визначених як $R_0(x) = 1$ і*

$$R_n(x) = \int_0^1 (x(t))^n \, dt$$

для $n \in \mathbb{N}$, де $x \in L_\infty[0,1]$, є базисом алгебри всіх неперервних симетричних поліномів, які діють з $L_\infty[0,1]$ в $\mathbb{C}$.

Нехай $p \in [1, +\infty)$ і $n \in \mathbb{N}$. Нехай $L_p[0,1]$ — це комплексний банахів простір усіх функцій $x : [0,1] \to \mathbb{C}$, p-тий степінь яких є інтегровним за Лебегом, із нормою

$$\|x\|_p = \left(\int_0^1 |x(t)|^p \, dt \right)^{1/p}.$$

Нехай $(L_p[0,1])^n$ — це n-тий декартів степінь простору $L_p[0,1]$ із нормою

$$\|x\| = \left(\int_0^1 |x_1(t)|^p \, dt + \ldots + \int_0^1 |x_n(t)|^p \, dt \right)^{1/p},$$

де $x = (x_1, \ldots, x_n) \in (L_p[0,1])^n$. Функцію $f : (L_p[0,1])^n \to \mathbb{C}$ називають симетричною, якщо $f((x_1 \circ \sigma, \ldots, x_n \circ \sigma)) = f((x_1, \ldots, x_n))$ для всіх $(x_1, \ldots, x_n) \in (L_p[0,1])^n$ і $\sigma \in \Xi$.

Теорема 2. *Сукупність поліномів $\{H_k : \ k \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n, 0 \le |k| \le \lceil p \rceil\}$, визначених як $H_{(0,\ldots,0)}(x) = 1$ і*

$$H_k(x) = \int_0^1 \prod_{\substack{s=1\\k_s>0}}^n (x_s(t))^{k_s} \, dt$$

для $k = (k_1, \ldots, k_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$, $1 \le |k| \le \lceil p \rceil$, де $x = (x_1, \ldots, x_n) \in (L_p[0,1])^n$, є базисом алгебри всіх неперервних симетричних поліномів, які діють з $(L_p[0,1])^n$ в $\mathbb{C}$.

e-mail: taras.v.vasylyshyn@gmail.com

Оптимальне керування задачею з невідомими межами для сингулярної гіперболічної системи квазілінійних рівнянь

Венгерський П.С.
Львівський національний університет імені Івана Франка
Кирилич В.М.
Львівський національний університет імені Івана Франка
Пелюшкевич О.В.
Львівський національний університет імені Івана Франка

У прямокутнику $\Pi(T_0) = \{(x,t) \mid 0 \leq x \leq l,\ 0 \leq t \leq T_0\}$, де $l > 0,\ T_0 > 0$ — деякі сталі, розглянемо систему

$$\sum_{k=1}^{m} g_k^i(x,t,u,v)\left(\frac{\partial u_k}{\partial t} + \lambda_i(x,t,u,v)\frac{\partial u_k}{\partial x}\right) = f_i(x,t,u,v), \quad i \in \{1,\ldots,m\}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial x} = q_j(x,t,u,v), \quad j \in \{1,\ldots,n\}, \tag{2}$$

де $u = (u_1,\ldots,u_m)$, $v = (v_1,\ldots,v_n)$.

Поряд із системою (1)–(2) розглянемо систему рівнянь, що характеризує поведінку "внутрішніх" невідомих ліній

$$\frac{ds_j}{dt} = r_j(s(t),t,u(s_j(t),t),v(s_j(t),t)), \quad j \in \{1,\ldots,n\}, \quad s = (s_1,\ldots,s_n). \tag{3}$$

Початкові та крайові умови для системи (1)–(3) мають вигляд

$$u(x,0) = \alpha(x,u^{(0)}(x)), \quad 0 \leq x \leq l, \tag{4}$$

$$s_j(0) = c_j, \quad j \in \{1,\ldots,n\}, \quad 0 \leq c_j \leq l, \tag{5}$$

$$u_i(0,t) = \gamma_i^0(t,u(0,t),v(0,t),u^{(1)}(t)), \quad i \in I_+ = \{i \mid \operatorname{sgn}(\lambda_i(0,0,0,0)) = 1\}, \tag{6}$$

$$u_i(l,t) = \gamma_i^l(t,u(l,t),v(l,t),u^{(2)}(t)), \quad i \in I_- = \{i \mid \operatorname{sgn}(\lambda_i(l,0,0,0)) = -1\}, \tag{7}$$

$$v_j(s_j(t),t) = \beta_j(t,u^{(3)}(t)), \quad j \in \{1,\ldots,n\},$$

де функції $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$, $\beta = (\beta_1,\ldots,\beta_n)$, γ_i^0 $(i \in I_+)$, γ_i^l $(i \in I_-)$ і сталі c_j, $(j \in \{1,\ldots,n\})$ є задані, а $u^{(0)}(x)$, $u^{(1)}(t)$, $u^{(2)}(t)$, $u^{(3)}(t)$ — вектор-функції, які належать простору керувань, який складається з неперервно-диференційовних функцій таких, що для компактів $U^k (k \in \{1,2,3\}) : u^{(k)} : \mathrm{R}_+ \to U^k, U^k \subset \mathrm{R}^{p_k}, p_k \in \mathrm{N}, u^{(0)} : [0,l] \to U^0, U^0 \subset \mathrm{R}^{p_0}, p_0 \in \mathrm{N}$.

Цільовий функціонал має вигляд

$$J(u^{(0)}, u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}) = \int\int\limits_{\Pi(T_0)} G(w(x,t), x, t)dxdt, \ w = (u, v, s), \qquad (8)$$

де $G : \mathrm{R}^{m+2n} \times \overline{\Pi}(T_0) \to \overline{\Pi}(T_0)$ і є вимірною на $\overline{\Pi}(T_0)$ для довільної функції w.

Отже, потрібно дослідити задачу

$$\min_{u^{(k)} \in U} J(u^{(0)}, u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}),$$

де мінімум береться по тих $u^{(k)}$, для яких існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1)–(7) в тому сенсі, що для набору керувань $(u^{(0)}, u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)})$ компоненти її розв'язку $w = (u, v, s)$ задовольняють систему відповідних інтегро-операторних рівнянь [1].

За допомогою методики роботи [1] доведено коректну розв'язність сформульованої задачі, а для деяких конкретних випадків наведено числову реалізацію задачі та побудовано графічне зображення розв'язків при фіксованих часових значеннях.

Зауваження. *Підінтегральна функція G у цільовому функціоналі в прикладних задачах має один із виглядів* [2]*:*

1) $G(\omega, x, t) = \dfrac{1}{2} e^{-\rho t} \sum\limits_{i=1}^{m+2n} (\omega_i - \overline{\omega}_i)^2$, *де* $\overline{\omega} : \overline{\Pi}(T_0) \to R^{m+2n}$ *— задана функція,* ρ *— норма дисконтування;*

2) $G(\omega, x, t) = e^{-\rho t} g(\omega, x, t)$, *де* $g : R^{m+2n} \times \overline{\Pi}(T_0) \to \overline{\Pi}(T_0)$ *— задана обмежена функція.*

Зазвичай, підінтегральні функції цільового функціоналу представлені у вигляді добутку інтегровної на відповідній області функції, яка не залежить від розв'язку задачі (1)–(7) та нелінійної функції від розв'язку, ріст якого не перевищує ріст інтегрованої функції для всіх допустимих наборів керувань.

[1] Derevianko T. O., Kyrylych V. M. Problem of optimal control for a semilinear hyperbolic system of equations of the first order with infinite horizon planning // Ukrainian Math. Jornal. – 2015. – V. 67, No. 2. – P. 211-229.

[2] Rockafellar R. T. Hamiltonian traectories and saddle points in mathematical economics // Control and Cybernetics. – 2009. – V. 38, No. 48. – P. 1575-1588.

e-mail: p_vengersky@lnu.edu.ua, vkyrylych@ukr.net, olpelushkevych@ukr.net

Про функцію Аппеля F_4, діаграми Фейнмана та гіллясті ланцюгові дроби

Гоєнко Н.П.
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України
Баран О.Є.
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України
Берегова Г.І.
Національний університет "Львівська політехніка"
Манзій О.С.
Національний університет "Львівська політехніка"

Гіпергеометричні функції дають змогу природно одержати аналітичне представлення інтегралів відповідних діаграм Фейнмана в деяких зв'язних областях незалежних кінематичних змінних [1]. Такі представлення виникають у процесі пошуку розв'язків системи однорідних лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними. Зокрема, розв'язком такої системи є гіпергеометрична функція Аппеля F_4 [2], що означується подвійним степеневим рядом

$$F_4(a, b; c, c'; z_1, z_2) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n}(b)_{m+n}}{(c)_m(c')_n} \frac{z_1^m z_2^n}{m!n!},$$

де a, b, c, c' — комплексні сталі, z_1, z_2 — комплексні змінні, причому c, $c' \neq 0$, -1, -2, …, $(d)_k = d(d+1)\ldots(d+k-1)$ — символ Похгаммера.

Д.І. Боднар побудував розвинення відношення функцій Аппеля F_4 у гіллястий ланцюговий дріб [3]. У доповіді пропонується застосувати це розвинення до побудови наближень гіпергеометричних функцій Аппеля F_4.

[1] Tai-Fu Feng, Chao-Hsi Chang, Jian-Bin Chen, Zhi-Hua Gu, Hai-Bin Zhang. Evaluating Feynman integrals by the hypergeometry // Nuclear Physics. – 2018. – Vol. 927. – P. 516-549.

[2] Appell P., Kampe de Feriet J. Fonctions hypergeometriques et hyperspheriques. Polynomes d'Hermite. – Paris: Gauthier-Villars, 1926.

[3] Боднар Д.І. Багатовимірні C-дроби // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1996. – Т. 39, № 2. – С. 39-46.

e-mail: hoyenko@gmail.com, boe13@ukr.net, gberegova@yahoo.com, lesly@ukr.net

Мішані задачі для еліптично-параболічних рівнянь у необмежених областях з умовами на нескінченності

Гряділь Н.Я., Бокало М.М.
Львівський національний університет імені Івана Франка

Нехай Ω — необмежена область в $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$); $\partial\Omega$ — межа Ω, причому $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_0 = \emptyset$; $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ — одиничний вектор зовнішньої до $\partial\Omega$ нормалі; $Q := \Omega \times (0,T)$, $\Sigma_0 := \Gamma_0 \times (0,T)$, $\Sigma_1 := \Gamma_1 \times (0,T)$, де $T > 0$ — деяке число; $Bd(\Omega)$ — множина всеможливих обмежених підобластей області Ω; $k \in \{1, \ldots, n\}$ таке, що множина $\Omega \bigcap \{x \in \mathbb{R}^n : |x_1|^2 + \ldots + |x_K|^2 < R\}$ є обмеженою для деякого $R > 0$.

Розглядаємо задачу: *знайти функцію $u : \overline{Q} \to \mathbb{R}$, яка задовольняє (в певному сенсі) рівняння*

$$\frac{\partial}{\partial t}(b(x)u) - \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i(x,t,u,\nabla u) + a_0(x,t,u,\nabla u) =$$

$$f_0(x,t) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f_i(x,t), \quad (x,t) \in Q\,, \tag{1}$$

крайові умови

$$u\Big|_{\Sigma_0} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu_a}\Big|_{\Sigma_1} = 0 \tag{2}$$

та початкову умову

$$u(x,0) = u_0(x)\,, \quad x \in \Omega_0, \tag{3}$$

де $b : \Omega \to \mathbb{R}$ – вимірна функція така, що $b(x) \geq 0$ для всіх $x \in \Omega$ і $\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega'} b(x) < \infty$ для будь-якої $\Omega' \in Bd(\Omega)$, $a_j : Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ($j = \overline{0,n}$), $f : Q \to \mathbb{R}$, $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ — задані дійснозначні функції, $\partial u(x,t)/\partial \nu_a := \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(x,t,u,\nabla u)\,\nu_i(x)$, $(x,t) \in \Sigma_1$, — похідна по "конормалі".

Розглядаємо випадок, коли рівняння (1) — анізотропне, причому показники нелінійності — змінні, наприклад,

$$(b(x)u)_t - \sum_{i=1}^{n} \Big(\widehat{a}_i(x,t)|u_{x_i}|^{p_i(x)-2}u_{x_i}\Big)_{x_i} + \widehat{a}_0(x,t)|u|^{p_0(x)-2}u = f(x,t), \tag{4}$$

де $\widehat{a}_i$ ($i = \overline{0,n}$) — деякі вимірні, додатні і відділені від нуля функції, $p_i > 1$ ($i = \overline{0,n}$) — вимірні та обмежені функції (*показники нелінійності*).

Нехай $p = (p_0, p_1, \ldots, p_n) : \Omega \to \mathbb{R}^{1+n}$ — вектор-функція, яка задовольняє умову:

($\mathcal{P}^*$) *для кожного $i \in \{0,1,\ldots,n\}$ функція $p_i : \Omega \to \mathbb{R}$ — вимірна і $\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega'} p_i(x) > 1$, $\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega'} p_i(x) < \infty$ для будь-якої $\Omega' \in Bd(\Omega)$, причому $p_0(x) \geqslant 2$, $p_0(x) = p_1(x) = \ldots = p_k(x) = 2$ для майже всіх $x \in \Omega$.*

Нехай для вектор-функції p, що задовольняє умову ($\mathcal{P}^*$), $\mathbb{A}_p^0$ — множина, будь-який елемент якої задовольняє такі умови:

$(\mathcal{A}_1)$ для кожного $i \in \{0,1,\ldots,n\}$ функція $a_i(x,t,\rho,\xi)$, $(x,t,\rho,\xi) \in Q \times \mathbb{R}^{1+n}$ — каратеодорівська;

$(\mathcal{A}_2)$ для кожного $i \in \{0,1,\ldots,n\}$, майже всіх $(x,t) \in Q$ і будь-яких $(\rho,\xi) \in \mathbb{R}^{1+n}$ виконується нерівність

$$|a_i(x,t,\rho,\xi)| \leqslant h_{1,i}(x,t)\big(|\rho|^{p_0(x)/p_i'(x)} + \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^{p_j(x)/p_i'(x)}\big) + h_{2,i}(x,t),$$

де $h_{1,i} \in L_{\infty,\,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $h_{2,i} \in L_{{p'_i}(\cdot),\,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$.

$(\mathcal{A}_3)$ для майже всіх $(x,t) \in Q$ та будь-яких (ρ_1,ξ^1), $(\rho_2,\xi^2) \in \mathbb{R}^{1+n}$ виконуються нерівності

$$\sum_{i=1}^{k} |a_i(x,t,\rho_1,\xi^1) - a_i(x,t,\rho_2,\xi^2)| \leqslant g_1(x,t)|\xi'^1 - \xi'^2| + g_2(x,t)|\rho_1 - \rho_2|, \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i(x,t,\rho_1,\xi^1) - a_i(x,t,\rho_2,\xi^2))(\xi_i^1 - \xi_i^2) + (a_0(x,t,\rho_1,\xi^1) - $$
$$ - a_0(x,t,\rho_2,\xi^2))(\rho_1 - \rho_2) \geqslant q_1(x,t)|\xi'^1 - \xi'^2|^2 + q_2(x,t)|\rho_1 - \rho_2|^2, \quad (6)$$

де $\xi'^j := (\xi_1^j,\ldots,\xi_k^j)$, $|\xi'^j| := (|\xi_1^j|^2 + \ldots + |\xi_k^j|^2)^{1/2} \quad \forall j \in \{1,2\}$, а $g_1,g_2,q_1,q_2 : \overline{Q} \to \mathbb{R}$ — неперервні на $\overline{Q}$ функції, що задовольняють умови:

- $q_1(x,t) > 0$ при $(x,t) \in \overline{Q}$;
- для деякого дійсного числа μ виконується нерівність

$$q_2(x,t) + \mu > 0 \quad \forall (x,t) \in \overline{Q}; \quad (7)$$

- існує неперервна функція $A : [1,+\infty) \to (0,+\infty)$ така, що

$$\int_1^{\infty} [A(\tau)]^{-1} d\tau = +\infty \quad (8)$$

і для будь-яких $\tau \geqslant 1$ виконується нерівність

$$d_1(\tau)\lambda^{-1/2}(\tau) + d_2(\tau)\lambda^{-1}(\tau) \leqslant A(\tau). \quad (9)$$

$(\mathcal{A}_4)$ для майже всіх $(x,t) \in Q$ і будь-яких $(\rho,\xi) \in \mathbb{R}^{1+n}$ виконується нерівність

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x,t,\rho,\xi)\xi_i + a_0(x,t,\rho,\xi)s \geqslant$$
$$q_1(x,t)\sum_{i=1}^{k} |\xi_i|^2 + q_2(x,t)|\rho|^2 + q_3(x,t)\sum_{i=k+1}^{n} |\xi_i|^{p_i(x)},$$

де q_1, q_2 з умови $(\mathcal{A}_3)$, $q_3 \in C(\overline{Q})$ і $q_3(x,t) > 0 \ \ \forall (x,t) \in \overline{Q}$.

За наведених припущень на вихідні дані, доведено існування та єдиність узагальненого розв'язку задачі (1)–(3).

e-mail: mm.bokalo@gmail.com, nikolyetta@gmail.com

Про локальну розв'язність задачі Коші для квазілінійного виродженого ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова

Івасишен С.Д.
Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"
Мединський І.П.
Національний університет "Львівська політехніка"

Нехай n-вимірна просторова змінна x складається з n_1-вимірної основної змінної x_1 та n_2-вимірної x_2 і n_3-вимірної x_3 змінних виродження, $n_1 \geq n_2 \geq n_3$, так що $n = n_1 + n_2 + n_3$; $m_l = l - 1/2$, $l \in \{1, 2, 3\}$. Відповідно до цього мультиіндекс $k \in \mathbb{Z}_+^n$, записуватимемо у вигляді $k := (k_1, k_2, k_3)$, де $k_l := (k_{1l}, \ldots, k_{1n_l}) \in \mathbb{Z}_+^{n_l}$, $l \in \{1, 2, 3\}$ і $|k_l| := \sum\limits_{j=1}^{n_l} k_{lj}$; $D_x u := \{\partial_{x_1}^{k_1} u \,|\, |k_1| \leq 1\}$; $\Pi_H := \{(t, x) \,|\, t \in H, \ x \in \mathbb{R}^n\}$, якщо $H \subset \mathbb{R}$. Будемо користуватися такими позначеннями: $\Delta_{x_s}^{z_s} f(\cdot, x, \cdot) := \Delta_x^{z^{(s)}} f(\cdot, x, \cdot) := f(\cdot, x_s, \cdot) - f(\cdot, z_s, \cdot)$, $s \in \{1, 2, 3\}$, $z^{(1)} := (z_1, x_2, x_3)$, $z^{(2)} := (x_1, z_2, x_3)$, $z^{(3)} := (x_1, x_2, z_3)$; $\xi^{(1)} := (\xi_1, x_2, x_3)$; $X(t) := (X_1(t), X_2(t), X_3(t))$, $X_1(t) := x_1$, $X_2(t) := x_2 + t\hat{x}_1$, $X_3(t) := x_3 + tx_2' + 2^{-1}t^2 x_1'$, $t \in \mathbb{R}$, $\hat{x}_1 := (x_{11}, \ldots, x_{1n_2})$, $x_1' := (x_{11}, \ldots, x_{1n_3})$, $x_2' := (x_{21}, \ldots, x_{2n_3})$.

Розглядається задача Коші

$$\left(\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}} - \sum_{j,l=1}^{n_1} a_{jl}(t,x)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t,x)\partial_{x_{1j}} - a_0(t,x)\right) u(t,x) = f(t,x,D_x u), \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \qquad (1)$$

$$u(t,x)|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \qquad (2)$$

Будемо припускати, що коефіцієнти a_{jl},a_j і a_0 є комплекснозначними функціями на $\Pi_{[0,T]}$, які задовольняють такі умови:

1) вони є обмеженими й неперервними та існує така стала $\delta > 0$, що для довільних $(t,x)\in\Pi_{[0,T]}$ і $\sigma_1:=(\sigma_{11}, \ldots, \sigma_{1n_1})\in\mathbb{R}^{n_1}$ справджується нерівність

$$\mathrm{Re} \sum_{j,l=1}^{n_1} a_{jl}(t,x)\sigma_{1j}\sigma_{1l} \geq \delta|\sigma_1|^2; \qquad (3)$$

2) вони є гельдеровими за просторовими змінними в такому сенсі:

$$\exists\, H_1 > 0 \ \exists\, \alpha_1 \in (0,1) \ \forall\{(t,x),(t,z^{(1)})\} \subset \Pi_{[0,T]} :$$
$$|\Delta_{x_1}^{z_1} a(t,x)| \leq H_1|x_1 - z_1|^{\alpha_1}, \qquad (4)$$

$$\exists\, H_2 > 0 \ \exists\, \alpha_2 \in (1/3, 2/3] \ \forall\{(t,x),(t,z^{(2)})\} \subset \Pi_{[0,T]} \ \forall h \in [0,T] :$$
$$|\Delta_{x_2}^{z_2} a(t,x)| \leq H_2(h^{m_2\alpha_2} + |X_2(h) - z_2|^{\alpha_2}), \qquad (5)$$

$$\exists\, H_3 > 0\ \exists\, \alpha_3 \in (3/5, 2/3)\ \forall \{(t,x),(t,z^{(3)})\} \subset \Pi_{[0,T]}\ \forall h \in [0,T]:$$
$$|\Delta_{x_3}^{z_3} a(t,x)| \le H_3(h^{m_3\alpha_3} + |X_3(h) - z_3|^{\alpha_3}), \tag{6}$$

3) $\exists\, H_4 > 0\ \forall \{(t,x),(t,\xi^{(1)}),(t,z^{(s)})\} \subset \Pi_{[0,T]}\ \ \forall h \in [0,T]:$

$$|\Delta_{x_1}^{\xi_1} \Delta_{y_s}^{z_s} a(t,x)| \le H_4 |x_1 - \xi_1|^{\alpha_1} (h^{m_s\alpha_s} + |X_s(h) - z_s|^{\alpha_s}),\, s \in \{2,3\}, \tag{7}$$

де a — будь-який із коефіцієнтів a_{jl}, a_j і a_0.

За умов (3)–(7) доводиться існування класичного фундаментального розв'язку задачі Коші Z для відповідного (1) лінійного рівняння і встановлюються точні оцінки Z, його похідних і приростів старших похідних за просторовими змінними. Для цього використано модифікацію класичного методу Леві [1], [2], яка ґрунтується на поетапному застосуванні методу Леві. Для рівнянь з меншою кількістю груп змінних виродження така методика розроблялась і застосовувалась в працях [3],[4]. Зауважимо, що умова (7) для коефіцієнтів рівняння (1) виникає лише у випадку двох груп змінних виродження.

За допомогою отриманих результатів для лінійних рівнянь доводиться твердження про локальну розв'язність у шарі $\Pi_{[0,T_0]}$, $T_0 < T$, задачі Коші (1), (2) для квазілінійного виродженого ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова. Умови на праву частину — функцію f та початкову функцію φ, а також методика доведення твердження, подібні до умов і методики, які використовувались раніше в статті [5] для випадку рівняння, коефіцієнти якого залежать лише від змінної t.

[1] Івасишен С., Мединський І. Про класичний фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова // Сучасні проблеми механіки і математики. – Львів: Інститут прикладних проблем механіки та математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2013. – Т. 1. – С. 36-38.

[2] Ivasyshen S.D., Medynsky I.P. On aplications of the Levi method in the theory of parabolic equations // Математичні студії . – 2017. – Т. 47, № 1. – С. 33-46.

[3] Івасишен С.Д., Мединський І.П. Класичні фундаментальні розв'язки для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2016. – Т. 13, № 1. – С. 108-155.

[4] Івасишен С.Д., Мединський І.П. Про класичні фундаментальні розв'язки задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змвнних // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – Т. 59, № 2. – С. 28-42.

[5] Мединський І.П. Дослідження С.Д. Ейдельмана нелінійних задач та їх розвиток // Наук. вісник Чернівецького нац. ун-ту ім. Юрія Федьковича. Сер. математика: Зб. наук. пр. – Т. 1, № 1-2. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2011. – С. 114-128.

e-mail: ivasyshen.sd@gmail.com, i.p.medynsky@gmail.com

Комбіновані методи наближеного розв'язання задачі Коші для квазілінійного рівняння з частинними похідними першого порядку

Казмерчук А.І.
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

Розглянемо задачу Коші для квазілінійного диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку

$$u_t + \varphi(u)_x = 0, \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \tag{2}$$

де $\varphi(u) \in C^{2,\alpha}$, $u = u\,(t,x)\,, u_0(x) \in L_\infty(R)$.

Нехай $\tau > 0$ і при $i \in N_0 : i \ (mod\ 2) \ = 0$, $\tau \in [i\tau, (i+1)\tau)$ $u^\varepsilon(t,x)$ — наближений розв'язок за методом A задачі Коші (1), (2), запропонований в [1].

Далі, нехай при $i \in N_0 : i\ (mod\ 2) = 1$, $\tau \in [i\tau, (i+1)\tau)$ $u^\varepsilon(t,x)$ — наближений розв'язок за методом B задачі Коші (1), (2), запропонований в [1].

Отримано оцінки збіжності наближених розв'язків до узагальненого розв'язку задачі (1), (2) у наступному сенсі.

Означення. При $\varepsilon > 0$ функція $u^\varepsilon(t,x)$, яка на різних смугах є почерговим наближеним розв'язком за методом A і за методом B, називається AB-наближеним розв'язком задачі (1), (2).

Теорема 1. *Нехай $\varepsilon = O(\tau)$. Тоді для AB-наближеного розв'язку $u^\varepsilon(t,x)$ при $\varepsilon_{1,2} > 0$ справджується оцінка*

$$\left\| u^{\varepsilon_1}(t,\cdot) - u^{\varepsilon_2}(t,\cdot) \right\|_{L_{1,loc}(R)} \le \mu\left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\right),$$

де функція $\mu(\sigma) \to 0$, $\sigma \to 0$ залежить від модуля неперервності $\lambda(\sigma)$ в $L_{1,loc}(R)$ початкової функції $u_0(x)$ та від швидкості збіжності в наближених методах A і B.

Теорема 2. *Нехай $var\,(u_0\,(x)) < +\infty$. Тоді для AB-наближеного розв'язку $u^\varepsilon(t,x)$ при $\varepsilon_{1,2} > 0$ справджується оцінка*

$$\left\| u^{\varepsilon_1}(t,\cdot) - u^{\varepsilon_2}(t,\cdot) \right\|_{L_{1,loc}(R)} \le C(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^\delta,$$

де $\delta \in (0,1)$ залежить від від швидкості збіжності в наближених методах A і B.

Теорема 3. *Нехай $\varepsilon = O(\tau)$. Тоді для AB-наближених розв'язків $u^\varepsilon(t,x)$ і $v^\varepsilon(t,x)$ $\varepsilon_{1,2} > 0$, і таких, що відповідають початковим функціям $u_0(x)$ та $v_0(x)$, справджується оцінка*

$$\left\| u^{\varepsilon_1}(t,\cdot) - v^{\varepsilon_2}(t,\cdot) \right\|_{L_{1,loc}(R)} \le \left\| u_0(\cdot) - v_0(\cdot) \right\|_{L_{1,loc}(R)} + \mu(\varepsilon_1 + \varepsilon_2),$$

де функція $\mu(\sigma) \to 0,\ \sigma \to 0$ залежить від сумісного модуля неперервності $\lambda(\sigma)$ в $L_{1,loc}(R)$ початкових функції $u_0(x)$ та $v_0(x)$ та від швидкості збіжності в наближених методах A і B.

Теорема 4. *Нехай $var\,(u_0\,(x)) < +\infty$ і $var\,(v_0\,(x)) < +\infty$. Тоді для AB-наближених розв'язків $u^{\varepsilon}\,(t,x)$ і $v^{\varepsilon}\,(t,x)$ при $\varepsilon_{1,2} > 0$, і таких, що відповідають початковим функціям $u_0(x)$ та $v_0\,(x)$, справджується оцінка*

$$\|u^{\varepsilon_1}\,(t,\cdot) - v^{\varepsilon_2}\,(t,\cdot)\|_{L_{1,loc(R)}} \le \|u_0\,(\cdot) - v_0\,(\cdot)\|_{L_{1,loc(R)}} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^{\delta},$$

де $\delta \in (0,1)$ залежить від від швидкості збіжності в наближених методах A і B.

Доведення теорем аналогічне до доведення тверджень в [1, 2] і ґрунтується на оцінці функціонала

$$L\,(u,k,f) = -\iint_{0-\infty}^{T+\infty} \{|u-k|\,f_t + sign(u-k)(\varphi\,(u) - \varphi(k))f_x\}\,dxdt$$

із застосуванням оцінок для модулів неперервності в $L_{1,loc}([0,T] \times R^1)$ наближених розв'язків, які дозволять отримати компактність сім'ї наближених розв'язків.

Зауважимо, що варіація розмірів смуг, на яких почергово застосовуються наближений метод A та наближений метод B, дозволяє оптимізувати швидкість збіжності наближених розв'язків до точного.

Зрозуміло, що із теорем 1–4 незалежно можна отримати існування та, що надзвичайно важливо, єдиність узагальненого розв'язку задачі (1), (2).

[1] Казмерчук А.І. До обґрунтування наближених методів розв'язання квазілінійних законів збереження з негладкими даними задачі // Вісник національного університету "Львівська політехніка", Прикладна математика. – 2000. – № 411. – С. 147-151.

[2] Казмерчук А.І. В'язкісно-згладжувальний метод розв'язання задачі Коші для квазілінійного рівняння з частинними похідними першого порядку // Проблемы научной мысли. – 2016. – Т. 12, № 10. – С. 98-100.

e-mail: a_kazmerchuk@ukr.net

Задача з триточковими умовами за часовою змінною для рівняння з частинними похідними у двовимірному циліндрі

Каленюк П.І., Волянська І.І., Ільків В.С., Нитребич З.М.
Національний університет "Львівська політехніка"

У роботі досліджено триточкову задачу в області $\mathcal{D} = [0;T] \times \Omega$, де $T > 0$, Ω — одновимірний тор $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, для лінійного рівняння з частинними похідними

$$Lu = \partial_t^3 u + \partial_t^2 \sum_{j=0}^{1} a_{2j}\partial_x^j u + \partial_t \sum_{j=0}^{2} a_{1j}\partial_x^j u + \sum_{j=0}^{3} a_{0j}\partial_x^j u = 0, \qquad (1)$$

$$u(0,x) = \varphi_1(x), \quad u(\tau,x) = \varphi_2(x), \quad u(T,x) = \varphi_3(x), \quad 0 < \tau < T, \qquad (2)$$

де $a_{ij} \in \mathbb{C}$, причому $i + j = 0,1,2,3$, $\varphi_1 = \varphi_1(x)$, $\varphi_2 = \varphi_2(x)$, $\varphi_3 = \varphi_3(x)$ — задані періодичні функції, $u = u(t,x)$ — шукана функція.

Умови однозначної розв'язності задачі (1), (2) встановлено у просторах $\mathbf{E}_\beta^{3,q}(\mathcal{D})$ періодичних функцій з експоненційною зміною коефіцієнтів Фур'є, а саме: $\mathbf{E}_\beta^{3,q}(\mathcal{D})$, де $q \in \mathbb{R}$, $\beta\colon [0;T] \to \mathbb{R}$, — банахів простір функцій $u = u(t,x)$ таких, що похідні $\partial_t^l u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k^{(l)}(t)e^{ikx}$, $l = 0,1,2,3$, для кожного t з проміжку $[0,T]$ належать до просторів $\mathbf{E}_{\beta(t)}^{q-l}(\Omega)$ відповідно і неперервні за змінною t у цих просторах, а $\mathbf{E}_\alpha^q(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, — гільбертів простір періодичних функцій $\psi = \psi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi_k e^{ikx}$. Функція β, яка параметризує простір $\mathbf{E}_\beta^{3,q}(\mathcal{D})$, вказує на залежність гладкості розв'язку задачі за просторовою змінною x від часової змінної t. Квадрати норм функцій ψ та u обчислюються за формулами $\|\psi\|^2_{\mathbf{E}_\alpha^q(\Omega)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{k}^{2q} e^{2\tilde{k}\alpha} |\psi_k|^2$, $\|u\|^2_{\mathbf{E}_\beta^{3,q}(\mathcal{D})} = \sum_{l=0}^{3} \max_{[0,T]} \left\|\partial_t^l u(t,\cdot)\right\|^2_{\mathbf{E}_{\beta(t)}^{q-l}(\Omega)}$ відповідно, де $\tilde{k} = \sqrt{1+k^2}$.

Отримані результати доповнюють дослідження [1], в якому розглянуто випадок однакових часових проміжків ($\tau = T/2$).

Особливістю презентованого дослідження є наявність у задачі лише однієї просторової змінної x, завдяки чому вдається уникнути проблеми малих знаменників, яка характерна для подібних задач з багатьма просторовими змінними.

У такий спосіб із умовно коректних багатоточкових задач виділяється клас триточкових коректних за Адамаром задач.

[1] Волянська І.І., Ільків В.С. Умови розв'язності триточкової задачі для диференціального рівняння з частинними похідними у двовимірному циліндрі // Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2015. – Т. 12, № 2. – С. 74-100.

e-mail: pkalenyuk@gmail.com, i.volyanska@i.ua, ilkivv@i.ua, znytrebych@gmail.com

Функції Ґріна задач термопружності для півпросторів з джерелами або диполями тепла

Кіт Г.С., Андрійчук Р.М.
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

За дії теплових джерел або диполів побудовані функції Ґріна задач стаціонарної теплопровідності й термопружності для півпросторів з вільною, жорстко, гладко або гнучко закріпленою межею, на якій задана нульова температура або теплоізоляція. При цьому використано гармонічні потенціали простого та подвійного шару при розв'язуванні задач теплопровідності й термопружні потенціали переміщень у безмежному просторі з двома дзеркально розташованими відносно межі тепловими джерелами (стоками) або диполями, осі яких спрямовані в одну або в протилежні сторони осі Oz. Для задоволення крайових умов на межі побудовано бігармонічні функції Лява. Наведено явні вирази для температури, переміщень і напружень, які використано при визначенні термопружного стану півпростору, зумовленого розподіленими у паралельній до межі круговій області S джерелами або диполями тепла.

Для визначення густини теплових джерел при заданій в області S температурі та густини теплових диполів при відомому там тепловому потоці (який зумовлений збуренням заданого теплового потоку теплонепроникним круговим включенням) побудовані двовимірні інтегральні рівняння з полярними, гіперсингулярними й регулярними ядрами (що враховують крайові умови на межі). Для кругової області ці рівняння можна розв'язувати аналітично-числовим способом. Для цього їх регуляризуємо, розбиваємо область S на граничні елементи за радіусом та кутом і задовольняємо рівняння в колокаційних точках усередині введених елементів, використовуючи кусково-сталу апроксимацію шуканих функцій та різницеві схеми для її перших і других похідних. Так приходимо до системи лінійних алгебричних рівнянь. Для певних розподілів джерел і диполів тепла визначені напруження на межі тіла.

[1] Кіт Г.С., Андрійчук Р.М. Вплив стаціонарного джерела тепла на напружений стан півпростору з жорстко, гладко або гнучко закріпленою межею // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – Т. 58, № 4. – С. 78-86.

[2] Кіт Г.С., Андрійчук Р.М. Термопружний стан півпростору із закріпленою межею за тепловиділення у паралельній до неї круговій області // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2017. – Вип. 3. – С. 98-104.

[3] Кіт Г.С., Андрійчук Р.М. Термонапружений стан півпростору з вільною межею за теплоізоляції у паралельній до неї круговій області // Вісник Київськ. нац. ун-ту імені Тараса Шевченка. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2017. – Вип. 3. – С. 79-82.

e-mail: hkit@iapmm.lviv.ua, andriychukroman@gmail.com

Біфуркація циклів параболічних систем із малою дифузією

Клевчук І.І.
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Розглядається рівняння [1, 2]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\omega_0 u + \varepsilon \left[(\gamma + i\delta) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\alpha + i\beta) u \right] + (d_0 + ic_0) u^2 \overline{u} \tag{1}$$

з періодичною умовою

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \tag{2}$$

де ε — малий додатний параметр.

Теорема 1. *Нехай $\omega_0 > 0$, $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, $d_0 < 0$ і для деякого цілого n виконується нерівність $\alpha > \gamma n^2$. Тоді знайдеться таке $\varepsilon_0 > 0$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ задача (1), (2) має періодичні відносно t розв'язки*

$$u_n = u_n(t, x) = \sqrt{\varepsilon} r_n \exp(i(\chi_n(\varepsilon) t + nx)) + O(\varepsilon),$$

де $r_n = \sqrt{(\alpha - n^2\gamma)\,|d_0|^{-1}}$, $\chi_n(\varepsilon) = \omega_0 + \varepsilon\beta + \varepsilon c_0 r_n^2 - \varepsilon\delta n^2$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ці розв'язки експоненціально орбітально стійкі тоді і тільки тоді, коли виконується умова $(d_0 r_n^2 - \gamma k^2)^2 (\gamma^2 k^2 + \delta^2 k^2 - 2\gamma d_0 r_n^2 - 4\gamma^2 n^2 - 2\delta c_0 r_n^2) > 4\gamma^2 n^2 (c_0 r_n^2 - \delta k^2)^2$ при всіх $k \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$.

Цей метод можна застосувати до дослідження періодичних режимів систем із запізненням та рівняння спінового горіння

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \xi = 2\varepsilon \left[\frac{\partial \xi}{\partial t} \left(1 - \frac{4}{3} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 \right) + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^3 \xi}{\partial t \partial x^2} \right], \quad \xi(t, x + 2\pi) = \xi(t, x), \tag{3}$$

де ε — малий додатний параметр, $\varrho > 0$. Біжучі хвилі задачі (3) мають вигляд $\xi_n(t, x) = \sqrt{1 - \dfrac{n^2}{\varrho^2}} \cos(t + nx) + O(\varepsilon)$, де $n \in \mathbb{Z}$, $n^2 < \varrho^2$. Біжучі хвилі $\xi_n(t, x)$ експоненціально орбітально стійкі тоді і тільки тоді, коли $n^2 < \dfrac{1}{6}(2\varrho^2 + 1)$.

[1] Klevchuk I.I. Existence of countably many cycles in hyperbolic systems of differential equations with transformed argument // J. Math. Sci. – 2016. – V. 215, No. 3. – P. 341-349.

[2] Klevchuk I.I. Bifurcation of self-excited vibrations for parabolic systems with retarded argument and weak diffusion // J. Math. Sci. – 2017. – V. 226, No. 3. – P. 285-295.

e-mail: i.klevchuk@chnu.edu.ua

Двосторонні алгоритми з надлінійною швидкістю збіжності

Копач М.І.
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

Юрківська О.Р.
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

Вимоги щодо монотонності та опуклості оператора F у рівнянні

$$x = Fx$$

належать до істотних перешкод, які утрудняють використання методу Чаплигіна та його модифікацій на практиці. Численні спроби послабити ці вимоги приводили здебільшого до двосторонніх алгоритмів з немонотонними та неопуклими операторами, які втрачали в порівнянні з методом Чаплигіна характерну для нього квадратичну швидкість збіжності.

Двосторонні методи Курпеля не потребують монотонності та опуклості оператора F і водночас зберігають квадратичну збіжність, однак при їх обґрунтуванні присутня вимога диференційовності оператора F та потреба відшукання відповідних обернених операторів що на практиці вдається реалізувати тільки наближено.

Розвиваючи ідеї М.С. Курпеля Б.А. Шувар [1], [2] запропонував підхід, який дозволяє будувати двосторонні алгоритми не вимагаючи диференційовності оператора F, зберігаючи при цьому двосторонність та монотонність ітерації та квадратичний характер збіжності.

В доповіді розглядається спосіб побудови двосторонніх алгоритмів, який є продовженням досліджень Б.А. Шувара для рівняння $x = Fx$ з напівліпшицієвим оператором. Ці алгоритми мають надлінійну швидкість збіжності, в окремих випадках квадратичну.

[1] Шувар Б.А. Двусторонние итерационные методы решения нелинейных уравнений в полуупорядоченных пространствах // Второй симпозиум по методам решения нелинейных уравнений и задач оптимизации. – Т. 1. – Таллин: Ин-т кибернетики АН ЭССР. – 1981. – С. 68-73.

[2] Шувар Б.А., Копач М.І., Ментинський С.М., Обшта А.Ф. Двосторонні наближені методи. – Івано-Франківськ: ВДВ ЦІТ, 2007.

e-mail: kopachm2009@gmail.com

Одновимірна параболічна початково-крайова задача з нелокальною умовою спряження типу Феллера-Вентцеля

Копитко Б.І.
Ченстоховський політехнічний університет
Шевчук Р.В.
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
Національний університет "Львівська політехніка"

Доповідь присвячена двом взаємопов'язаним питанням: встановленню класичної розв'язності однієї початково-крайової задачі для лінійного одновимірного параболічного рівняння другого порядку з розривними коефіцієнтами з нелокальною складовою інтегрального типу в умові спряження та побудові за допомогою її розв'язку двопараметричної напівгрупи Феллера, якій відповідає на заданому проміжку прямої деякий неоднорідний марковський процес. Об'єднання цих двох питань представляє так звану задачу про склеювання двох дифузійних процесів, заданих своїми твірними диференціальними операторами в підобластях згаданого проміжка, яку ще можна трактувати як задачу про побудову математичної моделі фізичного явища дифузії в середовищі з мембранами (див. [1, 2]). При цьому додатково припускається, що в межових точках розглядуваних областей, де розташовані рухомі мембрани (це означає, що положення цих точок на числовій прямій визначається за допомогою заданих функцій, які залежать від часової змінної), вважаються заданими відповідні варіанти загальної крайової умови або умови спряження типу Феллера-Вентцеля [3-5].

Детально вивчається випадок, коли на зовнішніх частинах меж розглядуваних областей визначені крайові умови у відповідності до властивості повного відбиття дифузійного процесу, а на спільній частині меж цих областей задається умова спряження, яка відповідає за часткове відбиття процесу у комбінації з можливістю його виходу з межі області стрибками.

Центральне місце в доповіді займає дослідження згаданої вище нелокальної параболічної задачі спряження, яка мабуть вперше (пор. з [6, 7]) у такій постановці розглядається в припущенні, коли області, де задані рівняння, є криволінійними, до того ж функції, які визначають межі цих областей, задовольняють лише умову Гельдера з показником $> \frac{1}{2}$. Розв'язок даної задачі отримано методом граничних інтегральних рівнянь і доведено, що він володіє напівгруповою властивістю. Наявність інтегрального зображення для знайденої напівгрупи дозволяє відносно легко обґрунтувати твердження про те, що ця напівгрупа породжує на заданому проміжку прямої деякий неоднорідний марковський процес.

[1] Портенко М.І. Процеси дифузії в середовищах з мембранами. – К.: Інститут математики НАН України, 1995.

[2] Kopytko B.I., Portenko M.I. The problem of pasting together two diffusion processes and classical potentials // Theory Stoch. Processes. – 2009. – V. 15(31), No. 2. – P. 126-139.

[3] Feller W. The parabolic differential equations and associated semi-groups of transformations // Ann. of Math. Soc. – 1952. – V. 55. – P. 468-519.

[4] Вентцель А.Д. Полугруппы операторов, соответствующие обобщенному дифференциальному оператору второго порядка // Докл. АН СССР. Математика. – 1956. – Т. 111, № 2. – С. 269-272.

[5] Langer H., Schenk W. Knotting of one-dimensional Feller process // Math. Nachr. – 1983. – V. 113. – P. 151-161.

[6] Камынин Л.И. О существовании решения краевых задач для параболического уравнения с разрывными коэффициентами // Известия Академии Наук СССР, Серия математическая. – 1964. – Т. 28. – С. 721-744.

[7] Камынин Л.И. Об одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1964. – Т. 4, № 6. – С. 1006-1024.

e-mail: bohdan.kopytko@gmail.com, r.v.shevchuk@gmail.com

Умовно періодичні коливання систем функціонально-диференціальних рівнянь із змінними частотами

Кравець В.І.
Таврійський державний агротехнологічний університет

Розглядається задача про існування умовно періодичних розв'язків систем диференціальних рівнянь виду

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= Ay + \varepsilon a_1(\varphi_\tau, y_\tau, \varepsilon), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega\,(y) + \varepsilon b_1(\varphi, y, \varepsilon), \end{aligned} \tag{1}$$

де $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)$, $y_\tau = (y_{1\tau}, \ldots, y_{n\tau})$, $\varphi_\tau = (\varphi_{1\tau}, \ldots, \varphi_{m\tau})$, $\omega(y) = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$, $m \geq 2$, $a_1(\varphi_{\tau,}\ y_\tau\varepsilon)$, $b_1(\varphi, y, \varepsilon)$ — 2π-періодичні по φ, φ_τ, цілі відносно y, аналітичні по ε при $|\varepsilon| < \varepsilon^0$ функції з коефіцієнтами, які є тригонометричними многочленами по φ, φ_τ, ε — малий параметр, τ — мала порівняно з 2π стала додатна величина, яка характеризує запізнення в системі, A — дійсна стала матриця, причому $\mathrm{Re}\,(A\,(\mu_j)) \neq 0$, $y_\tau = y\,(t-\tau)$, $\tau \in [-h, 0]\,,\ h \geq 0$, $\varphi \in C_n\,([-h; 0])$.

Якщо функції $a_1(\varphi_\tau, y_\tau, \varepsilon)$, $b_1(\varphi, y, \varepsilon)$ визначені в області $\|y\| < d$, $\|y_\tau\| < d$, і мають неперервні похідні по своїм аргументам до другого порядку включно, то для системи рівнянь (1), за допомогою методу асимптотичного інтегрування [3], який базується на методі усереднення нелінійної механіки [1, 2], знайдені і побудовані умовно періодичні розв'язки системи (1).

[1] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А., Самойленко А.М. Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка. – 1969. – 247 с.

[2] Бигун Я.И., Фодчук В.И. Применение метода усреднения для исследования одного класса многочастотных систем с запаздыванием // Укр. мат. журнал. – 1980. – Т. 32, № 2. – С. 149-154.

[3] Бігун Я.Й. Про усереднення в багаточастотних системах із змінним запізненням // Науковий вісник ЧНУ. Серія "Математика". – 2008. – № 421. – С. 29-33.

[4] Голец Б.И., Голец В.Л., Петришин Р.И. Об усреднении в колебательных системах проходящих через резонанс // Укр. мат. журнал. – 1980. – Т. 32, № 4. – С. 448-455.

e-mail: v_i_kravets@ukr.net

Алгебра блочно-симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на просторі $\mathcal{X}^2 = \oplus_{\ell_1}\mathbb{C}^2$ та її спектр

Кравців В.В.
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

Розглянемо простір $\mathcal{X}^2 = \oplus_{\ell_1}\mathbb{C}^2$, елементами якого є вектори $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix}, \ldots \right)$, де $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$. Позначимо через $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}^2)$ алгебру блочно-симетричних поліномів на $\mathcal{X}^2$, $\mathcal{H}_{bvs}(\mathcal{X}^2)$ — алгебру блочно-симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на $\mathcal{X}^2$. Через $\mathcal{M}_{bvs}(\mathcal{X}^2)$ позначимо спектр алгебри $\mathcal{H}_{bvs}(\mathcal{X}^2)$.

У роботах [1], [2] було введено поняття оператора симетричної та мультиплікативної згортки на спектрах алгебр симетричних аналітичних функцій. У роботі [3] було введено поняття оператора симетричної згортки на спектрах алгебр блочно-симетричних поліномів. У роботі [4] було описано спектр алгебри блочно-симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на $\mathcal{X}^2$.

У доповіді буде описано характери алгебри блочно-симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на ℓ_1-сумі банахового простору $\mathbb{C}^2$ як функції експоненціального типу з "плоскими" нулями. Зокрема, у доповіді буде розглядатися поняття мультиплікативного зсуву для елементів простору $\mathcal{X}^2$ і оператора мультиплікативної згорки на спектрі алгебри $\mathcal{H}_{bvs}(\mathcal{X}^2)$. Використовуючи мультиплікативну згортку, буде наведено приклад функції експоненціального типу, яка не є характером алгебри $\mathcal{H}_{bvs}(\mathcal{X}^2)$.

[1] Chernega I., Galindo P., Zagorodnyuk A. The convolution operation on the spectra of algebras of symmetric analytic function // J. Math. Anal. Appl. – 2012. – V. 395. – P. 569-577.

[2] Chernega I., Galindo P., Zagorodnyuk A. A multiplicative convolution on the spectra of algebras of symmetric analytic functions // Rev. Mat. Complut. – 2014. – V. 27. – P. 575-585.

[3] Кравців В.В. Алгебри блочно-симетричних поліномів: твірні елементи та оператор зсуву // Математичний вісник НТШ. – 2011. – Т. 8. – С. 107-121.

[4] Kravtsiv V.V., Zagorodnyuk A.V. Representation of spectra of algebras of block-symmetric analytic functions of bounded type // Carpathian Math. Publ. – 2016. – V. 8, No. 2. – P. 168-178.

e-mail: maksymivvika@gmail.com

Аналог інтегральної задачі для рівнянь із частинними похідними над полем p-адичних чисел

Кузь А.М., Романів А.М., Симотюк М.М.
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України

Нехай p — деяке просте число, $|\cdot|_p$ — p-адична норма, $\mathbb{Q}_p$ — поле p-адичних чисел [1], $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leqslant 1\}$.

Задачі для рівнянь із частинними похідними над полем $\mathbb{Q}_p$ виникають у математичній фізиці при описі процесів на планківських відстанях [2].

Позначимо: $H_k(x), k \geq 0,$ — фізичні поліноми Ерміта, $\mathcal{H}$ — простір функцій $\varphi(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varphi_k H_k(x)$ ($\varphi_k \in \mathbb{Q}_p$, $\lim\limits_{k\to\infty} |\varphi_k|_p \sqrt{|k!2^k|_p} = 0$) з нормою $\|\varphi; \mathcal{H}\| = \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}_+} |\varphi_k|_p \sqrt{|k!2^k|_p}$ [3]; $\mathcal{A}$ — простір функцій $u(t,x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k(t) H_k(x)$ ($u_k(t)$ – аналітичні на $\mathbb{Z}_p$ функції, $\lim\limits_{k\to\infty} \overline{u}_k \sqrt{|2^k k!|_p} = 0$, $\overline{u}_k = \sup\limits_{j\in\mathbb{Z}_+} |(j\,!)^{-1}\, u_k^{(j)}(0)|_p$) з нормою $\|u; \mathcal{A}\| = \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}_+} \overline{u}_k \sqrt{|2^k k!|_p}$.

Розглядаємо таку задачу:

$$\partial_t^n u(t,x) + \sum_{j=1}^{n-1} a_{n-j} A^{n-j}(\partial_x) u(t,x) = 0, \quad t \in \mathbb{Z}_p, \quad x \in \mathbb{Q}_p, \tag{1}$$

$$\mathcal{I}_{r_j}[u] = \varphi_j(x), \quad j = 1, \ldots, n, \quad x \in \mathbb{Q}_p, \tag{2}$$

де $a_j \in \mathbb{Q}_p$, $\varphi_j \in \mathcal{H}$, $r_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = 1, \ldots, n$, $r_q < r_s$, $q < s$, $A(\partial_x) = -\partial_x^2 + 2x\partial_x$; $\mathcal{I}_{r_j}$, $j = 1, \ldots, n$, — операція, дія якої на функцію $u(t,x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k(x) t^m$ задається формулою

$$\mathcal{I}_{r_j}[u] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k(x) T^{k+r_j+1}}{k + r_j + 1}, \quad T \in \mathbb{Z}_p. \tag{3}$$

Встановлено умови на коефіцієнти рівняння (1), при виконанні яких в просторі $\mathcal{A}$ існує єдиний розв'язок $u(t,x)$ задачі (1), (2), що неперервно залежить від функцій $\varphi_j(x), j = 1, \ldots, n$.

Задача (1), (2) є аналогом задачі з інтегральними умовами для випадку дійсних змінних t, x.

[1] Kochubei A. N. Pseudo-Differential Equations and Stochastics over Non-Archimedean Fields. – New York: Marcel Dekker, 2001. – 336 p.

[2] Владимиров В.С., Волович И.В., Зеленов Е.И. p-адический анализ и математическая физика. – М.: Физматлит, 1994. – 352 с.

[3] Khrennikov A. Yu. Mathematical methods of the non-Archimedean physics // Uspekhi Mat. Nauk. – 1990. – V. 45, No. 4. – P. 79-110.

e-mail: kuz.anton87@gmail.com, romaniv_a@ukr.net, quaternion@ukr.net

Асимптотична поведінка розв'язків системи диференціальних рівнянь, які частково розв'язані відносно похідних з неквадратними матрицями

Ліманська Д.Є.
Одеський національний університет ім. І. І. Мечникова
Самкова Г.Є.
Одеський національний університет ім. І. І. Мечникова

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$A(z)Y^{'} = B(z)Y + f(z, Y, Y^{'}), \tag{1}$$

де матриці $A, B : D_1 \to C^{m\times n}, D_1 = \{z \in C : |z| < R_1, R_1 > 0\}$, матриці $A(z), B(z)$ є аналітичними в області $D_{10}, D_{10} = D_1\backslash\{0\}$, пучок матриць $A(z)\lambda-B(z)$ є сингулярним при $z \to 0$, вектор-функція $f : D_1 \times G_1 \times G_2 \to C^m$, де області $G_k \subset C^n, 0 \in G_k, k = 1, 2$, функція $f(z, Y, Y')$ є аналітичною в області $D_1 \times G_1 \times G_2$.

Систему (1) досліджуємо у припущенні, що $m > n, n = p$ та $rangA(z) = p$ при $z \in D_1$.

Без обмеження загальності, будемо вважати, що матриці $A(z), B(z)$ та вектор-функція $f(z, Y, Y')$ мають вигляд

$$A(z) = \begin{pmatrix} A_1(z) \\ A_2(z) \end{pmatrix};\ B(z) = \begin{pmatrix} B_1(z) \\ B_2(z) \end{pmatrix};\ f(z, Y, Y') = \begin{pmatrix} f_1(z, Y, Y') \\ f_2(z, Y, Y') \end{pmatrix}, \tag{2}$$

де $A_1 : D_1 \to C^{p\times p}, A_2 : D_1 \to C^{(m-p)\times p}, B_1 : D_1 \to C^{p\times p}, B_2 : D_1 \to C^{(m-p)\times p}, defA_1(z) \neq 0$ при $z \in D_1, f_1 : D_1\times G_1\times G_2 \to C^p, f_2 : D_1\times G_1\times G_2 \to C^{(m-p)}$.

Тоді система (1) набуде вигляду

$$Y^{'} = A_1^{-1}B_1(z)Y + A_1^{-1}f_1(z, Y, Y^{'}), \tag{3}$$

$$A_2(z)Y^{'} = B_2(z)Y + f_2(z, Y, Y^{'}), \tag{4}$$

де $A_1^{-1}B_1(z)$ — аналітична матриця в області $D_{10}, A_1^{-1}(z)f_1(z, Y, Y')$ є аналітичною вектор-функцією в області $D_1 \times G_1 \times G_2$.

Розглянемо два випадки:

1) $A_1^{-1}B_1(z)$ — аналітична матриця в області D_{10} та має у точці $z = 0$ усувну особливу точку.

Введемо позначення

$$P^{(1)}(z) = A_1^{-1}(z)B_1(z), F(z, Y, Y') = A_1^{-1}f_1(z, Y, Y'), \tag{5}$$

тоді система (3) буде мати вигляд

$$Y^{'} = P^{(1)}Y + F(z, Y, Y^{'}), \tag{6}$$

де $P^{(1)} : D_1 \to C^{p\times p}, P^{(1)}(z)$ — аналітична матриця в області $D_1, F(z, Y, Y')$ — аналітична вектор-функція в області $D_1 \times G_1 \times G_2$.

2) $A_1^{-1}B_1(z)$ — аналітична матриця в області D_{10} та має у точці $z = 0$ полюс r-го порядку.

Введемо позначення

$$z^{-r}P^{(2)}(z) = A_1^{-1}(z)B_1(z), F(z, Y, Y') = A_1^{-1}f_1(z, Y, Y'), \tag{7}$$

тоді система (3) матиме вигляд

$$Y^{'} = z^{-r}P^{(2)}Y + F(z, Y, Y^{'}), \tag{8}$$

де $P^{(2)} : D_1 \to C^{p\times p}, P^{(2)}(z)$ — аналітична матриця в області D_1.

В обох випадках знайдені достатні умови існування аналітичних розв'язків систем (6) і (8) з початковою умовою

$$Y(z) \to 0,\ z \to 0,\ z \in D_{10},$$

які задовольняють додатковій умові

$$Y^{'}(z) \to 0,\ z \to 0,\ z \in D_{10}.$$

Крім того, для цих розв'язків у деякому околі точки $z = 0$ знайдена оцінка.

[1] Ліманска Д.Є., Самкова Г.Є. О поведении решений некоторых систем дифференциальних уравнений, частично разрешенных относительно производных // Вісник Одеського національного університету. – 2014. – Т. 19, № 1. – С. 16-28.

[2] Limanska D. On the behavior of solutions of some system of differential equations partially solved with respect to the derivatives in the presence of a pole // Journal of Mathematical Sciences. – 2018. – V. 229, No. 4. – P. 455-469.

[3] Limanskaya D.E., Samkova G.E. On the existence of analytic solutions of certain types of system, partially resolved relatively to the derivatives in the case of a pole // Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. – 2018. – V. 79. – P. 3-12.

e-mail: liman.diana@gmail.com, samkovagalina@i.ua

Побудова фундаментальної матриці розв'язків для ультрапараболічних систем рівнянь високого порядку

Малицька Г.П., Буртняк І.В.
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

В даній роботі розв'язана задача побудови фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші (ФМРЗК) для систем такого вигляду

$$\partial_t u_\mu(t,R) - \sum_{j=1}^{n_1} x_j \partial_{y_j} u_\mu(t,R) - \sum_{j=1}^{n_2} y_j \partial_{z_j} u_\mu(t,R) = \sum_{|k|\le 2b} \sum_{\nu=1}^{n_0} a_k^{\nu\mu} D_x^k u_\nu(t,R), \quad (1)$$

де $\mu = \overline{1,n_0}, n > n_1 > n_2, R = (x,y,z), x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^{n_1}, z \in \mathbb{R}^{n_2}$. Оператор $\partial_t = \sum\limits_{|k|\le 2b} a_k(t,R)D_x^k$ — рівномірно параболічний за І.Г. Петровським в $\Pi = \{[0,T]\times\mathbb{R}^{n_3}\}$, $n_1 + n_2 = n_3, a_k(t,R) = (a_k^{\nu\mu})_{\mu\nu=1}^{n_0}$.

До (1) можна застосувати метод Леві [1]. Припустимо, що

1) $a_k(t,R), \partial_y a_k(t,R), \partial_z a_k(t,R)$ — неперервні, обмежені в Π;

2) існують сталі $c_1 > 0, \alpha \in (0,1], r \in (0,1]$ такі, що для будь-яких $R, S \in \Pi, S = (\xi,\eta,\zeta)$ виконуються нерівності:

$|a_k(t,R) - a_k(t,S)| \le c_1|x-\xi|^\alpha$, $|\partial_y a_k(t,R) - \partial_y a_k(t,S)| \le c_1|R-S|^r$, $|\partial_z a_k(t,R) - \partial_z a_k(t,S)| \le c_1|R-S|^r$, $|k| = 2b$;

3) матриця $(a_k^{\nu\mu})_{\mu\nu=1}^{n_0}, |k| = 2b$, на характеристиках оператора

$\partial_t - \sum\limits_{j=1}^{n_1} x_j\partial_{y_j} - \sum\limits_{j=1}^{n_2} y_j\partial_{z_j}$ задовольняє умови Лаппо-Данилевського.

Теорема 1. *Якщо виконуються умови 1–3, то система* (1) *має ФМРЗК* $G(t,R;\tau,S)$ *і для ФМРЗК разом з її похідними справджуються оцінки* $\partial_t^m |G(t,R;\tau,S)| \le A_m(t-\tau)^{-\frac{(6b+3)n+|m|}{2b}}\Phi(t,R;\tau,S), |m| \le 2b,$

$\partial_{y_j}|G(t,R;\tau,S)| \le A(t-\tau)^{-\frac{(6b+3)n+2b+1}{2b}}\Phi(t,R;\tau,S),\ j = \overline{1,n_1},$

$\partial_{z_j}|G(t,R;\tau,S)| \le A(t-\tau)^{-\frac{(6b+3)n+4b+1}{2b}}\Phi(t,R;\tau,S),\ j = \overline{1,n_2},$

де $\Phi(t,R;\tau,S) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} A^k\Gamma(1+\frac{k\alpha}{2b})\Gamma(\frac{\alpha}{2b})\Gamma^{-1}(1+\frac{(k+1)\alpha}{2b})\exp\{-c\rho(t,x;\tau,\xi) - 2^{-3qk}c(\rho_1(t,R';\tau,S') + \rho_2(t,R;\tau,S))\}$, $R' = (x,y)$, $S' = (\xi,\eta)$, $q = 2b(2b-1)$, $\rho(t,x;\tau,\xi) = (|x-\xi|(t-\tau)^{-1/2b})^2$, $\rho_1(t,R';\tau,S') = (|y-\eta+x(t-\tau)|(t-\tau)^{-(2b+1)/2b})^2$, $\rho_2(t,R;\tau,S) = (|z-\zeta+y(t-\tau)+2^{-1}x(t-\tau)^2|(t-\tau)^{-(4b+1)/2b})^2$,

Сталі A, A_m, c *залежать від* $n, 2b, c_1, \alpha, r$ *та сталої параболічності* δ.

[1] Малицька Г.П. Системи рівнянь типу Колмогорова // Укр. мат. журн. – 2008. – Т. 60, № 12. – С.1650-1663.

e-mail: bvanya@meta.ua

Деякі властивості біліпшицевих відображень

Марцінків М.В.
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника

Розглянемо відображення $F : X \to Y$, де X, Y — метричні простори. Відображення F називається *ліпшицевим* на просторі X, якщо існує стала $c > 0$ така, що для довільних елементів $x_1, x_2 \in X$ справедлива нерівність $\rho(F(x_1), F(x_2)) \leq c\rho(x_1, x_2)$, де $\rho(x_1, x_2)$ — відстань між елементами простору X, $\rho(F(x_1), F(x_2))$ — відстань між елементами простору Y. Найменша можлива стала c називається *сталою Ліпшица*.

Розглянемо метричний простір X з додатною дійснозначною функцією $\alpha(x)$ такою, що $|\alpha(x_1) - \alpha(x_2)| \leq \rho(x_1, x_2) \leq \alpha(x_1) + \alpha(x_2)$, для довільних елементів $x_1, x_2 \in X$. Функцію $\alpha(x)$ називають *нормою* метричного простору. Метричний простір з заданою нормою називають *нормованою множиною*. Відомо, що довільний метричний простір X є нормованим відносно норми $\alpha(x) = \rho(\theta, x)$, де θ — довільна фіксована точка простору X. Такий простір (X, α) називається *простором з відміченою точкою*. Відомою є наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай X — нормована множина. Існує єдиний, з точністю до ізометричного ізоморфізму, банахів простір $B(X)$ над полем K, а також ізометричне вкладення $\nu : X \to B(X)$, такі, що довільне відображення F з $Lip_0(X, E)$ може бути продовжене до лінійного неперервного оператора $\widetilde{F} : B(X) \to E$, причому $\|\widetilde{F}\| = L_F$ для довільного нормованого простору E.*

Такий простір називається вільним банаховим простором. Нехай (X, θ_X), (Y, θ_Y) — метричні простори з відміченими точками. Скажемо, що X та Y є ліпшицево еквівалентні, якщо існує бієктивне ліпшицеве відображення $F\colon X \to Y$ таке, що F^{-1} — ліпшицеве. (Таке відображення F називають біліпшицевим).

У доповіді розглядатимуться деякі властивості біліпшицевих відображень, зокрема такі:

Теорема 2. *Нехай (X, θ_X), (Y, θ_Y) — метричні простори з відміченими точками. Якщо X та Y ліпшицево еквівалентні, то банахові простори $B(X)$ та $B(Y)$ — ізоморфні. Якщо простір Y — повний та існує $F \in Lip_0(X, Y)$ таке, що $\widehat{F}$ є ізоморфізмом просторів $B(X)$ і $B(Y)$, то F — біліпшицеве відображення.*

Теорема 3. *Нехай X, Y — повні нормовані множини (тобто повні метричні простори з відміченими точками) і $F\colon X \to Y$ сюр'єктивне відображення з $Lip_0(X, Y)$. Відображення F буде біліпшицевим тоді і тільки тоді, коли знайдеться $\varepsilon > 0$ таке, що $\rho(F(x), F(y)) > \varepsilon\rho(x, y)$ для довільних x, $y \in X$.*

e-mail: mariadubey@gmail.com

Математика і живопис

Маслюченко В.К., Маслюченко Г.-Ж.Я.
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича

Взаємозв'язки математики і мистецтва давні і глибокі. Частково вони проаналізовані в працях [1, 2], де вказана і відповідна література. Тут ми глибше розглянемо вплив математики на живопис, доповнивши інформацію, подану в [1, 2], де були розглянуті вчення про перспективу, золотий переріз, картини Ешера і мистецький проект "Я формула", що був репрезентований на виставці чернівецького скульптора і художника Святослава Вірсти у листопаді 2017 року.

Геометричні фігури (квадрати, прямокутники, круги, трикутники) творять основу супрематичних картин відомого українського художника польського походження Казимира Малевича. Іконою супрематизму вважають його знаменитий "Чорний квадрат", в якому за тлумаченням самого художника чорний квадрат символізує відчуття, а біле тло — "Ніщо" поза цим відчуттям. Інформацію про К. Малевича і супрематизм можна знайти у працях [3-5].

Учні К. Малевича Ілля Чашник і Микола Суєтін продовжували традицію вчителя, використовуючи різноманітні геоматричні фігури у своїх супрематичних композиціях.

Переосмислення ідей К. Малевича є і у творах українського художника Леоніда Гопанчука.

Геометричні мотиви міських пейзажів, інтер'єрів та екстер'єрів будинків зустрічаються у творах буковинських художників Артура Кольніка, Леона Копельмана, Петра Грицика і Ореста Криворучка (див. [6]).

[1] Маслюченко В.К., Матвіїшин Г.Я. Мистецтво і математика //VII міжнар. наук.-пр. конф. "Математика. Інформаційні технології. Освіта", Світязь, 3-5 червня 2018 р., тези доповідей. — Луцьк: ПП Іванюк В.П., 2018. — С. 159.

[2] Маслюченко В.К., Матвіїшин Г.Я. Мистецький проект "Я формула"//VII міжнар. наук.-пр. конф. "Математика. Інформаційні технології. Освіта", Світязь, 3-5 червня 2018 р., тези доповідей. — Луцьк: ПП Іванюк В.П., 2018. — С. 160-161.

[3] Малевич К. Черный квадрат. – СПб: Азбука, 2001. – 576 с.

[4] Turowski A. Malewicz w Warszavie. – Krakow: 2002.

[5] Горбачов Дмитро. Малевич та Україна. – К.: СІМ студія, 2006. – 456 с.

[6] Осадчук Сергій, Дугаєва Тетяна. Чернівці. Художній альбом. – Чернівці: Книги XXI, 2017. – 362 с.

e-mail: v.maslyuchenko@gmail.com

Мішана задача для сингулярного диференціального рівняння параболічного типу

Махней О.В.
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

Крайові задачі для диференціальних рівнянь теплопровідності з гладкими коефіцієнтами вивчено в літературі досить добре (див., наприклад, [1]). Однак, під час моделювання процесів передачі тепла часто виникають крайові задачі з кусково-неперервними коефіцієнтами або коефіцієнтами, які є узагальненими похідними від розривних функцій. Такі задачі вже почали вивчатись у роботах [2, 3, 4].

Розглянемо наступну мішану задачу для диференціального рівняння параболічного типу: знайти розв'язок $T(x,t)$ рівняння

$$a(x)\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(c(x)\frac{\partial T}{\partial x}\right) - g(x)\,T \tag{1}$$

з крайовими умовами

$$\begin{cases} p_1 T(0,t) + p_2 T_x^{[1]}(0,t) = \psi_1(t), \\ q_1 T(l,t) + q_2 T_x^{[1]}(l,t) = \psi_2(t) \end{cases} \tag{2}$$

за початкової умови

$$T(x,0) = \varphi(x), \tag{3}$$

якщо $a(x) = b'(x)$, $g(x) = h'(x)$, $b(x)$, $h(x)$ — неперервні справа неспадні дійсні функції обмеженої варіації на проміжку $[0,l]$, $c(x) > 0$, $c^{-1}(x)$ — обмежена і вимірна функція на проміжку $[0,l]$, функція $\varphi(x)$ — неперервна на відрізку $[0,l]$, функції $\psi_1(t)$ і $\psi_2(t)$ — неперервно диференційовні для $t \geqslant 0$, p_1, p_2, q_1, q_2 — дійсні числа, $p_1 p_2 \leqslant 0$, $q_1 q_2 \geqslant 0$, а $T_x^{[1]}(x,t) \overset{df}{=} c(x)\frac{\partial T}{\partial x}$ — квазіпохідна. Штрихами у формулах $a(x) = b'(x)$, $g(x) = h'(x)$ позначено узагальнене диференціювання, а тому $a(x)$, $g(x)$ — міри, тобто узагальнені функції нульового порядку над простором неперервних фінітних функцій.

Розв'язок задачі (1)–(3) шукатимемо методом редукції у вигляді суми двох функцій: $T(x,t) = u(x,t) + v(x,t)$.

Функція $u(x,t)$ є розв'язком крайової квазістаціонарної задачі:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(c(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - g(x)\,u = 0,$$

$$\begin{cases} p_1 u(0,t) + p_2 u_x^{[1]}(0,t) = \psi_1(t), \\ q_1 u(l,t) + q_2 u_x^{[1]}(l,t) = \psi_2(t), \end{cases}$$

яка отримується з задачі (1)–(3), якщо t вважати параметром.

Функцію $u(x,t)$ можна обчислити як першу координату вектора $\bar{u} = (u, u^{[1]})^T$ за формулою

$$\bar{u}(x,t) = B(x,0) \cdot (P + Q \cdot B(l,0))^{-1} \cdot \bar{\Gamma}(t),$$

де $B(x,s)$ – відповідна матриця Коші,

$$P=\begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix},\quad \bar{\Gamma}(t)=\begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{pmatrix}.$$

Функцію $v(x,t)$, що є розв'язком мішаної задачі

$$a(x)\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(c(x)\frac{\partial v}{\partial x}\right)-g(x)v-a(x)\frac{\partial u}{\partial t},$$

$$\begin{cases} p_1 v(0,t)+p_2 v_x^{[1]}(0,t)=0, \\ q_1 v(l,t)+q_2 v_x^{[1]}(l,t)=0, \end{cases}$$

$$v(x,0)=\tilde{\varphi}(x),\quad \tilde{\varphi}(x)=\varphi(x)-u(x,0),$$

шукаємо у вигляді ряду $v(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k(t)X_k(\omega_k,x)$. Якщо цей ряд збігається рівномірно й рівномірно збігаються ряди, отримані з нього почленним диференціюванням за змінними x і t, то функцію $v(x,t)$ можна знайти за формулою

$$v(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\varphi_k e^{-\omega_k t}-\int_0^t d_k(s)e^{\omega_k(s-t)}ds\right)X_k(\omega_k,x),$$

де $X_k(\omega_k,x)$ – власні функції задачі на власні значення

$$\big(c(x)X'(x)\big)'-g(x)X(x)+\omega a(x)X(x)=0,$$

$$\begin{cases} p_1 X(0)+p_2 X^{[1]}(0)=0, \\ q_1 X(l)+q_2 X^{[1]}(l)=0, \end{cases}$$

відповідні власним значенням ω_k, а φ_k, $d_k(t)$ – коефіцієнти розвинення функцій $\tilde{\varphi}(x)$ і $\frac{\partial u}{\partial t}$ за власними функціями $X_k(\omega_k,x)$:

$$\varphi_k=\frac{1}{\|X_k\|}\int_0^l \tilde{\varphi}(x)X_k(\omega_k,x)db(x),\quad d_k(t)=\frac{1}{\|X_k\|}\int_0^l \frac{\partial u}{\partial t}X_k(\omega_k,x)db(x),$$

$$\|X_k\|=\int_0^l X_k^2(\omega_k,x)db(x).$$

[1] Тихонов А. Н. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977.

[2] Тацій Р. М., Власій О. О., Стасюк М. Ф. Загальна перша крайова задача для рівняння теплопровідності з кусково-змінними коефіцієнтами // Вісник нац. ун-ту "Львівська політехніка". Фіз.-мат. науки. – 2014. – № 804. – С. 64-69.

[3] Тацій Р. М., Пазен О. Ю., Ушак Т. І. Загальна третя крайова задача для рівняння теплопровідності з кусково-сталими коефіцієнтами та внутрішніми джерелами тепла // Пожежна безпека. – 2015. – № 27. – С. 135-141.

[4] Makhnei O. V. Boundary problem for the singular heat equation // Карпатські математичні публікації. – 2017. – Т. 9, № 1. – С. 86-91.

e-mail: oleksandr.makhnei@pu.if.ua

Апроксимація неперервних функцій на сепарабельних комплексних нормованих просторах та просторах Фреше зі зліченною системою норм

Митрофанов М.А.
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України

У випадку підмножин сепарабельних дійсних банахових просторів часткову відповідь на питання апроксимації неперервних функції було дано у 1954 році Я. Курцвейлом у роботі [1]. Для апроксимації у розгляд були введені відокремлювальні поліноми.

Означення 1. *Нехай X є нормованим простором над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. Дійсний поліном $q : X \to \mathbb{R}$ називається відокремлювальним поліномом, якщо q задовольняє умови:*
1. $q(0) = 0$.
2. $|q(x)| \geqslant 1$ *для кожного* $x \in X$ *такого, що* $||x|| = 1$.

На підмножинах комплексного банохового простору питання апроксимації неперевних та рівномірно неперервних функцій розглянуто у праці [2]. Для апроксимації у розгляд вводяться поняття $*$-полінома, $*$-аналітичної функції та відокремлювального $*$-полінома, рівномірно $*$-аналітичної і відокремлювальної функції.

Означення 2. *Будемо казати, що функція $Q : X \to Y$ вигляду $Q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x)$ для всіх $x \in X$, де $Q_n(x)$ — n-однорідні $*$-поліноми, є рівномірно $*$-аналітичною та відокремлювальною, якщо вона задовольняє наступні умови:*
1. Існує таке число R_Q, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x)$ збігається рівномірно в кулі радіуса R_Q з центром у довільній точці $x_0 \in X$.
2. Існує таке $\beta \in \mathbb{R}$, що множина таких $x \in X$, що $|Q(x)| < \beta$ є непорожньою і лежить у відкритій одиничній кулі B.

У спільній праці доповідача з [3] розглянуто випадок просторів Фреше зі зліченною системою норм. У доповіді планується навести результати, отримані автором як самостійно у праці [2], так і спільно з Равським О.В. у праці [3], та деякі нові результати, які мають відношення до комплексного випадку.

[1] Kurzweil J. On approximation in real Banach spaces //Studia Math. – 1954. – Vol. 14. – P. 214-231.
[2] Mitrofanov M.A. Approximation of continuous functions on complex Banach spaces. // Math. Notes. – 2009. – Vol. 86, No. 4. – P. 530-541. (Translation)
[3] Митрофанов М.А. Равський О.В. Апроксимація неперервних функцій на просторах Фреше // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – Т. 54, № 3. – С. 33-40.

e-mail: mishmit@rambler.ru

Нелокальна задача для рівнянь із оператором узагальненого диференціювання

Негрич М.П., Симотюк М.М.
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України

Нехай $\{m_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}$ – така послідовність, що $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|m_1|\dots|m_n|} = \infty$ і $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|m_n|} < \infty$. Означимо функцію $F(t) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{m_1 \dots m_n}$. Оператор узагальненого диференціювання, породжений $F(t)$, — це оператор D_F, дія якого на цілу функцію $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ зображується рівністю

$$D_F f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} m_n a_n t^{n-1}.$$

Степені оператора D_F визначимо рекурентно: $D_F^n f(t) = D_F(D_F^{n-1} f(t))$, $n \geq 2$, $D_F^0 f(t) = f(t)$. Оператор D_F є оператором Гельфонда–Леонтьєва [1, 2, 3].

Нехай H — сепарабельний гільбертів простір зі зліченною базою $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, $A : H \to H$ — такий лінійний оператор, що $Ae_k = \lambda_k e_k$, причому $\lim\limits_{k\to\infty} |\lambda_k| = \infty$ і $\lambda_k \neq \lambda_n$, якщо $k \neq n$. У просторі H розглядаємо таку задачу:

$$D_F^n u(t) + \sum_{j=0}^{n-1} a_j A^{n-j} D_F^j u(t) = 0, \quad t \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

$$D_F^{j-1} u(t)\big|_{t=0} - \mu D_F^{j-1} u(t)\big|_{t=T} = \varphi_j, \quad \mu, T \neq 0, \quad j = 1, \dots, n, \tag{2}$$

де $a_j \in \mathbb{C}$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, $\varphi_j \in H$, $j = 1, \dots, n$. Для задачі (1), (2) встановлено умови її розв'язності у класах цілих за t функцій $u(t) : \mathbb{C} \to H$, якщо праві частини умов (2) належать до певного підпростору простору H, породженого оператором A. Доведено метричні оцінки знизу для малих знаменників [4], які виникли при побудові розв'язку задачі (1), (2).

[1] Гельфонд А.О., Леонтьев А.Ф. Об одном обобщении ряда Фурье // Матем. сб. – 1951. – Т. 29, № 71. – С. 477-500.

[2] Городецький В.В., Мартинюк О.В. Задача Коші та двоточкова задача для еволюційних рівнянь з операторами узагальненого диференціювання // Доповіді НАН України. – 2013. – № 3. – С. 7-13.

[3] Громов В.П. Задача Коши для уравнений в свертках в пространствах аналитических векторнозначных функций // Матем. заметки. – 2007. – Т. 82, № 2. – С. 190-200.

[4] Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.

e-mail: negrychmariya@gmail.com, quaternion@ukr.net

О приближенном решении краевой задачи для одной системы интегро-дифференциальных уравнений

Нуржанов О.Д.
Каракалпакский государственный университет имени Бердаха

В данной работе рассматривается система интегро-дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\left(t, x(t), \int\limits_{t-\tau}^{t} g(t, s, x(s))ds\right), \tag{1}$$

где x, f, g — n-мерные векторы, $t \in [0, T]$; τ — некоторая постоянная, $0 < \tau < T$.

Требуется найти решения системы (1) в предположении, что правая граничная точка неподвижна $x(T) = d$, $d = (d_1, \ldots, d_n)$, а левая граничная точка $(0, x_0)$ может перемещаться, при этом соответственно меняется и начальная функция $x(t) = \varphi(t, x_0)$ на $E_0 : [-\tau, 0]$, при этом начальная функция $\varphi(t, x_0)$ предполагается непрерывно дифференцируемой, $\varphi(0, x_0) = x_0$.

Итак, ставится задача отыскания решения $x(t)$ системы (1) при $0 \le t \le T$, удовлетворяющего условиям:

$$x(t) = \varphi(t, x_0), t \in [-\tau, 0]; \quad x(T) = d. \tag{2}$$

В случае дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, как указано в работе [1], эту задачу можно решить методом шагов, причем параметром, подлежащим определению из граничного условия $x(T) = d$, является x_0.

Для нахождения решений краевой задачи (1), (2) применяем численно-аналитический метод А.М. Самойленко [2].

Предположим, что правая часть системы (1) удовлетворяет следующим условиям:

1) вектор-функции $f(t, x, y)$ и $g(t, s, x)$ определены и непрерывны в области $t \in [0, T]$, $-\tau \le t - \tau \le s \le t$, $x \in D \subset E_n$, $y \in D_1 \subset E_n$;

2) для всех $t \in [0, T]$, $t - \tau \le s \le t$, $x, x', x'' \in D$, $y, y', y'' \in D_1$ выполняются неравенства

$$|f(t, x, y)| \le M,$$
$$|f(t, x', y') - f(t, x'', y'')| \le K_1|x' - x''| + K_2|y' - y''|,$$
$$|g(t, x', y') - g(t, x'', y'')| \le K_3|x' - x''|,$$

где $|f| = (|f_1|, \ldots, |f_n|)$; $M = (M_1, \ldots, M_n)$, $M_i > 0$, $K_l = \{K_{ij}^l \ge 0, i, j = \overline{1, n}\}$, $l = 1, 2, 3$. Неравенство между векторами понимаем покомпонентно;

3) множество D_β точек $x(0) = \varphi(0, x_0) \in E_n$, содержащееся в области D, вместе со своей β-окрестностью, где $\beta = \dfrac{T}{2}M + \beta_1$, $\beta_1 = |d - \varphi(0, x_0)|$, непусто: $D_\beta \ne \emptyset$;

4) все собственные значения $\lambda_j(Q)$ матрицы $Q = \dfrac{T}{3}K_1 + \dfrac{\tau T}{2}K_2K_3$ лежат в круге единичного радиуса: $\lambda_j(Q) < 1$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

При этих условиях введем в рассмотрение последовательность функций $x_m(t, x_0)$ вида

$$x_m(t,x_0)=\varphi(0,x_0)+\int\limits_0^t\left[f\left(t,x_{m-1}(t,x_0),\int\limits_{t-\tau}^t g(t,s,x_{m-1}(s,x_0))ds\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{T}\int\limits_0^T f\left(t,x_{m-1}(t,x_0),\int\limits_{t-\tau}^t g(t,s,x_{m-1}(s,x_0))ds\right)dt\right]+\frac{t}{T}[d-\varphi(0,x_0)], \tag{3}$$
$$m=1,2,\ldots;\quad x_0(t,x_0)=\varphi(0,x_0).$$

Подставляя (3) в (2) легко увидеть, что при всех $m = 1, 2, \ldots$ функции $x_m(t, x_0)$ удовлетворяют заданным условиям (2).

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть правая часть системы уравнений* (1) *удовлетворяет в области* $t \in [0, T]$, $-\tau \le t - \tau \le s \le t$, $x \in D$, $y \in D_1$ *условиям* $1) - 4)$.

Тогда последовательность функций $x_m(t, x_0)$ *вида* (3) *равномерно сходится при* $m \to \infty$ *относительно множества* $(t, x_0) \in [0, T] \times D_\beta$ *к предельной функции* $x^*(t, x_0)$. *При этом предельная функция* $x^*(t, x_0)$ *является решением задачи* (1), (2), *как только вектор-функция*

$$\Delta(x_0)=\frac{1}{T}[d-\varphi(0,x_0)]-\frac{1}{T}\int\limits_0^T f\left(t,x^*(t,x_0),\int\limits_{t-\tau}^t g(t,s,x^*(t,x_0))ds\right)dt,$$

построенная по предельной функции $x^*(t, x_0)$ *последовательности* (3), *в точке* x_0 *обращается в нуль:* $\Delta(x_0) = 0$. *Кроме того, справедливо неравенство*

$$|x^*(t,x_0)-x_m(t,x_0)|\le\frac{T}{2}\left\{Q^m(E-Q)^{-1}M+Q^{m-1}(E-Q)^{-1}Q_1\beta_1\right\},$$

где $Q_1 = K_1 + \dfrac{\tau T}{2} K_2 K_3$.

[1] Эльсгольц Л.Е. О краевых задачах для обыкновенных дифференциальных уравнений с отклоняющимися аргументами // УМН. – 1960. – Т. 15, выпуск 5 (95). – С. 222-224.

[2] Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. – Киев: Наукова думка, 1992.

e-mail: orinbay-nurjanov@mail.ru

Ймовірнісні представлення розв'язків деяких початково-крайових задач для одного виду псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу

Осипчук М.М.
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

Для фіксованих параметрів $c > 0$ і $\alpha \in (1, 2)$ нехай g означає функцію аргументів $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $y \in \mathbb{R}^d$, що визначається інтегралом

$$g(t, x, y) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \exp\{-ct|\xi|^\alpha + i(x - y, \xi)\} \, d\xi.$$

Ця функція є щільністю ймовірності переходу (відносно міри Лебега) стандартного процесу Маркова $(x(t), \mathcal{M}_t, \mathbb{P}_x)_{t\geq 0, x\in\mathbb{R}^d}$ в $\mathbb{R}^d$.

Генератором напівгрупи операторів $(T_t)_{t\geq 0}$, пов'язаної з процесом $x(t)$ рівністю $T_t\varphi(x) = \mathbb{E}_x\varphi(x(t)) = \int_{\mathbb{R}^d} g(t, x, y)\varphi(y)\, dy$) є оператор $\mathbf{A}$ — псевдодиференціальний оператор, чий символ задається функцією $(-c|\xi|^\alpha)_{\xi\in\mathbb{R}^d}$.

Оператор $\mathbf{A}$ діє на досить гладкі обмежені (принаймні з ліпшицевим градієнтом) функції $(\varphi(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$ за наступним правилом

$$\mathbf{A}\varphi(x) = cq \int_{\mathbb{R}^d} [\varphi(x + y) - \varphi(x) - (\nabla\varphi(x), y)]\, |y|^{-d-\alpha}\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

де $q = \dfrac{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma((d + \alpha)/2)\sin(\pi\alpha/2)}{\pi^{(d+1)/2}\Gamma((\alpha + 1)/2)}$.

Нехай $\mathbf{B}$ означає псевдодиференціальний оператор, який визначається своїм символом — $\mathbb{R}^d$-значною функцією $(i|\xi|^{\alpha-2}\xi)_{\xi\in\mathbb{R}^d}$.

Очевидно, що $\mathbf{A} = c \operatorname{div} \mathbf{B}$.

Для кожного одиничного вектора $\nu \in \mathbb{R}^d$ введемо оператор $\mathbf{B}_\nu = (2c\nu, \mathbf{B})$. Цей оператор діє на ліпшицеву функцію $(\varphi(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$ згідно з формулою

$$\mathbf{B}_\nu\varphi(x) = \frac{2cq}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^d} [\varphi(x + y) - \varphi(x)]\, |y|^{-d-\alpha}(y, \nu)\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Функція g є фундаментальним розв'язком рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \mathbf{A}u(t, \cdot)(x), \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d. \tag{1}$$

В доповіді розглядатимуться наступні задачі та ймовірнісні представлення їх розв'язків:

(1) Задача Коші для рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \mathbf{A}u(t, \cdot)(x) + (a(x), \mathbf{B}u(t, \cdot)(x)), \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d,$$

де $(a(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$ — деяка $\mathbb{R}^d$-значна функція.

(2) Початково-крайова задача

- $\dfrac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \mathbf{A}u(t, \cdot)(x), \quad (t, x) \in (0, +\infty) \times (\mathbb{R}^d \setminus S);$

- $u(0+,x,\varphi)=\varphi(x), \quad x\in\mathbb{R}^d$;
- $$\frac{1+q(x)}{2}\mathbf{B}_{\nu(x)}u(t,\cdot)(x+)-\frac{1-q(x)}{2}\mathbf{B}_{\nu(x)}u(t,\cdot)(x-)=r(x)u(t,x), \quad (t,x)\in(0,+\infty)\times S,$$

(3) Задача Коші
- $\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)=\mathbf{A}u(t,\cdot)(x), \quad (t,x)\in(0,+\infty)\times(\mathbb{R}^d\setminus S)$;
- $$r(x)\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)=\frac{1+q(x)}{2}\mathbf{B}_{\nu(x)}u(t,\cdot)(x+)-\frac{1-q(x)}{2}\mathbf{B}_{\nu(x)}u(t,\cdot)(x-), \quad (t,x)\in(0,+\infty)\times S,$$
- $u(0+,x,\varphi)=\varphi(x), \quad x\in\mathbb{R}^d$.

В останніх двох задачах $(\varphi(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$ — деяка неперервна обмежена дійснозначна функція, S — деяка достатньо гладка двостороння поверхня з одиничним вектором $\nu(x)$ нормалі до однієї з її сторін в точці $x\in S$, $(q(x))_{x\in S}$ і $(r(x))_{x\in S}$ — дійснозначні неперервні обмежені (друга з невід'ємними значеннями) функції, а через $f(x+)$ (відповідно, $f(x-)$) позначено границю функції $f(z)$, коли z наближається недотичним чином до $x\in S$ зі збереженням знаку виразу $(z-x,\nu(x))$ позитивним (відповідно, негативним).

В доповіді буде введене поняття потенціалу простого шару для псевдодиференціального рівняння (1) (див. [1]). Основною з властивостей такого потенціалу є теорема про стрибок на поверхні — носії потенціалу — результату дії оператора $\mathbf{B}$ на нього за просторовою змінною. З використанням властивостей потенціалу простого шару будуть побудовані розв'язки останніх двох задач із сформульованих (див. [2]). Перша задача розв'язується з допомогою теорії збурень (див. [3, 4, 5]).

[1] Осипчук М.М., Портенко М.І. Про потенціали простого шару для одного класу псевдодиференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2015. – Т. 67, № 11. – С. 1512-1524.

[2] Осипчук М.М., Портенко М.І. Симетричний α-стійкий випадковий процес та третя початково-крайова задача для відповідного псевдодиференціального рівняння // Укр. мат. журн. – 2017. – Т. 69, № 10. – С. 1406-1421.

[3] Osypchuk M.M. On some perturbations of a symmetric stable process and the corresponding Cauchy problems // Theory of Stochastic Processes. – 2016. – V. 21, No. 1. – P. 64-72.

[4] Osypchuk M.M. On some perturbations of a stable process and solutions to the Cauchy problem for a class of pseudo-differential equations // Carpathian Mathematical Publications. – 2015. – V. 7, No. 1. – P. 101-107.

[5] Osypchuk M.M., Portenko M.I. One type of singular perturbations of a multidimensional stable process // Theory of Stochastic Processes. – 2014. – V. 19, No. 2. – P. 42-51.

e-mail: mykhailo.osypchuk@pu.if.ua

Некласичні диференціювання в алгебрах аналітичних функцій обмеженого типу

Приймак Г.М.
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

Алгебри цілих функцій обмеженого типу $H_b(X)$ на нескінченновимірних банахових просторах X є стандартним об'єктом нескінченновимірного комплексного аналізу.

Спектр алгебри $H_b(X)$ вперше описали Р. Арон, Б. Коул і Т. Гамелін у своїй роботі [1] у 1991 році. Гомоморфізми алгебри $H_b(X)$, диференціювання на ній та інші дотичні питання були опубліковані у статтях [2], [5], [6] вченими Д. Гарандо, Д. Гарсія, М. Маестре, А.В. Загороднюком та іншими.

У роботах [3], [4] досліджено гомоморфізми алгебри A-значних цілих функцій обмеженого типу на банаховому просторі X для деякої банахової алгебри A. У доповіді висвітлено побудову нових диференціювань вказаної алгебри та встановлно зв'язок цього диференціювання з відповідними гомоморфізмами.

Теорема 1. *Нехай $u_k \in Z_k$. Оператор $\overline{\partial}_{(k)}(u_k)$ є неперервним диференціюванням на $H_b(A \otimes_\pi X)$,*

$$\overline{\partial}_{(k)}(u_k)(P)(\overline{x}) = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) \widetilde{\overline{A}}_P \left(\overline{x}^{n-k}, u_k \right), \qquad \overline{x} \in A \otimes_\pi X$$

для всіх $P \in \mathcal{P}(^n(A \otimes_\pi X))$ і $\theta^{(k)}(u_k)(\overline{f})(\overline{x}) = \sum_{m \in \mathbb{Z}_+} \frac{(k!)^m}{(mk)!} \overline{\partial}^m_{(k)}(u_k)(\overline{f})(\overline{x})$, $\overline{x} \in A \otimes_\pi X$ для всіх $\overline{f} \in H_b(A \otimes_\pi X)$.

[1] Aron R.M., Cole B.J., Gamelin T.W. Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space // J. Reine Angew. Math. – 1991. – V. 415. – P. 51-93.
[2] Dineen S., Hart R., Taylor C. Spectra of tensor product elements III: holomorphic properties // Proceedings of the Royal Irish Academy. – 2003. – V. 103, No. 1. – P. 61-92.
[3] Pryimak H. Homomorphisms and functional calculus in algebras of entire functions on Banach spaces // Carpathian Math. Publ. – 2015. – V. 7, No. 1. – P. 108-113.
[4] Pryimak H. Description of homomorphisms of algebras of analytic functions on Banach spaces // Inernational Jornal of Mathematical Analysis. – 2016. – V. 10, No. 14. – P. 669-676.
[5] Zagorodnyuk A.V. Spectra of algebras of entire functions on Banach spaces // Proc. Amer. Math. Soc. – 2006. – V. 134. – P. 2559-2569.
[6] Zagorodnyuk A.V. Spectra of algebras of analytic functions and polynomials on Banach spaces // Contemp. Math. – 2007. – V. 435. – P. 381-394.

e-mail: phm90@ukr.net

Про обернену задачу одночасного визначення молодшого коефіцієнта і правої частини слабко нелінійного ультрапараболічного рівняння

Процах Н.П.
Національний лісотехнічний університет України

Нехай Ω і D обмежені області з просторів $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{R}^l$ відповідно, з межами $\partial\Omega \in C^1$ і $\partial D \in C^1$; $x \in \Omega,\ y \in D,\ t \in (0,T)$, де $T > 0$.

В області $Q_T = \Omega\times D\times(0,T)$ розглянемо задачу визначення трійки функцій $(u(x,y,t),\ c(t),\ q(x))$, яка задовольняє рівняння

$$u_t + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t)u_{y_i} - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x,y,t)u_{x_i})_{x_j} + c(t)u + g(x,y,t,u) =$$
$$= f_1(x,y,t)q(x) + f_0(x,y,t) \tag{1}$$

та умови

$$u(x,y,0) = u_0(x,y), \quad (x,y) \in G, \tag{2}$$

$$u|_{\Sigma_T} = 0, \qquad u|_{S_T^1} = 0, \tag{3}$$

$$\int_G K_1(x,y)u(x,y,t)\,dx\,dy = E_1(t), \qquad t \in [0,T], \tag{4}$$

$$\int_0^T\int_D K_2(y,t)u(x,y,t)\,dy\,dt = E_2(x), \qquad x \in \Omega, \tag{5}$$

де $\Sigma_T = \partial\Omega \times D \times (0,T)$, $G = \Omega \times D$, а $S_T^1 := \{(x,y,t) \in \Omega \times \partial D \times (0,T) : \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t)\cos(\nu,y_i) < 0\}$, ν — одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні $S_T := \Omega \times \partial D \times (0,T)$.

Коефіцієнти задачі (1)–(5) такі, що: 1) $g(x,y,t,\xi)$ — вимірна за змінними (x,y,t) в області Q_T для всіх $\xi \in \mathbb{R}^1$ і неперервна за ξ для майже всіх $(x,y,t) \in Q_T$, існує стала $g^0 > 0$, така, що $|g(x,y,t,\xi) - g(x,y,t,\eta)| \le g^0|\xi-\eta|$ для майже всіх $(x,y,t) \in Q_T$ та всіх $\xi,\eta \in \mathbb{R}^1$; 2) $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(x,y,t)\xi_i\xi_j \ge a_0|\xi|^2$ для майже всіх $(x,y,t) \in Q_T$ та всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$, $a_0 > 0$; 3) $a_{ij} \in C([0,T];L^2(G))$; $E_1 \in W^{1,2}(0,T)$, $E_2 \in W^{1,2}(\Omega)$; $f_i \in C([0,T];L^2(G))$, $f_{i,y_k} \in L^2(Q_T)$ $(i = 0,1)$; $K_1 \in C^1(D;C^1(\overline{\Omega}))$; $K_2 \in C^1([0,T];C^1(\overline{D}))$; $\lambda_k \in C(\overline{Q}_T)$, $\lambda_{ky_k} \in L^\infty(Q_T)$; $u_0 \in W^{1,2}(G)$ $(i,j = 1,\dots,n,\ k = 1,\dots,l)$.

Отримано достатні умови існування розв'язку задачі (1)–(5), причому $u \in W^{1,2}(Q_T) \cap C([0,T];L^2(G))$, $c \in ([0,T])$, $q \in L^2(\Omega)$.

e-mail: protsakh@ukr.net

Задача Діріхле-Неймана для системи слабко нелінійних гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Репетило С.М.
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

Нехай $H_q, q \in \mathbb{R}$, — простір рядів $v(x) = \sum_{|k|\geq 0} v_k \exp(ikx)$ зі скінченною нормою $\|v; H_q\|^2 := 2\pi \sum_{|k|\geq 0}(1+k^2)^q |v_k|^2$; $C^p([0,T], H_q)$, $p \in \mathbb{Z}_+$, $q \in \mathbb{R}$, — простір функцій $v(t,x)$ таких, що для кожного $t \in [0,T]$ функції $\partial^j v(t,x)/\partial t^j$, $j = 0, 1, \ldots, p$, належать до простору H_{q-j} та є неперервними за t у нормі цього простору, $\|v; C^p([0,T], H_q)\| := \sum_{j=0}^{p} \max\limits_{0\leq t\leq T} \left\|\partial^j v/\partial t^j; H_{q-j}\right\|$; $\overline{C}^p([0,T], H_q)$ — простір вектор-функцій $v(t,x) = (v_1(t,x), \ldots, v_m(t,x))$, для яких $v_j \in C^p([0,T], H_q)$, $j = 1, \ldots, m$, $\|v; \overline{C}^p([0,T], H_q)\| := \sum_{j=1}^{m} \|v_j; C^p([0,T], H_q)\|$.

В області $D = \{(t,x) : 0 < t < T, x \in \Omega\}$, де Ω — коло одиничного радіуса, розглянемо задачу

$$\sum_{s=0}^{n} A_s \frac{\partial^{2n} u(t,x)}{\partial t^{2(n-s)} \partial x^{2s}} = f(t,x) + \varepsilon \Phi\left(t, x, u\left(t,x\right)\right), \quad \varepsilon \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial^{2l-2} u(t,x)}{\partial t^{2l-2}}\right|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial^{2l-1} u(t,x)}{\partial t^{2l-1}}\right|_{t=T} = 0, \quad l = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

де $A_s = (a_{pq}^s)_{p,q=1}^m$ — матриці з дійсними елементами, A_0 — одинична матриця; $u = col\,(u_1, \ldots, u_m)$, $f = col(f_1, \ldots, f_m)$, $\Phi = col(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$; вектор-функція $\Phi\,(t,x,u)$ визначена та неперервна за змінною t і досить гладка за x, u в замкненій множині $Q = \left\{(t,x,u) : (t,x) \in D, u \in \overline{S}\left(u^0, r\right)\right\}$, де

$$\overline{S}(u^0, r) = \{u \in \overline{C}^{2n}([0,T], H_q) : \|u - u^0\|_{\overline{C}^{2n}([0,T],H_q)} \leq r\}, \quad r > 0,$$

$u^0 := u^0(t,x)$ — розв'язок задачі (1), (2) при $\varepsilon = 0$. Вважаємо, що система рівнянь (1) є гіперболічною за Петровським у вузькому сенсі (див. [1]).

Задачу (1), (2) зведено до задачі про знаходження нерухомої точки деякого стискуючого оператора у повному метричному просторі. На підставі результатів, отриманих при дослідженні задачі (1), (2) при $\varepsilon = 0$ (див. [2]), а також принципу нерухомої точки, встановлено умови існування та єдиності розв'язку задачі (1), (2) для досить малих $|\varepsilon|$. Цей розв'язок належить до кулі $\overline{S}(u^0, r) \subset \overline{C}^{2n}([0,T], H_q)$ і неперервно залежить від функції f.

[1] Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: Физматгиз, 1961. – 400 с.

[2] Пташник Б.Й., Репетило С.М. Задача Діріхле-Неймана для систем гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – Т. 57, № 2. – С. 25-31.

e-mail: repetylosofiya@gmail.com

Задача Діріхле-Неймана для рівнянь із частинними похідними високого порядку зі сталими коефіцієнтами

Репетило С.М., Симотюк М.М.
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

Нехай $\Omega^p = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, $Q^p_T = \{(t,x) : 0 < t < T, x \in \Omega^p\}$, $T > 0$, $x = (x_1,\ldots,x_p) \in \Omega^p$, $D = (-i\partial/\partial x_1,\ldots,-i\partial/\partial x_p)$, $k = (k_1,\ldots,k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $|k| = |k_1| + \ldots + |k_p|$, $(k,x) = k_1x_1 + \ldots + k_px_p$, H_α, $\alpha \in \mathbb{R}$, — простір тригонометричних рядів $v(x) = \sum_{|k|\geq 0} v_k \exp(ik,x)$ з нормою $\|v;H_\alpha\| = \Big(\sum\limits_{|k|\geq 0}(1+|k|^2)^\alpha|v_k|^2\Big)^{1/2}$; $C^p([0,T],H_\alpha)$, $p \in \mathbb{Z}_+$, — простір функцій $u(t,x)$ таких, що для кожного $t \in [0,T]$ функції $\partial^j u(t,x)/\partial t^j$, $j = 0,1,\ldots,p$, належать до простору $H_{\alpha-j}$ та є неперервними за t у нормі цього простору, $\|u;C^p([0,T],H_\alpha)\| = \sum_{j=0}^p \max\limits_{0\leq t\leq T}\|\partial^j u/\partial t^j;H_{\alpha-j}\|$.

Розглянемо задачу

$$L\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2},B(D)\right)u(t,x) \equiv \frac{\partial^{2n}u}{\partial t^{2n}} + \sum_{j=0}^{n} a_j B^{n-j}(D)\frac{\partial^{2j}u}{\partial t^{2j}} = 0, \quad (t,x)\in Q^p, \qquad (1)$$

$$\left.\frac{\partial^{2j-2}u(t,x)}{\partial t^{2j-2}}\right|_{t=0} = \varphi_j(x),\ \left.\frac{\partial^{2j-1}u(t,x)}{\partial t^{2j-1}}\right|_{t=T} = \varphi_{n+j}(x), j=1,\ldots,n, x\in\Omega^p, \quad (2)$$

де $a_0 \neq 0$, $B(D)$ — такий диференціальний вираз, що

$$b_1|k|^2 \leq B(k) \leq b_2|k|^2, \quad b_1,b_2>0, \quad k\in\mathbb{Z}^p. \qquad (3)$$

Нехай $\mu_1,\ldots,\mu_n$ — корені рівняння $L(\mu,1)=0$, $\rho_1,\ldots,\rho_n$ — головні значення аргументів цих коренів. Вважаємо, що рівняння (1) є таким, що

$$1)\ \mu_j\neq 0,\ \cos(\rho_j/2)\neq 0,\ j=1,\ldots,n; \quad 2)\ \mu_j\neq\mu_q,\ j\neq q. \qquad (4)$$

Якщо виконуються умови (3), (4), то при дослідженні задачі (1), (2) не виникає проблеми малих знаменників [1]. Справедливе таке твердження.

Теорема 1. *Якщо виконуються умови (3), (4) і $\varphi_j \in H_{\alpha-2j+2}$, $\varphi_{n+j} \in H_{\alpha-2j+1}$, $j=1,\ldots,n$, то у просторі $C^{2n}([0,T],H_\alpha)$ існує єдиний розв'язок задачі (1), (2).*

Отримані результати доповнюють результати праці [2].

[1] Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.
[2] Пташник Б.Й., Репетило С.М. Задача Діріхле-Неймана у смузі для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – Т. 56, № 3. – С. 15-28.

e-mail: repetylosofiya@gmail.com, quaternion@ukr.net

Задача спряження з багатоточковими умовами для мішаного рівняння високого порядку

Савка І.Я.
ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, Прикарпатський національний університет імені В. Стефаника
Василишин П.Б.
Прикарпатський національний університет імені В. Стефаника
Тимків І.Р.
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу

Нехай Ω — одиничне коло $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$; $\mathcal{D} = (-T,T)\times\Omega$, де T — дійсне додатне число; $\mathcal{D}_+ = \mathcal{D}\cap\{t>0\}$, $\mathcal{D}_- = \mathcal{D}^p\cap\{t<0\}$, $n\in\mathbb{Z}_+$, I — відрізок прямої $\mathbb{R}$.

Запровадимо простори функцій:

$\mathbf{H}_q = \mathbf{H}_q(\Omega)$, $q\in\mathbb{R}$, — простір Соболєва, отриманий поповненням множини тригонометричних многочленів $\varphi(x) = \sum\limits_k \varphi_k e^{ikx}$ за нормою

$$\|\varphi;\mathbf{H}_q\| = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(1+k^2\right)^q|\varphi_k|^2\right)^{1/2};$$

$\mathbf{C}^n(I;\mathbf{H}_q)$ — простір функцій $u(t,x) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} u_k(t)e^{ikx}$, $u_k(t)\in C^n(I)$, таких, що для кожного фіксованого $t\in I$ функції $\partial^j u(t,x)/\partial t^j \equiv \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} u_k^{(j)}(t)e^{ikx}$, $0\le j\le n$, належать до простору $\mathbf{H}_{q-j}$ і як елементи цього простору є неперервними за t на I; норму в просторі $\mathbf{C}^n(I;\mathbf{H}_q)$ задаємо формулою

$$\|u;\mathbf{C}^n(I;\mathbf{H}_q)\| = \sum_{j=0}^{n}\max_{t\in I}\|\partial^j u(t,x)/\partial t^j;\mathbf{H}_{q-j}\|.$$

В області $\mathcal{D}$ для мішаного рівняння високого порядку

$$\begin{aligned} L_n(\partial/\partial t,\partial/\partial x)u &= \frac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^n} + \sum_{s=1}^{n} a_s\frac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^{n-s}\partial x^s} = 0, \quad (t,x)\in\mathcal{D}_-,\\ L_m(\partial/\partial t,\partial/\partial x)u &= \frac{\partial^m u(t,x)}{\partial t^m} + \sum_{s=1}^{m} b_s\frac{\partial^m u(t,x)}{\partial t^{m-s}\partial x^s} = 0, \quad (t,x)\in\mathcal{D}_+,\end{aligned} \tag{1}$$

розглянемо задачу з умовами спряження та локальними багатоточковими умовами

$$\lim_{t\to 0_-}\frac{\partial^{j-1}u(t,x)}{\partial t^{j-1}} = \lim_{t\to 0_+}\frac{\partial^{j-1}u(t,x)}{\partial t^{j-1}}, \quad j=1,\ldots,min, \quad x\in\Omega. \tag{2}$$

$$u|_{t=t_j} = \varphi_j(x), \quad j=1,\ldots,r, \quad x\in\Omega, \tag{3}$$

$$u|_{t=t_{r+j}} = \varphi_{r+j}(x), \quad j=1,\ldots,n+m-min-r, \quad x\in\Omega, \tag{4}$$

де $a_s, b_s\in\mathbb{C}$, $min = \min\{m,n\}$, причому оператори L_n, L_m — строго гіперболічні за Петровським,

$$-T\le t_1<\ldots<t_r<0<t_{r+1}<\ldots<t_{n+m-min}\le T.$$

Означення. *Розв'язком задачі* (1)–(4) *називаємо таку функцію* $u = u(t,x)$, *що*

$$u \in \mathbf{C}^n([-T,0];\mathbf{H}_q), \quad u \in \mathbf{C}^m([0,T];\mathbf{H}_q),$$

$$\|L_n u;\mathbf{C}([-T,0];\mathbf{H}_{q-n})\| = 0, \quad \|L_m u;\mathbf{C}([0,T];\mathbf{H}_{q-m})\| = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left\|\frac{\partial^{j-1}u(-\varepsilon,\cdot)}{\partial t^{j-1}} - \frac{\partial^{j-1}u(\varepsilon,\cdot)}{\partial t^{j-1}};\mathbf{H}_{q+1-j}\right\| = 0, \quad j = 1,\dots,min,$$

$$\left\|u|_{t=t_j} - \varphi_j;\mathbf{H}_q\right\| = 0, \quad j = 1,\dots,n+m-min.$$

Згідно з припущенням, позначимо попарно різні дійсні корені рівнянь $L_n(\lambda,1) = 0$ і $L_n(\mu,1) = 0$ через $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ і $\mu_1,\dots,\mu_m$ відповідно.

Нехай

$$\Lambda = \|\lambda_j^{q-1}\|_{q,j=1}^{min,n}, \ \ M = \|\mu_j^{q-1}\|_{q,j=1}^{min,m},$$

$$E_\lambda(k) = \|\exp(ik\lambda_j t_q)\|_{q,j=1}^{r,n}, \ \ E_\mu(k) = \|\exp(ik\mu_j t_{r+q})\|_{q,j=1}^{n+m-min,n}.$$

Коректна розв'язність задачі (1)–(4) в просторах Соболєва залежить від властивостей визначників

$$\Delta(k) = \det\begin{Vmatrix} \Lambda & M \\ E_\lambda(k) & 0 \\ 0 & E_\mu(k)\end{Vmatrix}, \ \ k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}.$$

Визначники $\Delta(k)$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, входять знаменниками у вирази для коефіцієнтів рядів Фур'є, якими зображується розв'язок задачі. Вони можуть ставати як завгодно малими для нескінченної кількості цілих k (при $|k| \to \infty$) і спричиняти розбіжність вказаних рядів [1]. Тому важливо встановити оцінки знизу для $|\Delta(k)|$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

Теорема 1. *Для майже всіх (щодо міри Лебега в* $\mathbb{R}^{m+n-min}$*) векторів* $(\lambda_1,\dots,\lambda_{m+n-min}) \in (-T,0)^r \times (0,T)^{n+m-min-r}$ *нерівності*

$$|\Delta(k)| \geq |k|^{-\gamma}$$

виконуються для всіх (крім скінченної кількості) цілих $k \in \mathbb{Z}$ *при*

$$\gamma > C_n^2 + C_m^2 - C_{min}^2.$$

З теореми випливає, що якщо

$$\varphi_j \in \mathbf{H}_{q+\gamma}, \quad \gamma > C_n^2 + C_m^2 - C_{min}^2, \ j = 1,\dots,n+m-min-r,$$

то для майже всіх (щодо міри Лебега в $\mathbb{R}^{m+n-min}$) векторів $(\lambda_1,\dots,\lambda_{m+n-min})$ існує розв'язок задачі (1)–(4).

[1] Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.

e-mail: s-i@ukr.net, pbvasylyshyn@ukr.net, tymkiv_if@ukr.net

Існування розв'язків неоднорідного рівняння з еліптичним оператором високого порядку у просторі швидко спадних функцій

Самойленко В.Г.
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Самойленко Ю.І.
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Рівняння Кортевега-де Фріза (КдФ) на сьогодні є одним з цікавих об'єктів дослідження математичної та теоретичної фізики. Це пов'язано з наявністю у рівняння КдФ розв'язків з різноманітними властивостями, зокрема, розв'язків, які мають цікаві фізичні інтепретації (солітонні, кінкові, періодичні, квазіперіодичні розв'язки, тощо) та так званих сингулярних розв'язків, тобто розв'язків, які у скінченній області можуть руйнуватися або "грубо", коли розв'язок стає необмеженим, або ж згідно зі сценарієм градієнтної катастрофи, коли частинні похідні розв'язку стають необмеженими.

Для вивчення рівняння КдФ запропоновано багато різних методів, серед яких варто згадати інноваційний у певному сенсі метод оберненої задачі розсіювання, який став потужним інструментом аналізу нелінійних рівнянь інтегровного типу, за допомогою якого побудовано їх точні розв'язки.

При вивченні сингулярно збуреного рівняння КдФ зі змінними коефіцієнтами успішно використовується [1, 2] нелінійний метод ВКБ, який для цього рівняння дозволив знайти його асимптотичні солітоноподібні розв'язки, що за своєю структурою аналогічні солітонним розв'язкам рівняння КдФ зі сталими коефіцієнтами. При побудові асимптотичних солітоноподібних розв'язків сингулярно збуреного рівняння КдФ зі змінними коефіцієнтами [1] виникає задача про існування у просторі швидко спадних функцій $\mathrm{S}(\mathbf{R})$ розв'язків диференціального рівняння з одновимірним оператором Шредінгера вигляду

$$Lu = -\frac{d^2u}{dx^2} + A(x,t)u = F(x,t), \quad x \in \mathbf{R}, \tag{1}$$

де $A(x,t) = f_1(t) + f_2(x,t)$ є нескінченно диференційовною функцією для всіх $(x,t) \in \mathbf{R} \times [0;T]$, причому $f_1(t) < 0$ для всіх $t \in [0;T]$, а $f_2(x,t)$ належить простору швидко спадних щодо змінної x функцій при всіх $t \in [0;T]$. Тут величина t вважається параметром.

У [3] за допомогою теорії псевдодиференціальних операторів [4] встановлено необхідні і достатні умови існування у просторі швидко спадних функцій $\mathrm{S}(\mathbf{R})$ розв'язків рівняння (1). Цілком природно виникає питання про узагальнення результатів статті [1] на випадок диференціального рівняння високого порядку, тобто питання про необхідні і достатні умови існування у просторі $\mathrm{S}(\mathbf{R})$ розв'язків рівняння вигляду

$$Lu = f(x), \tag{2}$$

де оператор L має вигляд

$$L = -\sum_{m=0}^{n} \left(a_m \frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + b_m(x) \right). \tag{3}$$

Розглядається задача: при яких умовах щодо функції $f(x)$ рівняння (2) має у просторі $\mathrm{S}(\mathbf{R})$ розв'язок.

За допомогою теорії псевдодиференціальних операторів доведено таку теорему.

Теорема 1. *Нехай коефіцієнти оператора L вигляду (3) такі, що $a_m \leq 0$, $m = \overline{1, n}$, причому $a_0 \neq 0$, $a_{2n} \neq 0$, а функції $b_m(x)$, $m = \overline{1, n}$, належить простору $\mathrm{S}(\mathbf{R})$. Якщо функція $f(x) \in \mathrm{S}(\mathbf{R})$, то для існування розв'язку рівняння (2) у просторі $\mathrm{S}(\mathbf{R})$ необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова ортогональності вигляду*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) u_0(x) dx = 0,$$

де $u_0(x) \in \mathrm{S}(\mathbf{R})$ – нетривіальний розв'язок однорідного рівняння $Lu = 0$.

[1] Самойленко В.Г., Самойленко Ю.І. Асимптотичні розвинення солітоноподібних розв'язків збуреного рівняння Кортевега-де Фріза // Український математичний журнал. – 2005. – Т. 57, №1. – С. 111-124. (In English: Asymptotic expansions for one-phase soliton-type solutions of the Korteweg-de Vries equation with variable coefficients // Ukrainian Mathematical Journal. – 2005. – V. 57, No. 1. – P. 132-148.)

[2] Самойленко В.Г., Самойленко Ю.І. Асимптотичні m-фазові солітоноподібні розв'язки сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами // Український математичний журнал. – 2012. – Т. 64, 7. – С. 970-987; Т. 64, 8. – С. 1089-1105. (In English: Asymptotic m-phase soliton-type solutions of a singularly perturbed Korteweg-de Vries equation with variable coefficients // Ukrainian Mathematical Journal. – 2012. – V. 64, 7. – P. 1109-1127; 2013. – V. 64, 8. – P. 1241-1259.)

[3] Самойленко В.Г., Самойленко Ю.І. Існування розв'язку неоднорідного рівняння з одновимірним оператором Шредінгера в просторі швидко спадних функцій // Український математичний вісник. – 2012. – Т. 9, №2. – С. 237-245. (In English: Existence of a solution to the inhomogeneous equation with the one-dimensional Schrodinger operator in the space of quickly decreasing functions // Journal of Mathematical Sciences. – 2012. – V. 187, No. 1. – P. 70-76.)

[4] Грушин В.В. Об одном классе эллиптических псевдодифференциальных операторов, вырождающихся на подмногообразии // Математический сборник. – 1971. – Т. 84, №2. – С. 163-195.

e-mail: valsamyul@gmail.com, yusam@univ.kiev.ua

Про зліченну кратність В-вимірних відображень

Сафонова О.В.
Державний університет телекомунікацій, Київ
Сафонов В.М.
Національний університет харчових технологій, Київ

Дослідженню зліченнократних відображень присвячено немало праць. Результати М.М. Лузіна, П.С. Александрова, А.М. Колмогорова, Б.О. Пасинкова та Ю.Ю. Трохимчука стали класичними і заклали відправний пункт для подальших досліджень з цієї тематики.

Основним результатом досліджень, що пов'язані із зліченнократними B-вимірними відображеннями нульвимірних ніде не компактних абсолютних G_δ-множин, є таке твердження [1].

Теорема 1. *При зліченнократному B-вимірному відображенні f повного сепарабельного нульвимірного незліченного простору X існує множина першої категорії $D \subset X$ така, що множина точок локального гомеоморфізму звуження відображення $f|_{X \setminus D}$ на доповнення $X \setminus D$ всюди щільна в $X \setminus D$.*

Виявляється, що в одновимірному випадку функції першого класу для існування щільної множини точок локального гомеоморфізму досить вимагати зліченну кратність лише для точок деякої множини всюди другої категорії в образі [2].

Теорема 2. *Нехай $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — ніде не стала функція першого класу Бера з властивістю Дарбу, яка має множину зліченних рівнів $E \subset f([a, b])$ всюди другої категорії. Тоді існує відкрита щільна множина $G = \bigcup\limits_i G_i \subset [a, b]$, в кожній компоненті G_i якої функція f строго монотонна і неперервна.*

[1] Сафонова О.В. Про зліченнократні В-вимірні відображення / О.В. Сафонова // Збірник праць Інституту математики НАН України: Аналіз та застосування. — К.: Інститут математики НАН України, 2017. – Т. 14, №1. — С. 230-237.

[2] Сафонов В.М. Про функції першого класу Бера з властивістю Дарбу / В.М. Сафонов // Збірник праць Інституту математики НАН України: Аналіз та застосування. — К.: Інститут математики НАН України, 2017. — Т. 14, №1. — С. 222-229.

e-mail: olechkadeadin@ukr.net, safonov_v_m@ukr.net

Задача Фур'є для анізотропних інтегро-диференціальних еліптично-параболічних систем зі змінними показниками нелінійності

Скіра І. В.
Львівський національний університет імені Івана Франка

Нехай n, N — натуральні числа, а $M_{N\times(n+1)}(\mathbb{R})$ — лінійний простір, складений з матриць $\zeta = (\zeta_{kl}; k = \overline{1,N}, l = \overline{0,n})$ розмірності $N\times(n+1)$ з дійсними елементами.

Вважаємо, що Ω — обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$, $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$. Позначаємо $S := (-\infty, 0]$, $Q := \Omega\times S$, $\Sigma_0 := \Gamma_0 \times S$, $\Sigma_1 := \Gamma_1 \times S$, $Q_{t_1,t_2} := \Omega\times(t_1,t_2)$ для довільних $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ $(t_1 < t_2)$.

Припускаємо, що

($\mathcal{B}$) для кожного $i \in \{1,\dots,N\}$ функція $b_i : \Omega \to \mathbb{R}$ — вимірна і $0 \leqslant b_i(x) \leqslant 1$ для м. в. $x \in \Omega$.

Розглядаємо *задачу*: знайти векторну функцію $u = \mathrm{col}(u_1 \dots u_N) : \overline{Q} \to \mathbb{R}^N$, яка задовольняє (в певному сенсі) систему рівнянь

$$(b_i(x)u_i)_t - \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dx_j} a_{ij}(x,t,\delta u) + a_{i0}(x,t,\delta u) + \int\limits_{\Omega} c_i(x,y,t,u(y,t))dy =$$

$$= -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} f_{ij}(x,t) + f_{i0}(x,t), \quad (x,t)\in Q\,, \quad i = \overline{1,N}\,, \tag{1}$$

та крайові умови

$$u_i\Big|_{\Sigma_0} = 0, \qquad \frac{\partial u_i}{\partial \nu_a}\Big|_{\Sigma_1} = 0, \quad i = \overline{1,N}\,, \tag{2}$$

де $a_{ij} : Q\times M_{N\times(n+1)}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ $(i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n})$, $c_i : \Omega\times\Omega\times S\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(i = \overline{1,N})$, $f_{ij} : Q \to \mathbb{R}$ $(i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n})$ — задані дійснозначні функції.

Прикладом систем вигляду (1), які тут вивчаються, є система

$$(b_i(x)u_i)_t - \sum_{j=1}^{n}\Big(\widehat{a}_{ij}(x,t)|u_{i,x_j}|^{p_{ij}(x)-2}u_{i,x_j}\Big)_{x_j} + \widehat{a}_{i0}(x,t)|u_i|^{p_{i0}(x)-2}u_i +$$

$$+ \int\limits_{\Omega}\sum_{k=1}^{N}\widehat{c}_{ik}(x,y,t)u_k(y,t)dy = f_i(x,t), \quad (x,t)\in Q,\ i = \overline{1,N}, \tag{3}$$

де $\widehat{a}_{ij}$ $(i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n})$ — вимірні, обмежені, додатні і відділені від нуля функції, $\widehat{c}_{ik}$ $(i,k = \overline{1,N})$ — вимірні і обмежені функції, f_i $(i = \overline{1,N})$ — інтегровні з деяким степенем функції, $p_{ij} > 1$ $(i = \overline{1,N},\ j = \overline{0,n})$ — вимірні та обмежені функції (показники нелінійності).

Нехай $p = (p_{ij}; i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n})$ — матрична функція, яка задовольняє умову

$(\mathcal{P})$ $\qquad 2 \le \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} p_{ij}(x) \le \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} p_{ij}(x) < +\infty, \quad (i=\overline{1,N},\ j=\overline{1,n})$

$$2 < \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} p_{i0}(x) \le \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} p_{i0}(x) < +\infty \quad (i=\overline{1,N}).$$

Припустимо, що вихідні дані задачі (1)–(2) задовольняють умови:

$(\mathcal{A}_1)$ для кожних $i \in \{1,\dots,N\}$ та $j \in \{0,\dots,n\}$ функція $a_{ij}(x,t,\xi)$, $(x,t) \in Q$, $\xi \in M_{N\times(n+1)}(\mathbb{R})$, є каратеодорівською;

$(\mathcal{A}_2)$ для кожних $i \in \{1,\dots,N\}$ та $j \in \{0,\dots,n\}$, майже всіх $(x,t) \in Q$ і будь-яких $\xi \in M_{N\times(n+1)}(\mathbb{R})$ виконується нерівність

$$|a_{ij}(x,t,\xi)| \leqslant h_{ij}(x,t)\Big(\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=0}^{n}|\xi_{kl}|^{p_{kl}(x)/p'_{ij}(x)}\Big) + g_{ij}(x,t),$$

де $h_{ij} \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $g_{ij} \in L_{p'_{ij}(\cdot),\,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$;

$(\mathcal{A}_3)$ для майже всіх $(x,t) \in Q$ та довільних $\xi^1, \xi^2 \in M_{N\times(n+1)}(\mathbb{R})$ виконується нерівність

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{n}(a_{ij}(x,t,\xi^1) - a_{ij}(x,t,\xi^2))(\xi^1_{ij} - \xi^2_{ij}) \ge$$

$$\ge K_1\sum_{k=1}^{N}|\xi^1_{k0} - \xi^2_{k0}|^2 + K_2\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=0}^{n}|\xi^1_{kl} - \xi^2_{kl}|^{p_{kl}(x)},$$

де $K_1 > 0$, $K_2 > 0$ — деякі сталі;

$(\mathcal{C}_1)$ для кожного $i \in \{1,\dots,N\}$ функція $c_i(x,y,t,s), (x,y,t,s) \in \Omega\times\Omega\times S\times\mathbb{R}$, є каратеодорівською;

$(\mathcal{C}_2)$ для кожного $i \in \{1,\dots,N\}$, довільних $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ та майже всіх $(x,y,t) \in \Omega\times\Omega\times S$ виконується нерівність

$$|c_i(x,y,t,s_1) - c_i(x,y,t,s_2)| \le L|s_1 - s_2|,$$

де $L \ge 0$ – стала;

$(\mathcal{F})$ $f_{ij} \in L_{p'_{ij}(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ $(i=\overline{1,N}, j=\overline{0,n})$ і для кожних $i \in \{1,\dots,N\}$, $j \in \{1,\dots,n\}$ функція f_{ij} зануляється в околі Σ_1.

Під *узагальненим розв'язком* задачі (1)–(2) розуміємо векторну функцію $u \in W^{1,0}_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q};\mathbb{R}^N) \cap C(S; H_b(\Omega;\mathbb{R}^N))$, для якої виконується умова $u_i\Big|_{\Sigma_0} = 0$ $(i=\overline{1,N})$ та відповідна інтегральна тотожність.

Теорема 1. *Нехай виконуються вищевказані умови і, крім того, правильна нерівність*

$$K_1 > L mes_n \Omega.$$

Тоді існує единий узагальнений розв'язок задачі (1)–(2).

e-mail: irusichka.skira@gmail.com

Оцінки для розподілу супремуму на нескінченності розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності з випадковою правою частиною.

Сливка-Тилищак Г.І.
Пряшівський університет в Пряшеві, Словаччина
ДВНЗ "Ужгородський національний університет"
Михасюк М.М.
ДВНЗ "Ужгородський національний університет"

Рівняння теплопровідності з випадковими умовами є класичною задачею математичної фізики. За останні роки з'явилося ряд робіт, де різними способами досліджувалося дане рівняння в залежності від типу випадкових початкових умов.

В роботі досліджується неоднорідне рівняння теплопровідності на прямій з випадковою правою частиною з простору $Sub_\varphi(\Omega)$. Для даної задачі одержано оцінки для розподілу супремуму розв'язку в нескінченній області. Розглянемо неоднорідне рівняння теплопровідності, яке задане на прямій [1]:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \xi(x,t), \tag{1}$$
$$-\infty < x < +\infty, \quad t > 0,$$

з початковою умовою

$$u(x,0) = 0, \quad -\infty < x < +\infty. \tag{2}$$

Нехай $\xi(x,t) = \{\xi(x,t), \quad x \in R, \ t > 0\}$ — вибірково-неперервне з імовірністю одиниця випадкове поле з простору $Sub_\varphi(\Omega)$ [1], таке що $\mathbb{E}\xi(x,t) = 0$, $\mathbb{E}(\xi(x,t))^2 < +\infty$. Нехай розв'язок задачі (1)–(2) можна записати у вигляді

$$G(y,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^t e^{-a^2 y^2 (t-\tau)} \tilde{\xi}(y,\tau) d\tau,$$

$$\tilde{\xi}(y,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos yx \xi(x,\tau) dx,$$

і

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos yx G(y,t) dy. \tag{3}$$

Теорема 1. *Нехай* $\{u(x,t), \ (x,t) \in V\}$, $V = [-A;A] \times [0,+\infty)$ *— сепарабельне випадкове поле з простору* $Sub_\varphi(\Omega)$. *Нехай виконуються наступні умови:*

1) $[b_k, b_{k+1}]$, $k = 0,1,\ldots$ *— сім'я таких відрізків, що* $-\infty < b_k < b_{k+1} < +\infty$, $k = 0,1,\ldots$ $V_k = [-A;A] \times [b_k, b_{k+1}]$, $\bigcup\limits_k V_k = V$;

2) $\sup\limits_{\substack{|x-x_1|\le h,\\ |t-t_1|\le h\\ (x,t),(x_1,t_1)\in V_k}} \left(\mathbb{E}\,|u(x,t)-u(x_1,t_1)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{a_k}{\left|\ln\left(\frac{1}{|h|}+d\right)\right|^{\delta}},$

де

$$a_k = \frac{\Theta}{\pi}\Big(b_{k+1}C_{11} + \max(1,a^2)TC_{22} + 1+$$
$$+\frac{1}{a^2}\left(C_{21} + \max(1,a^2)(C_{22}+C_{23})\right)\Big),$$

$C_{ij}, i = 1,2,\ j = 1,2,3$ — *деякі сталі, при* $\delta > 1 - \frac{1}{p}$;

3) $c = \{c(t),\ t \in R\}$ — *деяка неперервна функція, що* $c(t) > 0,\ t \in R$, $c_k = \min\limits_{t\in[t_k,t_{k+1}]} c(t)$;

4)

$$\sup_k \frac{b_{k+1}}{c_k} < \infty,$$
$$\sup_k \frac{(a_k)^{\frac{1}{\alpha q}}(\varepsilon_k)^{1-\frac{1}{\alpha q}}}{c_k} < \infty,$$
$$\sup_k \frac{\varepsilon_k \ln\left(A\cdot\frac{b_{k+1}-b_k}{2}\right)^{\frac{1}{q}}}{c_k} < \infty,$$
$$\varepsilon_k = \sup_{\substack{x\in[A,-A]\\ t\in[b_k,b_{k+1}]}} \left(\mathbb{E}\,(u(x,t))^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \theta\left(\frac{b_{k+1}}{\pi} + \frac{1}{a^2\pi}\right);$$

5)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{q}\left(\frac{sc_k(1-\theta)}{2\varepsilon_k}\right)^{\frac{1}{q}}\right\} < \infty.$$

Тоді для $\omega > \sup\limits_k \frac{\frac{1}{p^{\frac{1}{p}}}\left(2^{\frac{1}{q}}(a_k)^{\frac{1}{\alpha q}}\frac{(\theta\varepsilon_k)^{1-\frac{1}{\alpha q}}}{1-\frac{1}{\alpha q}} + \theta\varepsilon_k\ln\left(A\cdot\frac{b_{k+1}-b_k}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right)}{c_k}\cdot\frac{4}{\theta(1-\theta)},\ 0<\theta<1,$ *має місце нерівність*

$$P\left\{\sup_{(x,t)\in V}\frac{|u(x,t)|}{c(t)} > \omega\right\} \leqslant 2\exp\left\{-\frac{1}{q}\left(\frac{\omega}{s}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}\times$$
$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{q}\left(\frac{sc_k(1-\theta)}{2\varepsilon_k}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}.$$

[1] Маркович Б. М. Рівняння математичної фізики. – Львів: Видавництво Національного університету «Львівська політехніка», 2010. – 384 с.

[2] Kozachenko Yu. V., Slyvka-Tylyshchak A. I. On the increase rate of random fields from space on unbounded domains // Statistics, optimization and information computing. – June 2014. – Vol. 2. – P. 79-92.

e-mail: aslyvka@ukr.net, mikhasyuk.m@gmail.com

Про асимптотику розв'язку задачі оптимальної швидкодії

Тарасенко О.В.
Ніжинський державний університет імені Миколи Гоголя

Нехай задано процес, який описується системою диференціальних рівнянь

$$\varepsilon^h \frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + u, \tag{1}$$

де $A(t,\varepsilon)$ — квадратна матриця n-го порядку, $x(t,\varepsilon)$, $u(t,\varepsilon)$ — n-вимірні вектор стану та керування відповідно, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ — малий параметр: $\varepsilon_0 \ll 1$; $h \in N$.

Розглядається задача про знаходження керування, під дією якого система (1) переходить із стану $x(0) = x_1$ в стан $x(T) = x_2$ за найкоротший проміжок часу

$$J(u) = \int\limits_0^T dt \to \min_u . \tag{2}$$

Припустимо, що виконуються наступні умови:

1) матриця $A(t,\varepsilon)$ є дійсною або комплекснозначною і допускає на відрізку $[0;T]$ рівномірні асимптотичні розвинення за степенями малого параметра:

$$A(t,\varepsilon) \sim \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k A_k(t); \tag{3}$$

2) коефіцієнти $A_k(t)$, $k = 0, 1, \ldots$, розвинень (3) нескінченно диференційовні на відрізку $[0;T]$;

3) вектори початкового і кінцевого станів зображуються у вигляді розвинень

$$x_1(t,\varepsilon) \sim \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k x_k^{(1)}(t); x_2(t,\varepsilon) \sim \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k x_k^{(2)}(t);$$

4) область допустимих значень для керування $u(t,\varepsilon)$ збігається з усім заданим n-вимірним простором.

У розглянутому випадку, використовуючи теорію асимптотичного інтегрування лінійних сингулярно збурених систем з виродженнями, викладену в [1], виведено рекурентні формули для знаходження коефіцієнтів відповідних асимптотичних розвинень в явному вигляді, запропоновано алгоритм побудови асимптотичного розв'язку даної задачі швидкодії, яка після застосування принципу максимуму Л.С. Понтрягіна [2] зводиться до двоточкової крайової задачі. Встановлено відповідні асимптотичні оцінки.

[1] Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – К.: Вища шк., 2000. – 294 с.

[2] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1983. – 392 с.

e-mail: oxana.tarasenko@gmail.com

Застосування диференціальних рівнянь з імпульсною дією до розв'язування крайових задач теплопровідності

Тацій Р.М., Стасюк М.Ф., Пазен О.Ю.
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Власій О.О.
Прикарпатський національний університет імені В. Стефаника

1. Постановка задачі. Розглядається багатошарова плоска конструкція, область якої обмежена площинами $x = x_0$ і $x = x_n$ та поділена на n шарів. Кожен шар виготовлений з ізотропного матеріалу та наділений своїми коефіцієнтом теплопровідності λ, питомою теплоємністю та густиною ρ. Крім цього, між шарами задано умови неідеального теплового контакту. Для конструкції відомим є початковий розподіл температурного поля $\phi(x)$, а температура залежить від координати x та часу τ. На зовнішніх поверхнях існує конвективний теплообмін з навколишнім середовищем, тобто виконуються крайові умови третього роду.

Описана задача зводиться до розв'язування наступного диференціального рівняння [1, 2]

$$c\rho\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial x}\right) \tag{1}$$

з умовами спряження

$$\begin{cases} t_{i+1}^{[1]}(x_{i+1}) - t_i^{[1]}(x_{i+1}) = 0, \\ t_{i+1}(x_{i+1}) - t_i(x_{i+1}) = \frac{1}{\alpha_{i+1}} t_i^{[1]}(x_{i+1}), \end{cases} \tag{2}$$

крайовими умовами третього роду

$$\begin{cases} \alpha_0 t(0,\tau) - t^{[1]}(0,\tau) = \alpha_0\psi_0(\tau), \\ \alpha_n t(x_n,\tau) - t^{[1]}(x_n,\tau) = \alpha_n\psi_n(\tau) \end{cases} \tag{3}$$

та початковою умовою

$$T(x,0) = \phi(x). \tag{4}$$

Позначення: Θ_i – характеристична функція напіввідкритого проміжку $[x_i, x_{i+1})$, тобто $\Theta_i = \begin{cases} 1, x \in [x_i, x_{i+1}), \\ 0, x \notin [x_i, x_{i+1}), \end{cases}$ $\lambda(x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \lambda_i\Theta_i$, $c(x)\rho(x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} c_i\rho_i\Theta_i$, $\phi(x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \phi_i\Theta_i$, $\lambda_i, c_i, \rho_i \in R$, $\lambda_i, c_i, \rho_i > 0$, $\forall = \overline{0, n-1}$, $\lambda t'_x \overset{df}{=} t^{[1]}(x,\tau)$ — квазіпохідна [3], $q(x,\tau) = -t^{[1]}(x,\tau)$ — густина теплового потоку.

2. Побудова розв'язку. Розв'язок задачі (1)-(4) шукається у вигляді суми двох функцій (метод редукції) [4]

$$t(x,\tau) = u(x,\tau) + v(x,\tau). \tag{5}$$

Будь-яку з функцій $u(x,\tau)$ чи $v(x,\tau)$ можна вибрати спеціальним чином, тоді інша вже визначатиметься однозначно.

Для функції $u(x,\tau)$ поставлено квазістаціонарну крайову задачу [2]

$$\left(\lambda u'\right)' = 0, \tag{6}$$

з умовами спряження

$$\begin{cases} u_{i+1}^{[1]}(x_{i+1}) - u_i^{[1]}(x_{i+1}) = 0, \\ u_{i+1}(x_{i+1}) - u_i(x_{i+1}) = \frac{1}{\alpha_{i+1}} u_i^{[1]}(x_{i+1}) \end{cases} \tag{7}$$

та крайовими умовами (3) для функції $u(x,\tau)$, тобто

$$\begin{cases} \alpha_0 u(0,\tau) - u^{[1]}(0,\tau) = \alpha_0 \psi_0(\tau), \\ \alpha_n u(x_n,\tau) - u^{[1]}(x_n,\tau) = \alpha_n \psi_n(\tau). \end{cases} \tag{8}$$

Структуру розв'язку цієї задачі детально вивчено та описано в роботі [2]. Зокрема, отримано аналітичне представлення цього розв'язку у вигляді $u(x,t) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} u_i(x,t)\Theta_i$, де функції $u_i(x,t)$ виражаються виключно через вхідні дані поставленої задачі.

Для функції $v(x,\tau)$ отримано неоднорідну мішану задачу

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial \tau} + c\rho \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{9}$$

з умовами спряження

$$\begin{cases} v_{i+1}^{[1]}(x_{i+1},\tau) - v_i^{[1]}(x_{i+1},\tau) = 0, \\ v_{i+1}(x_{i+1},\tau) - v_i(x_{i+1},\tau) = \frac{1}{\alpha_{i+1}} v_i^{[1]}(x_{i+1},\tau), \end{cases} \tag{10}$$

нульовими крайовими умовами

$$\begin{cases} \alpha_0 v(0,\tau) - v^{[1]}(0,\tau) = 0, \\ \alpha_n v(x_n,\tau) - v^{[1]}(x_n,\tau) = 0 \end{cases} \tag{11}$$

та початковою умовою

$$v(x,0) = \phi(x) - u(x,0) \equiv f(x,0). \tag{12}$$

Для розв'язування цієї задачі застосовується метод власних функцій Фур'є. При цьому проміжкові результати (задача на власні значення, розвинення за власними векторами, тощо) отримані шляхом зведення відповідних задач для звичайних диференціальних (квазідиференціальних) рівнянь до систем диференціальних рівнянь з імпульсною дією [1, 3, 5].

Покажемо це на прикладі знаходження нетривіальних розв'язків однорідної задачі

$$c\rho \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{13}$$

з умовами (10), (11).

Покладаючи $v(x,\tau) = e^{-\omega\tau} X(x)$, де ω – параметр, а $X(x)$ — невідома функція, отримано квазідиференціальне рівняння

$$\left(\lambda X(x)'\right)' + \omega c\rho X(x) = 0 \tag{14}$$

з умовами спряження

$$\begin{cases} X_{i+1}^{[1]}(x_{i+1}) - X_i^{[1]}(x_{i+1}) = 0, \\ X_{i+1}(x_{i+1}) - X_i(x_{i+1}) = \frac{1}{\alpha_{i+1}} X_i^{[1]})x_{i+1}) \end{cases} \tag{15}$$

та крайовими умовами

$$\begin{cases}\alpha_0 X(0) - X^{[1]}(0) = 0,\\ \alpha_n X(x_n) + X^{[1]}(x_n) = 0.\end{cases} \tag{16}$$

Задача (14)-(16) зводиться до знаходження власних вектор-функцій $\overline{X}_k(x,\omega_k), k\in\mathbb{N}$, системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією [1, 5]

$$\overline{X}' = A\overline{X}, \tag{17}$$

$$\overline{X}_{i+1}(x_{i+1}) - \overline{X}_i(x_{i+1}) = C_{i+1}\overline{X}_i(x_{i+1}), \tag{18}$$

і крайовими умовами

$$P\overline{X}(x_0) + Q\overline{X}(x_n) = \overline{0}. \tag{19}$$

де

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} X & X^{[1]}\end{pmatrix}^T, A(x) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda(x)}\\ -\omega c\rho & 0\end{pmatrix}, C_{i+1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\alpha_{i+1}}\\ -\omega c\rho & 0\end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix}\alpha_0 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ \alpha_n & 1\end{pmatrix}.$$

Розв'язок мішаної задачі (9)–(12) отримано у вигляді

$$v(x,\tau) = \sum_{i=0}^{n-1} v_i(x,\tau)\Theta_i,$$

де функції $v_i(x,\tau)$ виражаються через коефіцієнти Фур'є відповідних розвинень за власними функціями [1].

Приклад 1. *Розв'язано модельну задачу про розподіл нестаціонарного температурного поля у восьмишаровій плоскій конструкції, де між трьома шарами існує ідеальний, а між чотирма неідеальний теплові контакти. Результати розрахунків оформлено у вигляді таблиць та графіків.*

[1] O.Y. Pazen and R.M. Tatsii General boundary-value problems for the heat conduction equation with piecewise-continuous coefficients. // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – March, 2016, – Vol. 89, No. 2, – P. 357-368.

[2] Таций Р.М., Пазен О.Ю. Расчет стационарного температурного поля в многослойной плите с учетом внутренних источников тепла при условии неидеального теплового контакта между слоями. // Safety and Fire Technique (безопасность и пожарная техника). – Polska, – Jozefov: – CNOBP-PIB, – BiTP 2015. – Vol. 40, – Issue 4. – P. 51-59.

[3] Тацій Р.М., Стасюк М.Ф., Мазуренко О.В., Власій О.О. Узагальнені квазідиференціальні рівняння. – Дрогобич: Коло, 2011. – 301 с.

[4] Арсенин В.Я. Методы математической физики. – Москва: Наука, 1974.

[5] Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К: Высшая школа, 1987. – 228 с.

e-mail: roman.tatsiy@gmail.com, opazen@gmail.com

Про матрицю Ґріна модельної $2\vec{b}$-параболічної крайової задачі

Турчина Н.І., Івасишен С.Д.
Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"

Нехай $n, N, b_1, \dots, b_n$ — задані натуральні числа; $2\vec{b} := (2b_1, \dots, 2b_n)$; s — найменше спільне кратне чисел $b_1, \dots, b_n$; $m_j := s/b_j, j \in \{1, \dots, n\}$; $\|k\| := \sum_{j=1}^n m_j k_j$, якщо $k := (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ — n-вимірний мультиіндекс; $\mathbb{R}_+^n := \{x := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | \ x_n > 0\}$, $\Pi_T^+ := \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} | \ t \in (0, T], x \in \mathbb{R}_+^n\}$, $\Pi'_T := \{(t, x') := (t, x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n | \ t \in (0, T], x' \in \mathbb{R}^{n-1}\}$, T — задане додатне число.

Розглядається крайова задача:

$$\partial_t u(t,x) - \sum_{\|k\|=2s} a_k \partial_x^k u(t,x) = f(t,x), (t,x) \in \Pi_T^+, \tag{1}$$

$$\sum_{2sk_0+\|k\|=r_j} b_{jk_0k} \partial_t^{k_0} \partial_x^k u(t,x)|_{x_n=0} = g_j(t,x'),$$
$$(t,x') \in \Pi'_T, j \in \{1, \dots, m\}, \tag{2}$$
$$u(t,x)|_{t=0} = \varphi(x), x \in \mathbb{R}_+^n, \tag{3}$$

де u, f і ϕ — матриці-стовпчики розміру $N \times 1$, a_k і b_{jk_0k} — сталі матриці відповідно розміру $N \times N$ і $1 \times N$; $g_1, \dots, g_m$ — скалярні функції; $r_1, \dots, r_m$ — задані невід'ємні цілі числа, $m = b_n N$. Припускається, що система (1) є $2\vec{b}$-параболічна за С. Д. Ейдельманом і крайові вирази (2) задовольняють умову доповняльності [1].

Побудовано матрицю Ґріна задачі (1)–(3), тобто таку матрицю $G = (G_0, G_1, \dots, G_{m+1})$, що для відповідних функцій f, g_j і φ розв'язок цієї задачі зображується у вигляді

$$u(t,x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}_+^n} G_0(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi) d\xi +$$
$$+ \sum_{j=1}^m \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G_j(t,x;\tau,\xi') g_j(\tau,\xi') d\xi' +$$
$$+ \int_{\mathbb{R}_+^n} G_{m+1}(t,x;\xi) \varphi(\xi) d\xi, (t,x) \in \Pi_T^+.$$

З'ясовано структуру, отримано оцінки та вивчено деякі інші властивості компонент $G_j, j \in \{0, 1, \dots, m+1\}$, матриці G. Зокрема, встановлено, що елементи матриць G_0 і G_{m+1} не є звичайними функціями (вони містять похідні від дельта-функцій Дірака, зосереджених у точках $\tau = 0$ і $\xi_n = 0$), якщо в крайові умови (2) входять похідні за t і/або похідні за x_n порядку, більшого за $2b_n - 1$.

Наведено застосування матриці Ґріна до встановлення коректної розв'язності зададі (1)–(3) в просторах Гельдера $H^{l+\lambda}(\Pi_T^+)$, l — ціле число таке, що $l \geq \max(2s, r_1, \ldots, r_m)$, вектор-функцій u, які є неперервними разом з похідними вигляду $\partial_t^{k_0}\partial_x^k u$, $2sk_0 + \|k\| \leq l$, і для яких скінченна норма

$$\|u\|_{\Pi_T^+}^{l+\lambda} := \sum_{2sk_0+\|k\|\leq l} \sup_{(t,x)\in\bar{\Pi}_T^+} |\partial_t^{k_0}\partial_x^k u(t,x)| +$$

$$+ \sum_{0\leq l-2sk_0-\|k\|<2s} \sup_{\substack{\{t,\beta\}\subset[0,T], t\neq\beta \\ x\in\bar{\mathbb{R}}_+^n}} \left(\frac{|\partial_t^{k_0}\partial_x^k u(t,x) - \partial_\beta^{k_0}\partial_x^k u(\beta,x)|}{|t-\beta|^{(l-2sk_0-\|k\|+\lambda)/(2s)}} \right) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \sum_{0\leq l-2sk_0-\|k\|<m_j} \sup_{\substack{\{(t,x),(t,x(y_j))\}\subset\bar{\Pi}_T^+ \\ x_j\neq y_j}} \left(\frac{|\partial_t^{k_0}\partial_x^k u(t,x) - \partial_t^{k_0}\partial_{x(y_j)}^k u(t,x(y_j))|}{|x_j-y_j|^{(l-2sk_0-\|k\|+\lambda)/m_j}} \right),$$

де $x(y_j) := (x_1, \ldots, x_{j-1}, y_j, x_{j+1}, \ldots, x_n)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$.

При цьому отримано точні оцінки норм розв'язків через відповідні норми правих частин $f, g_j, j \in \{1, \ldots, n\}$ і φ задачі (1)–(3). Доведено, що такі оцінки є не тільки необхідними, але й достатнніми для того, щоб для задачі вигляду (1)–(3) виконувалась умова $2\vec{b}$-параболічності системи (1) та умова доповняльності для крайових диференціальних виразів.

Дослідження коректної розв'язності задачі (1)–(3) ґрунтується на детальному вивченні властивостей інтегральних операторів, ядрами яких є елементи матриці Ґріна (операторів Ґріна), а також лем про продовження функцій з просторів Гельдера, які розглядаються. Істотно використовуються природні умови узгодження правих частин задачі.

Отримані результати можуть використовуватися для дослідження загальніших $2\vec{b}$-параболічних крайових задач, властивостей розв'язків, визначених на нескінченних часових інтервалах, а також встановлення однозначної розв'язності відповідних квазілінійних крайових задач.

У доведеннях використовувалася методика та результати з праць [2–5].

[1] Турчина Н.І., Івасишен С.Д. Про модельну крайову задачу з векторною вагою // Буковинський мат. журн. – 2017. – **5**, №3-4. – С. 163-167.

[2] Ивасишен С.Д. Линейные параболические граничные задачи. – Киев: Выща школа, 1987. – 72 с. – (Современные достижения математики и ее приложений).

[3] Ивасишен С.Д., Эйдельман С.Д. $2\vec{b}$-параболические системы // Тр. семинара по функц. анализу.–Киев: Ин-т математики АН УССР, 1968. – Вып. 1. – С. 3-175, 271-273.

[4] Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type // Operator Theory: Advances and Applications. – 2004. – 152. – 390 p.

[5] Івасишен С.Д., Івасюк Г.П. Коректна розв'язність параболічних початкових задач Солонникова-Ейдельмана // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, №5. – С. 650-671.

e-mail: nataturchina@gmail.com, ivasyshen.sd@gmail.com

Про симетрійну редукцію деяких диференціальних рівнянь з частинними похідними

Федорчук В.М.
Інститут математики, Педагогічний Університет ім. КНО
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України
Федорчук В.І.
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України

З часів Ньютона диференціальні рівняння є одним з основних інструментів для побудови математичних моделей процесів, які відбуваються в навколишньому світі. У багатьох випадках диференціальні рівняння цих моделей мають нетривіальну симетрію. Для дослідження цих рівнянь можна, зокрема, використовувати класичний метод С. Лі. Використання цього підходу, зокрема, дає можливість проводити симетрійну редукцію та будувати класи інваріантних розв'язків рівнянь, що досліджуються (див., наприклад [1, 2]).

Для класифікації симетрійних редукцій і інваріантних розв'язків вищезгаданих диференціальних рівнянь ми запропонували використовувати структурні властивості низькорозмірних неспряжених підалгебр того самого рангу алгебр Лі груп симетрії рівнянь, що досліджуються [3].

В доповіді, зокрема, мова йтиме про класифікацію симетрійних редукцій для рівняння ейконала в просторі $M(1,3) \times R(u)$ з використанням класифікації тривимірних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи Пуанкаре $P(1,4)$. Тут: $M(1,3)$ — чотиривимірний простір Мінковського, $R(u)$ — числова вісь залежної змінної u. Деталі з цього приводу можна знайти в [4, 5].

[1] Lie S. Zur allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. Leipz. Berichte, I. 53. (Reprinted in Lie S., Gesammelte Abhandlungen, 4, Paper IX.), 1895.

[2] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978.

[3] Fedorchuk V., Fedorchuk V. On classification of symmetry reductions for partial differential equations, Некласичні задачі теорії диференціальних рівнянь. Збірник наукових праць, присвячений 80-річчю Богдана Йосиповича Пташника (під заг. ред. Кушніра Р.М., Пелиха В.О.), 241–255, ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України. Львів, 2017.

[4] Fedorchuk V., Fedorchuk V. On Classification of Symmetry Reductions for the Eikonal Equation, Symmetry 2016, 8(6), 51; doi:10.3390/sym8060051.

[5] Fedorchuk V., Fedorchuk V. Classification of Symmetry Reductions for the Eikonal Equation. – Lviv: Pidstryhach IAPMM of NAS of Ukraine, 2018.

e-mail: vasyl.fedorchuk@up.krakow.pl, volfed@gmail.com

Про симетрійну редукцію та інваріантні розв'язки рівняння ейконала

Федорчук В.І.
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України

Симетрійна редукція є одним з найбільш ефективних методів дослідження диференціальних рівнянь з нетривіальними групами симетрії. Для проведення симетрійної редукції таких рівнянь можна, зокрема, використовувати класичний метод С. Лі (див., наприклад [1, 2, 3]).

В [4] запропоновано для класифікації симетрійних редукцій диференціальних рівнянь з частинними похідними використовувати структурні властивості низькорозмірних неспряжених підалгебр алгебр Лі груп симетрії цих рівнянь.

В працях [4, 5, 6], зокрема, проведено класифікацію симетрійних редукцій для рівняння ейконала в просторі $M(1,3)\times R(u)$ з використанням класифікації низькорозмірних ($dimL \leq 3$) неспряжених підалгебр алгебри Лі групи Пуанкаре $P(1,4)$. Тут і надалі: $M(1,3)$ — чотиривимірний простір Мінковського, $R(u)$ — числова вісь залежної змінної u.

В моїй доповіді, зокрема, мова йтиме про класифікацію симетрійних редукцій для рівняння ейконала в просторі $M(1,3) \times R(u)$ з використанням класифікації одно- і двовимірних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи Пуанкаре $P(1,4)$.

[1] Lie S. Zur allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. Leipz. Berichte, I. 53. (Reprinted in Lie S., Gesammelte Abhandlungen, 4, Paper IX.), 1895.

[2] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978.

[3] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. – М.: Мир, 1989.

[4] Fedorchuk V., Fedorchuk V. On classification of symmetry reductions for partial differential equations, Некласичні задачі теорії диференціальних рівнянь. Збірник наукових праць, присвячений 80-річчю Богдана Йосиповича Пташника (під заг. ред. Кушніра Р.М., Пелиха В.О.), 241–255, ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України. Львів, 2017.

[5] Fedorchuk V., Fedorchuk V. On Classification of Symmetry Reductions for the Eikonal Equation, Symmetry 2016, 8(6), 51; doi:10.3390/sym8060051.

[6] Fedorchuk V., Fedorchuk V. Classification of Symmetry Reductions for the Eikonal Equation. – Lviv: Pidstryhach IAPMM of NAS of Ukraine, 2018.

e-mail: volfed@gmail.com

Диференціювання в просторі симетричних поліномів на ℓ_1

Загороднюк А.В.
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефанника
Фуштей В.І.
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України

Нехай $\mathcal{P}_s(\ell_1)$ — простір симетричних поліномів на комплексному банаховому просторі абсолютно збіжних послідовностей ℓ_1. Відомо, що поліноми вигляду

$$G_n(x) = \sum_{i_1<\ldots<i_n} x_{i_1} \ldots x_{i_n}$$

утворюють алгебраїчний базис симетричних поліномів в $\mathcal{P}_s(\ell_1)$ і $\|G_n\| = \frac{1}{n!}$ (див. детальніше [1], [2]).

Нехай $P_n = n!G_n$. Визначено оператор диференціювання на поліномах P_n за формулою

$$dP_n(x) = nP_{n-1}(x),$$

де $P_0 = 1, n = 0, 1, 2, \ldots$, і продовжено його за лінійністю та правилом Лейбніца ($d(PQ) = dPQ + PdQ$) на весь простір $\mathcal{P}_s(\ell_1)$.

Теорема 1.

$$dP_n(x) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial d}{\partial x_k} P_n(x)$$

Теорема 2. *Оператор d є неперервним оператором з $\mathcal{P}_s(\ell_1)$ в себе в топології зліченно-нормованого простору, визначеної системою норм:*
$\|P\|_r = \sup_{\|x\|\le r} \|P(x)\|$, $P \in \mathcal{P}_s(\ell_1)$, $r \in \mathbb{Q}$.

[1] I. Chernega, P. Galindo, and A. Zagorodnyuk, *Some algebras of symmetric analytic functions and their spectra.* Proc. Edinburgh Math. Soc. **55** (2012), 125–142.

[2] I. Chernega, P. Galindo, and A. Zagorodnyuk, *The convolution operation on the spectra of algebras of symmetric analytic functions*, J. Math. Anal. Appl. **395** (2012) 569В—577.

e-mail: f.v.1214.for.friends@dmail.com, azagorodn@gmail.com

Нелокальна задача для одного класу еволюційних рівнянь

Широковських А.О.
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Нелокальні крайові задачі для диференціально-операторних рівнянь та рівнянь з частинними похідними виникають при побудові загальної теорії крайових задач, описуванні всіх коректних задач для конкретного оператора, математичному моделюванні різноманітних природничих процесів [1]. Використовуючи різні підходи та методи розв'язання, такими задачами у різних аспектах займалися багато математиків, зокрема, О.О. Дезін, В.К. Романко, С.Г. Крейн, В.М. Борок, Б.Й. Пташник, М.І. Матійчук, В.І. Чесалін та ін. Одержані важливі результати щодо постановки, коректної розв'язності та побудови розв'язків, досліджені питання залежності характеру розв'язності задач від поведінки символів операцій, сформульовані умови регулярності та нерегулярності крайових умов для важливих випадків диференціально-операторних рівнянь.

У даній роботі встановлена коректна розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційних рівнянь з операторами Бесселя дробового диференціювання та їх узагальненнями із граничною функцією з простору узагальнених функцій типу ультрарозподілів, знайдено зображення розв'язку у вигляді згортки фундаментально розв'язку з граничною функцією, доведена властивість локалізації розв'язку багатоточкової задачі.

Нехай $\omega \in (1, +\infty) \backslash \{2, 4, 6, ...\}$, $\mu \in (-\infty, 0]$ — фіксовані параметри. Символом P_ω^μ позначимо сукупність нескінченно диференційовних функцій a на $\mathbb{R}$, які допускають аналітичне продовження у певну область комплексної площини. З теореми типу Фрагмена–Ліндельофа [2, с. 264] випливає, що e^{-a} є елементом простору $S_{1/\omega}^{1-\mu/\omega}$, який відноситься до просторів типу S (просторів S_α^β, $\alpha > 0$, $\beta > 0$), введених І.М. Гельфандом та Г.Є. Шиловим в [2].

Із властивостей функції a випливає, що ця функція є мультиплікатором у просторі $S_{1/\omega}^{1-\mu/\omega}$, в якому визначений, є лінійним і неперервним, оператор A, побудований за цією ж функцією як за символом за правилом: $\forall \varphi \in S_{1-\mu/\omega}^{1/\omega}$: $A\varphi = F^{-1}[aF[\varphi]]$, де F і F^{-1} — пряме та обернене перетворення Фур'є.

Для еволюційного рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + Au(t,x) = 0, \;\; (t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \tag{1}$$

де A — псевдодиференціальний оператор, розглянемо нелокальну багатоточкову (m-точкову) за часом задачу: знайти розв'язок $u \in C^1\left((0,T], S_{1-\mu/\omega}^{1/\omega}\right)$ рівняння (1), який задовольняє умову:

$$\mu_0 u(t,\cdot)\mid_{t=0} - \mu_1 u(t,\cdot)\mid_{t=t_1} - ... - \mu_m u(t,\cdot)\mid_{t=t_m} = f, \;\; f \in \left(S_{1-\mu/\omega}^{1/\omega}, *\right)', \tag{2}$$

де $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu_0, \mu_1, ..., \mu_m\} \subset (0, \infty)$, $\{t_1, ..., t_m\} \subset (0, T]$ — фіксовані числа, $\mu_0 > m \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k$, $0 < t_1 < ... < t_m \leq T$.

Тут символом $\left(S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega}, *\right)'$ позначено клас узагальнених функцій з простору лінійних неперервних функціоналів зі слабкою збіжністю, які є згортувачами в просторі $S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega}$. Під розв'язком задачі (1), (2) розуміємо функцію u, яка задовольняє умову (2) в слабкому сенсі. Має місце наступне твердження.

Теорема 1. *Задача (1), (2) коректно розв'язна. Розв'язок зображається у вигляді згортки:* $u(t,x) = f * \Gamma(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, *де* $\Gamma(t,x) = F^{-1}[Q(t,\sigma)](x)$, $Q(t,\sigma) = \exp\{-ta(\sigma)\}\left(\mu - \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{-t_k a(\sigma)\}\right)^{-1}$. *Функцію* Γ *називатимемо фундаментальним розв'язком* m*-точкової задачі для рівняння (1).*

Оскільки узагальнена функція f — згортувач у просторі $S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega}$, а функція $\Gamma(t,\cdot)$ — фундаментальний розв'язок для рівняння (1), є неперервною абстрактною функцією параметра $t \in (0,T]$ із значеннями в просторі $S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega}$, то граничні співвідношення $u(t,\cdot) = f * \Gamma(t,\cdot) \underset{t\to t_k}{\longrightarrow} f * \Gamma(t_k,\cdot) = u(t_k,\cdot)$, $t_k \in (0,T]$, $k \in \{1,...,m\}$, справджуються в просторі $S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega}$. Звідси дістаємо, що $u(t,\cdot) \to u(t_k,\cdot)$ при $t \to t_k$, $k \in \{1,...,m\}$, рівномірно на довільному відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Вказану збіжність в (2) погіршує перший доданок, оскільки для функції $\Gamma(t,\cdot)$ точка $t = 0$ є особливою. Однак, якщо граничну функцію f брати з класу $\left(S^{\beta}_{1-\mu/\omega}\right)' \subset \left(S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega}\right)'$ при $\beta > 1$, яка містить фінітні функції, то можна отримати локальне покращення збіжності згортки $f * \Gamma(t,\cdot)$ при $t \to +0$. В цьому випадку коректним є поняття збіжності узагальненої функції f з гладкою функцією на деякій відкритій множині $Q \subset \mathbb{R}$.

Теорема 2. ***(властивість локалізації)*** *Нехай* $f \in \left(S^{\beta}_{1-\mu/\omega}\right)'$, *де* $\beta \geq 1 + (1-\mu)/\omega$, $u(t,x)$ *— розв'язок задачі (1), (2) з граничною функцією* f. *Якщо узагальнена функція* f *збігається на інтервалі* $(a,b) \subset \mathbb{R}$ *з функцією* g, *яка є мультиплікатором у просторі* $S^{\beta}_{1-\mu/\omega}$, $\beta \geq 1 + (1-\mu)/\omega$, *то на довільному проміжку* $[c,d] \subset (a,b)$ *граничне співвідношення*

$$\mu_0 \lim_{t\to+0} u(t,x) - \mu_1 \lim_{t\to t_1} u(t,x) - ... - \mu_m \lim_{t\to t_m} u(t,x) = g(x)$$

справджується рівномірно відносно x.

[1] Дезин А.А. Операторы с первой производной по "времени" и нелокальные граничные условия // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1967. – Т. 31, №1. – С. 61-86.

[2] Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.

e-mail: a.shyrokovskykh@gmail.com

Bounded l-index and infinite products of infinite genus

Bandura A.I.
Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas

Let $l : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$ be a fixed positive continuous function, where $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$. An entire function f is said to be of bounded $l-$index [1] if there exists an integer m, independent of z, such that for all p and all $z \in \mathbb{C}$ $\frac{|f^{(p)}(z)|}{l^p(z)p!} \leq \max\{\frac{|f^{(s)}(z)|}{l^s(z)s!} : 0 \leq s \leq m\}$. The least such integer m is called the l-index of f and is denoted by $N(f;l)$. If $l(z) \equiv 1$ then the function f is of bounded index [2]. Let Q be a class of positive continuous functions l on $[0, +\infty)$ such that $\lambda(r) = \sup\left\{\frac{l(t_1)}{l(t_2)} : |t_1 - t_2| < \frac{r}{\min\{l(t_1), l(t_2)\}}\right\}$ is finite for all $r \geq 0$.

Let us consider infinite products of infinite genus, i.e.

$$\pi(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{z}{c_n}\right)^{m_n}\right), \tag{1}$$

where $m_n \in \mathbb{N}$, $m_n \to +\infty$, $c_n \to \infty$, $c_n \in \mathbb{C}$ and for every $p \in \mathbb{N}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|c_n|^p} = \infty$. Obviously, the function $\pi(z)$ is entire and has not non-complete regular growth.

Main result. Let us denote $G_r(f) = \bigcup_n \{z : |z - c_n| < \frac{r}{l(|c_n|)}\}$ and $n(r, z, 1/f) = \sum_{|c_k - z| < r} 1$ be a counting zero function, where $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ is a zero sequence of the function f, z is a fixed point.

Theorem 1. *Let $l \in Q$ be an non-decreasing function and a positive sequence (c_n) of infinite genus satisfy the following conditions:*

1) *for some $q_0 > 0$ and all $n \geq 1$* $c_{n+1} - c_n > \frac{2q_0}{l(c_n)}$ *and* $l(c_{n+1}) = O(l(c_n))$, $n \to \infty$;
2) $c_n/m_n > q_1/l(c_n)$ *for all $n \geq 1$ and some $q_1 > 0$*;
3) $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{m_k(c_n+c_k)^{m_k-1}}{(c_n+c_k)^{m_k}-(2c_k)^{m_k}} = O(l(c_n))$ *as* $n \to \infty$;
4) $\sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{m_k(c_n+c_k)^{m_k-1}}{(2c_k)^{m_k}-(c_n+c_k)^{m_k}} = O(l(c_n))$ *as* $n \to \infty$;
5) $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{m_k c_n^{m_k-1}}{c_n^{m_k}-c_k^{m_k}} = O(l(c_n))$ *as* $n \to \infty$;
6) $\sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{m_k c_{n+1}^{m_k-1}}{c_k^{m_k}-c_{n+1}^{m_k}} = O(l(c_n))$ *as* $n \to \infty$.

Then function (1) *has bounded l-index.*

[1] A.D. Kuzyk, M.M. Sheremeta, *Entire functions of bounded l-distribution of values.* Math. Notes. 39 (1986), no. 1, 3–8,

[2] B. Lepson, Differential equations of infinite order, hyperdirichlet series and entire functions of bounded index, Proc. Sympos. Pure Math., V. 2., Amer. Math. Soc.: Providence, Rhode Island, 1968, 298–307.

e-mail: andriykopanytsia@gmail.com

Interconnection between the Wick calculus and the stochastic integration in the Lévy white noise analysis

Frei M.M.
Vasyl Stefanyk Precarpathian National University
Kachanovsky N.A.
Institute of Mathematics, NASU

Due to development of physics and mathematics there is a need to develop a theory of test and generalized functions of infinitely many variables. One of the most successful approaches to building of such a theory consists in construction of spaces of the just now mentioned functions in such a way that the natural pairing between test and generalized functions is generated by integration with respect to some probability measure on a dual nuclear space. First it was the standard Gaussian measure, then it were realized numerous generalizations. In particular, important results can be obtained if one uses the Lévy white noise measure [1], the corresponding theory is called the *Lévy white noise analysis*.

An important role in the Gaussian analysis belongs to a *chaotic representation property* (CRP): roughly speaking, any square integrable with respect to the Gaussian measure random variable can be decomposed in a series of Itô's stochastic integrals from nonrandom functions. In the Lévy analysis there is no the CRP, but there are different generalizations of this property. Using these generalizations, one can construct different spaces of test and generalized functions. And in any case it is necessary to introduce a natural product (a *Wick product*) on spaces of generalized functions, and to study related topics.

We deal with Lytvynov's generalization of the CRP [3] and with the corresponding spaces of regular generalized functions. Our goal is to consider an interconnection between the Wick calculus [2] and the stochastic integration [4] on these spaces. More exactly, we consider the Wick multiplication under the sign of the stochastic integral, and construct a formal representation of the extended stochastic integral via the Pettis integral, using the Wick product. As examples we consider some stochastic equations with Wick type nonlinearities.

[1] Di Nunno G., Oksendal B., Proske F., White noise analysis for Lévy processes // J. Funct. Anal. – 2004. – V. 206, No. 1. – P. 109-148.

[2] Frei M.M., Wick calculus on spaces of regular generalized functions of Lévy white noise analysis // Carpathian Mathematical Publications. – 2018. – V. 10, No. 1. – P. 82-104.

[3] Lytvynov E.W. Orthogonal decompositions for Lévy processes with an application to the gamma, Pascal, and Meixner processes // Infinite Dimensional Analysis, QPRT. – 2003. – V. 6, No. 1. – P. 73-102.

[4] Kachanovsky N.A., Extended stochastic integrals with respect to a Lévy process on spaces of generalized functions // Mathematical Bulletin of Taras Shevchenko Scientific Society. – 2013. – V. 10. – P. 169-188.

e-mail: mashadyriv@ukr.net

Approaches to derivation of kinetic equations with hard sphere collisions

Gerasimenko V.I.
Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine

In the talk a new approach to the description of the kinetic evolution of hard spheres is considered. The relations of the hierarchy of evolution equations for marginal observables and the nonlinear kinetic equations for states described in terms of a one-particle marginal distribution function are established [1].

The Boltzmann–Grad asymptotic behavior of a nonperturbative solution of the Cauchy problem of the dual BBGKY hierarchy for systems with hard sphere collisions is considered. In case of initial states specified by means of a one-particle distribution function the links between the Boltzmann–Grad asymptotic behavior of marginal observables and a solution of the Boltzmann kinetic equation is established [2].

One of the advantages of the stated approach to the derivation of kinetic equations from underlying hard sphere dynamics consists in an opportunity to construct the Boltzmann-like kinetic equation with initial correlations and it gives to describe the process of the propagation of initial correlations in the Boltzmann–Grad scaling limit.

Moreover, using suggested approach, we derive the non-Markovian Enskog kinetic equation with initial correlations and construct the marginal functionals of states, describing the creation of all possible correlations of particles with hard sphere collisions in terms of a one-particle distribution function governed by the Enskog equation. The Boltzmann–Grad asymptotic behavior of a non-perturbative solution of the derived Enskog equation and the marginal functionals of states are also established [3].

The obtained results we also extend on systems of hard spheres with inelastic collisions [4].

[1] Gerasimenko V.I., Gapyak I.V. Low-density asymptotic behavior of observables of hard sphere fluids // Advances in Math. Phys. – 2018. – V. 2018, Article ID 6252919.

[2] Gerasimenko V.I. On the approaches to the derivation of the Boltzmann equation with hard sphere collisions // Proc. Inst. Math. NAS of Ukraine. – 2013. – V. 10, No. 2. – P. 71–95.

[3] Gerasimenko V.I., Gapyak I.V. Hard sphere dynamics and the Enskog equation // Kinet. Relat. Models. – 2012. – V. 5, No. 3. – P. 459–484.

[4] Borovchenkova M.S., Gerasimenko V.I. On the non-Markovian Enskog equation for granular gases // J. Phys. A: Math. Theor. – 2014. – V. 47, No. 3. – P. 035001.

e-mail: gerasym@imath.kiev.ua

On multinomial identities for Pell and Pell–Lucas polynomials

Goy T.P., Zatorsky R.A.
Vasyl Stefanyk Precarpathian National University

Extending the classical Fibonacci and Lucas numbers, Horadam and Mahon [4] introduced Pell and Pell–Lucas polynomials. They are defined respectively by the recurrence relation: for $n \geq 2$,

$$P_n(x) = 2xP_{n-1}(x) + P_{n-2}(x), \qquad Q_n(x) = 2xQ_{n-1}(x) + Q_{n-2}(x)$$

with different initial conditions $P_0(x) = 0$, $P_1(x) = 2$, and $Q_0(x) = 2$, $Q_1(x) = 2x$.

We investigate some families of Toeplitz–Hessenberg determinants the entries of which are Pell and Pell–Lucas polynomials. This leads us to discover some identities for these polynomials. Our approach is similar in spirit to [1–3].

Denote $|s| = s_1 + \cdots + s_n$, $\sigma_n = s_1 + 2s_2 + \cdots + ns_n$, and $m_n(s) = \frac{|s|!}{s_1! \cdots s_n!}$ is the multinomial coefficient.

Proposition. *Let $n \geq 1$, except when noted otherwise. Then*

$$\sum_{\sigma_n = n} (-1)^{|s|} m_n(s) P_0^{s_1}(x) P_1^{s_2}(x) \cdots P_{n-1}^{s_n}(x) = -(2x)^{n-2}, \qquad n \geq 2, \tag{1}$$

$$\sum_{\sigma_n = n} m_n(s) P_0^{s_1}(x) P_1^{s_2}(x) \cdots P_{n-1}^{s_n}(x) = \frac{\left(x + \sqrt{x^2+2}\right)^{n-1} - \left(x - \sqrt{x^2+2}\right)^{n-1}}{2\sqrt{x^2+2}},$$

$$\sum_{\sigma_n = n} (-1)^{|s|} m_n(s) P_0^{s_1}(x) P_1^{s_2}(x) \cdots P_{n-1}^{s_n}(x) =$$
$$= \frac{\left(2x - 1 - \sqrt{4x^2 - 4x + 5}\right)^n - \left(2x - 1 + \sqrt{4x^2 - 4x + 5}\right)^n}{2^n \cdot \sqrt{4x^2 - 4x + 5}},$$

$$\sum_{\sigma_n = n} m_n(s) P_0^{s_1}(x) P_1^{s_2}(x) \cdots P_{n-1}^{s_n}(x) =$$
$$= \frac{\left(1 + 2x + \sqrt{4x^2 + 4x + 5}\right)^n - \left(1 + 2x - \sqrt{4x^2 + 4x + 5}\right)^n}{2^n \cdot \sqrt{4x^2 + 4x + 5}},$$

$$\sum_{\sigma_n = n} (-1)^{|s|} m_n(s) P_2^{s_1}(x) P_3^{s_2}(x) \cdots P_{n+1}^{s_n}(x) = 0, \qquad n \geq 3, \tag{2}$$

$$\sum_{\sigma_n = n} m_n(s) P_2^{s_1}(x) P_3^{s_2}(x) \cdots P_{n+1}^{s_n}(x) =$$
$$= \frac{\left(2x + \sqrt{4x^2+2}\right)^{n+1} - \left(2x - \sqrt{4x^2+2}\right)^{n+1}}{4\sqrt{4x^2+2}},$$

$$\sum_{\sigma_n = n} (-1)^{|s|} m_n(s) P_1^{s_1}(x) P_3^{s_2}(x) \cdots P_{2n-1}^{s_n}(x) = -4x^2(4x^2+1)^{n-2}, \qquad n \geq 2,$$

$$\sum_{\sigma_n = n} (-1)^{|s|} m_n(s) P_3^{s_1}(x) P_5^{s_2}(x) \cdots P_{2n+1}^{s_n}(x) = -4x^2, \tag{3}$$

where the summation is over integers $s_i \geq 0$ satisfying $\sigma_n = n$.

We establish similar formulas for Pell–Lucas polynomials.

Important special numerical cases are: $P_n(1) = P_n$ the n^{th} Pell number; $Q_n(1) = Q_n$ the n^{th} Pell–Lucas number; $P_n(1/2) = F_n$ the n^{th} Fibonacci number and $Q_n(1/2) = L_n$ the n^{th} Lucas number. Furthermore, $P_n(x/2) = F_n(x)$, the n^{th} Fibonacci polynomial, and $Q_n(x/2) = L_n(x)$, the n^{th} Lucas polynomial [5]. Also, there is a relationship between Pell and Pell–Lucas polynomials with Chebyshev polynomials of the first kind $T_n(x)$ and of the second kind $U_n(x)$ as follows

$$P_n(x) = (-i)^{n-1}U_{n-1}(ix), \quad n \geq 1, \qquad Q_n(x) = 2(-1)^n T_n(ix), \quad n \geq 0.$$

For example, from formulas (1)–(3) we obtain the following identities:

$$\sum_{\sigma_n=n} (-1)^{|s|} m_n(s) P_0^{s_1} P_1^{s_2} \cdots P_{n-1}^{s_n} = -2^{n-2}, \qquad n \geq 2,$$

$$\sum_{\sigma_n=n} (-1)^{|s|} m_n(s) F_0^{s_1} F_1^{s_2} \cdots F_{n-1}^{s_n} = -1 \qquad n \geq 2,$$

$$\sum_{\sigma_n=n} (-1)^{|s|} m_n(s) F_0^{s_1}(x) F_1^{s_2}(x) \cdots F_{n-1}^{s_n}(x) = -x^{n-2}, \qquad n \geq 2,$$

$$\sum_{\sigma_n=n} (-1)^{|s|} m_n(s) P_2^{s_1} P_3^{s_2} \cdots P_{n+1}^{s_n} = 0, \qquad n \geq 3,$$

$$\sum_{\sigma_n=n} (-1)^{|s|} m_n(s) F_2^{s_1} F_3^{s_2} \cdots F_{n+1}^{s_n} = 0, \qquad n \geq 3,$$

$$\sum_{\sigma_n=n} (-1)^{|s|} m_n(s) F_2^{s_1}(x) F_3^{s_2}(x) \cdots F_{n+1}^{s_n}(x) = 0, \qquad n \geq 3,$$

$$\sum_{\sigma_n=n} (-1)^{|s|} m_n(s) U_1^{s_1}(x) U_2^{s_2}(x) \cdots U_n^{s_n}(x) = 0, \qquad n \geq 3,$$

$$\sum_{\sigma_n=n} (-1)^{|s|} m_n(s) P_3^{s_1} P_5^{s_2} \cdots P_{2n+1}^{s_n} = -4, \qquad n \geq 2,$$

$$\sum_{\sigma_n=n} (-1)^{|s|} m_n(s) F_3^{s_1}(x) F_5^{s_2}(x) \cdots F_{2n+1}^{s_n}(x) = -1, \qquad n \geq 2.$$

[1] Goy T. On new identities for Mersenne numbers // Appl. Math. E-Notes. – 2018. – V. 18. – P. 100-105.

[2] Goy T. On Pell identities with multinomial coefficients // Int. Conf. "Numbers, Forms and Geometry": Abstracts. – Khabarovsk: Institute of Applied Mathematics, 2017. – P. 23-24.

[3] Goy T. Some families of identities for Padovan numbers // Proc. Jangjeon Math. Soc. – 2018. – V. 18, No. 3. – P. 413-419.

[4] Horadam A.F., Bro. Mahon J.M. Pell and Pell–Lucas polynomials // Fibonacci Quart. – 1985. – V. 23, No. 1. – P. 7-20.

[5] Koshy T. Pell and Pell-Lucas Numbers with Applications. – New York: Springer, 2014.

e-mail: tarasgoy@yahoo.com

The Lie–algebraic structure of the Lax–Sato integrable Husain, Plebański type and general Monge heavenly equations

Hentosh O.Ye.
Pidstryhach IAPMM, NAS of Ukraine
Prykarpatsky Ya.A.
Institute of Mathematics, NAS of Ukraine

The general Lie–algebraic approach to constructing the Lax–Sato integrable dispersionless multi–dimensional heavenly systems has been developed in [1]. It is based on the Adler–Kostant–Symes theory and $\mathcal{R}$–operator structures related with the loop Lie algebra $\tilde{\mathcal{G}} := \widetilde{diff}(\mathbb{T}^n)$ of vector fields on the n-dimensional torus $\mathbb{T}^n$ and adjacent holomorphic in the "spectral" parameter $\lambda \in \mathbb{S}^1_{\pm} \subset \mathbb{C}$ Lie algebra $diff_{hol}(\mathbb{C} \times \mathbb{T}^n) \subset diff(\mathbb{C} \times \mathbb{T}^n)$ of vector fields on $\mathbb{C} \times \mathbb{T}^n$. Owing to this approach, the Lax-Sato integrable heavenly systems arise as a compatible condition for two commuting Hamiltonian flows on the dual spaces to the Lie algebras $\tilde{\mathcal{G}}$ and $diff_{hol}(\mathbb{C} \times \mathbb{T}^n)$ and their conservation laws are generated by the corresponding sets of Casimir invariants. In our report the Lie-algebraic interpretation of the Lax–Sato integrability of such known multi-dimensional heavenly equations as Husain, first and modified Plebański and general Monge ones by use of the loop Lie algebra $\widetilde{diff}(\mathbb{T}^n)$, where $n > 1$, is proposed.

Husain heavenly equation. If the seed element $\tilde{l} \in \tilde{\mathcal{G}}^*$ is chosen in the form

$$\tilde{l} := (\lambda - i)^{-1} d(u_y + iu_t) + (\lambda + i)^{-1} d(u_y - iu_t) = 2(\lambda^2 + 1)^{-1}(\lambda du_y - du_t),$$

where $\tilde{l} :=< l, dx >$, $u \in C^2(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, $x := (x_1, x_2)^\top \in \mathbb{T}^2$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-i; i\}$, $i^2 = -1$ and "d" designates a full differential, the loop Lie algebra $\tilde{\mathcal{G}}$, where $n = 2$, admits two independent Casimir functionals $\gamma^{(1)}$ and $\gamma^{(2)} \in \tilde{I}(\tilde{\mathcal{G}}^*)$, with the following gradient asymptotic expansions:

$$\nabla\gamma^{(1)}(l) \simeq (-(u_{yx_2} + iu_{tx_2}), u_{yx_1} + iu_{tx_1})^\top/2 + O(\mu), \quad \mu := \lambda - i, \quad |\mu| \to 0,$$
$$\nabla\gamma^{(2)}(l) \simeq (-(u_{yx_2} - iu_{tx_2}), u_{yx_1} - iu_{tx_1})^\top/2 + O(\xi), \quad \xi := \lambda + i, \quad |\xi| \to 0.$$

There is shown that the commutability condition

$$[X^{(y)}, X^{(t)}] = 0 \tag{1}$$

of the vector fields

$$X^{(y)} := \partial/\partial y + \nabla h^{(y)}_{-}(\tilde{l}), \qquad X^{(t)} = \partial/\partial t + \nabla h^{(t)}_{-}(\tilde{l}), \tag{2}$$

where

$$\begin{aligned} \nabla h^{(y)}_{-}(\tilde{l}) &:= (\mu^{-1}\nabla\gamma^{(1)}(\tilde{l}) + \xi^{-1}\nabla\gamma^{(2)}(\tilde{l}))|_{-} = \\ &= \frac{u_{tx_2} - \lambda u_{yx_2}}{\lambda^2 + 1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\lambda u_{yx_1} - u_{tx_1}}{\lambda^2 + 1}\frac{\partial}{\partial x_2}, \\ \nabla h^{(t)}_{-}(\tilde{l}) &:= (-\mu^{-1}i\nabla\gamma^{(1)}(\tilde{l}) + \xi^{-1}i\nabla\gamma^{(2)}(\tilde{l}))|_{-} = \\ &= -\frac{u_{yx_2} + \lambda u_{tx_2}}{\lambda^2 + 1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{u_{yx_1} + \lambda u_{tx_1}}{\lambda^2 + 1}\frac{\partial}{\partial x_2}, \end{aligned} \tag{3}$$

leads to the Husain heavenly equation

$$u_{yy} + u_{tt} + u_{yx_1}u_{tx_2} - u_{yx_2}u_{tx_1} = 0.$$

Its Lax-Sato representation is given by the first order partial differential equations

$$X^{(y)}\Psi = 0, \qquad X^{(t)}\Psi = 0, \tag{4}$$

where $\Psi \in C^\infty(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ and the operators $\nabla h_-^{(y)}(\tilde{l})$, $\nabla h_-^{(t)}(\tilde{l})$ have the forms (3).

The relation of the Lax–Sato integrable first and modified Plebański heavenly equations to the loop Lie algebra $\tilde{\mathcal{G}}$, where $n = 2$, is investigated in a similar way.

General Monge heavenly equation. If the seed element $\tilde{l} \in \tilde{\mathcal{G}}^*$ is chosen in the form

$$\tilde{l} := 2\lambda^{-1}du_y + dx_1 + dx_2,$$

where $\tilde{l} :=< l, dx >$, $u \in C^2(\mathbb{T}^4 \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, $x := (x_1, x_2, x_3, x_4)^\top \in \mathbb{T}^4$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, the loop Lie algebra $\tilde{\mathcal{G}}$, where $n = 4$, admits four independent Casimir functionals $\gamma^{(1)}$, $\gamma^{(2)}$, $\gamma^{(3)}$ and $\gamma^{(4)} \in \tilde{I}(\tilde{\mathcal{G}}^*)$, whose gradients have the following asymptotic expansions:

$$\begin{aligned}
&\nabla\gamma^{(1)}(l) \simeq (0,1,0,0)^\top + O(\lambda^2),\\
&\nabla\gamma^{(2)}(l) \simeq (1,0,0,0)^\top + O(\lambda^2),\\
&\nabla\gamma^{(1)}(l) \simeq (0,0,-u_{yx_4}, u_{yx_3})^\top + O(\lambda^2),\\
&\nabla\gamma^{(2)}(l) \simeq (0,0,-u_{tx_4}, u_{tx_3})^\top + (0, 2(u_{yx_3}u_{tx_4} - u_{yx_4}u_{tx_3}),\\
&\qquad 2(u_{yx_4}u_{tx_2} - u_{yx_2}u_{tx_4}), 2(u_{yx_2}u_{tx_3} - u_{yx_3}u_{tx_2}))^\top\lambda + O(\lambda^2), \quad |\lambda| \to 0.
\end{aligned}$$

In the case, when

$$\begin{aligned}
\nabla h_-^{(y)}(\tilde{l}) &:= (\lambda^{-1}(\nabla\gamma^{(1)}(\tilde{l}) + \nabla\gamma^{(3)}(\tilde{l})))|_- =\\
&= \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{u_{yx_4}}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{u_{yx_3}}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_4},\\
\nabla h_-^{(t)}(\tilde{l}) &:= (\lambda^{-1}(-\nabla\gamma^{(2)}(\tilde{l}) + \nabla\gamma^{(4)}(\tilde{l})))|_- =\\
&= -\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{u_{tx_4}}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{u_{tx_3}}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_4},
\end{aligned} \tag{5}$$

the commutability condition (1) of the vector fields (2) leads to the general Monge heavenly equation

$$u_{yx_1} + u_{tx_2} + u_{yx_3}u_{tx_4} - u_{yx_4}u_{tx_3} = 0$$

with the Lax-Sato representation (4), where $\Psi \in C^\infty(\mathbb{T}^4 \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ and the operators $\nabla h_-^{(y)}(\tilde{l})$, $\nabla h_-^{(t)}(\tilde{l})$ have the forms (5).

[1] O.E. Hentosh, Ya.A. Prykarpatsky, D. Blackmore, A.K. Prykarpatski. Lie-algebraic structure of Lax–Sato integrable heavenly equations and the Lagrange–d'Alembert principle // Journal of Geometry and Physics. – 2017. – V. 120. – P. 208-227.

e-mail: ohen@ukr.net, yarpry@gmail.com

Nonlocal problem with integral conditions for system of evolution equations of first order

Kuduk G.
Faculty of Mathematics and Natural Sciences University of Rzeszow, Graduate of University of Rzeszow

Let A be a linear operator acting in the Banach space B and, for this operator arbitrary, powers A^n, be also defined in B, $A : B \to B$. Denote be $x(\lambda)$ the eigenvector of the operator A, which corresponds to its eigenvalue $\lambda \in \mathbb{C} \subseteq \Lambda$.

We consider the problem for system of equations

$$\frac{dU_i}{dt} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(A)U_j(t) = 0, \quad t \in (0,T), \tag{1}$$

satisfies conditions

$$P_i(A)U_i\Big|_{t=0} + Q_i(A)U_i\Big|_{t=T} + \int_0^T t^k U_i(t)dt = \varphi_{i,k}, \quad i = 1,...,n, \quad k = 0,1, \tag{2}$$

where $\varphi_i \in B$, $T > 0$, $U_i(t) : (0,T) \to B$ for $i = 1,...,n$ are an unknown vector-functions, $a_{ij}(A)$ are abstract operators, white entire symbols $a_{ij}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $P_i(A), Q_i(A)$ are arbitrary polynomials of A.

Let be $\eta(\lambda) = \int_0^T W^{(n-1)}(t,\lambda)dt$ is a certain function, $W(t,\lambda)$ is a solution of the equation

$$L\left(\frac{d}{dt},\lambda\right)W(t,\lambda) = 0$$

satisfies conditions

$$W^{(n-1)}(t,\lambda)\Big|_{t=0} = 1, \quad W^{(n-2)}(t,\lambda)\Big|_{t=0} = 0 \quad ,..., \quad W(t,\lambda)\Big|_{t=0} = 0.$$

Denote be

$$P = \{\lambda \in \mathbb{C} : \eta(\lambda) = 0\}. \tag{3}$$

We shall say that vector φ from B belongs $L \subseteq B$, if on $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ there exist depending on φ linear operator $R_\varphi(\lambda) : B \to B$, $\lambda \in \Lambda$, and measure $\mu_\varphi(\lambda)$ such that

$$\varphi = \int_\Lambda R_\varphi(\lambda)x(\lambda)d\mu_\varphi(\lambda)$$

Let in the conditions (2) the vectors φ_i, belong to L i.e. φ_i, can be represented in the form $\varphi_i = \int_\Lambda R_{\varphi_i}(\lambda)x(\lambda)d\mu_{\varphi_i}(\lambda)$, $i = \{1,2\}$ where $\lambda \in \Lambda \setminus P$, where P is set (3). Then the formula

$$U_i(t) = \sum_{m=0}^{n-2} \int_\Lambda R_{\varphi_{im}}(\lambda)\left\{\frac{1}{\eta(\lambda)}W^{(n-1-m)}(t,\lambda)x(\lambda)\right\}d\mu_{\varphi_{im}}(\lambda),$$

defines solution of the problem (1), (2).

Be means of the differential symbol method [1], we construct a solution of problem (1), (2). This result continues the research of work [1, 3, 4, 5].

[1] Kalenyuk P.I., Nytrebych Z.M. Generalized Scheme of Separation of Variables. Differential-Symbol Method. Publishing House of Lviv Polytechnic National University, 2002.

[2] Kalenyuk P.I., Nytrebych Z.M., Kohut I.V., Kuduk G. Problem for nonhomogeneous second order evolution equation with homogeneous integral conditions // Math. Methods and Phys. – Mech. Polia. – 2015. – V. 58, No. 1. – P. 7-19.

[3] Kalenyuk P.I., Kuduk G., Kohut I.V., and Nytrebych Z.M. Problem with integral conditiond for differential-operator equation. // J. Math. Sci. – 2015. – V. 3, No. 208. – P. 267-276.

[4] Kalenyuk P.I., Kohut I.V., Kuduk G., Nytrebych Z.M. Problem with nonlocal condition for differential-operator equation // International Conference: Modern Problems of Mechanics and Mathematics. National Academy of Sciences of Ukraine. Pidstryhach Instytute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics. May 21–25, 2013, L'viv, Ukraine. Abstracts. – 2013. – Vol. 1, No. 3. – P. 56-58.

[5] Kuduk G. Problem with homogeneous integral conditions for nonhomogeneous system of partial differential equations // International Conference: Modern Problems of Mechanics and Mathematics. National Academy of Sciences of Ukraine. Pidstryhach Instytute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics. May 22–25, 2018, L'viv, Ukraine. Abstracts. – 2018. – Vol. 3, No. 1. – P. 189-190.

e-mail: gkuduk@onet.eu

Determinantal representations of (skew-)η-Hermitian solutions to the quaternion generalized Sylvester-type matrix equation

Kyrchei I.I.
Pidstrygach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics

Through, $\mathbb{H}^{m\times n}$ and $\mathbb{H}_r^{m\times n}$ stand for the set of all $m\times n$ matrices and its subset of matrices with a rank r, respectively, over the quaternion skew field $\mathbb{H}=\{a_0+a_1i+a_2j+a_3k\,|\,i^2=j^2=k^2=-1,\ a_0,a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}\}$, where $\mathbb{R}$ is the real number field.

Definition 1. *The Moore-Penrose inverse of* $\mathbf{A}\in\mathbb{H}^{m\times n}$*, denoted by* $\mathbf{A}^{\dagger}$*, is defined to be the unique solution* $\mathbf{X}$ *to the following four matrix equations*

$$(1)\ \mathbf{AXA}=\mathbf{A},\ (2)\ \mathbf{XAX}=\mathbf{X},\ (3)\ (\mathbf{AX})^*=\mathbf{AX},\ (4)\ (\mathbf{XA})^*=\mathbf{XA}.$$

Furthermore, $\mathbf{L}_A=\mathbf{I}-\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A}$ and $\mathbf{R}_A=\mathbf{I}-\mathbf{A}\mathbf{A}^{\dagger}$ are projectors induced by $\mathbf{A}$.

Definition 2. *A matrix* $\mathbf{A}\in\mathbb{H}^{n\times n}$ *is known to be η-Hermitian and skew-η-Hermitian if* $\mathbf{A}=\mathbf{A}^{\eta*}=-\eta\mathbf{A}^*\eta$ *and* $\mathbf{A}=-\mathbf{A}^{\eta*}=\eta\mathbf{A}^*\eta$*, respectively, where* $\eta\in\{i,j,k\}$*.*

Consider the quaternion generalized Sylvester-type matrix equation

$$\mathbf{AXA}^{\eta*}+\mathbf{BYB}^{\eta*}=\mathbf{C}. \tag{1}$$

Expressions of the general η-Hermitian solutions to Eq. (1) has been derived by terms of Moore-Penrose inverses [1] as follows.

$$\begin{aligned}\mathbf{X}=&\,\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{C}(\mathbf{A}^{\dagger})^{\eta*}-\frac{1}{2}\left[\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{B}\mathbf{M}^{\dagger}\mathbf{C}\left(\mathbf{A}^{\dagger}\right)^{\eta*}+\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{C}\left(\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{B}\mathbf{M}^{\dagger}\right)^{\eta*}\right]\\&-\frac{1}{2}\left[\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{B}\mathbf{M}^{\dagger}\mathbf{C}\left(\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{S}\mathbf{B}^{\dagger}\right)^{\eta*}+\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{S}\mathbf{B}^{\dagger}\mathbf{C}\left(\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{B}\mathbf{M}^{\dagger}\right)^{\eta*}\right]\\&-\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{S}\mathbf{W}_2\left(\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{S}\right)^{\eta*}+\mathbf{L}_A\mathbf{U}+(\mathbf{L}_A\mathbf{U})^{\eta*},\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}=&\,\frac{1}{2}\left[\mathbf{M}^{\dagger}\mathbf{C}\left(\mathbf{B}^{\dagger}\right)^{\eta*}+\mathbf{B}^{\dagger}\mathbf{C}\left(\mathbf{M}^{\dagger}\right)^{\eta*}\right]+\frac{1}{2}\left[\mathbf{M}^{\dagger}\mathbf{C}\left(\mathbf{B}^{\dagger}\right)^{\eta*}\mathbf{P}_S^{\eta}+\mathbf{P}_S\mathbf{B}^{\dagger}\mathbf{C}\left(\mathbf{M}^{\dagger}\right)^{\eta*}\right]\\&+\mathbf{L}_M\mathbf{W}_2\mathbf{L}_M^{\eta}+\mathbf{V}\mathbf{L}_B^{\eta}+\mathbf{L}_B\mathbf{V}^{\eta*}+\mathbf{L}_M\mathbf{L}_S\mathbf{W}_1+\mathbf{W}_1^{\eta*}\mathbf{L}_S^{\eta}\mathbf{L}_M^{\eta},\end{aligned} \tag{3}$$

where $\mathbf{M}=:\mathbf{R}_A\mathbf{B}$, $\mathbf{S}=:\mathbf{B}\mathbf{L}_M$, and $\mathbf{W}_1,\ \mathbf{U},\ \mathbf{V},\mathbf{W}_2=\mathbf{W}_2^{\eta*}$ are arbitrary matrices over $\mathbb{H}$ with an appropriate sizes.

Using determinantal representations of the Moore-Penrose inverse previously obtained by the author [2] within the framework of the theory of quaternion column-row determinants [3], we give explicit determinantal representation formulas (analogs of Cramer's rule) of η-Hermitian and skew-η-Hermitian partial solutions by putting $\mathbf{W}_1,\ \mathbf{U},\ \mathbf{V}$, and $\mathbf{W}_2$ as zero-matrices with compatible dimension.

Theorem 3. *Let* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_{r_1}^{m\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{H}_{r_2}^{m\times k}$, $\operatorname{rank}\mathbf{M} = r_3$, $\operatorname{rank}\mathbf{S} = r_4$. *Then the partial pair solution (2)-(3) to Eq.(1),* $\mathbf{X} = (x_{ij}) \in \mathbb{H}^{n\times n}$, $\mathbf{Y} = (y_{pg}) \in \mathbb{H}^{k\times k}$, *by the components*

$$\begin{aligned} x_{ij} =& x_{ij}^{(1)} - \frac{1}{2}(x_{ij}^{(2)} - \eta\overline{x_{ji}^{(2)}}\eta) - \frac{1}{2}(x_{ij}^{(3)} - \eta\overline{x_{ji}^{(3)}}\eta), \\ y_{pg} =& \frac{1}{2}(y_{pg}^{(1)} - \eta\overline{y_{gp}^{(1)}}\eta) + \frac{1}{2}(y_{pg}^{(2)} - \eta\overline{y_{gp}^{(2)}}\eta), \end{aligned}$$

possess the following determinantal representations,

$$x_{ij}^{(1)} = \frac{-\eta \sum\limits_{\alpha\in I_{r,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{j.}\left(\mathbf{v}_{i.}^{\eta}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}\eta}{\left(\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}} \left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|_{\beta}^{\beta}\right)^2} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{u}_{.j}\right)\right)_{\beta}^{\beta}}{\left(\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}} \left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|_{\beta}^{\beta}\right)^2},$$

where

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{i.}^{\eta} &= \left[-\eta \sum_{\beta\in J_{r,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.i}\left(\widehat{\mathbf{a}}_{.s}\right)\right)_{\beta}^{\beta}\eta\right] \in \mathbb{H}^{1\times n},\ s = 1,\ldots,n, \\ \mathbf{u}_{.j} &= \left[-\eta \sum_{\alpha\in I_{r,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{j.}(\widehat{\mathbf{a}}_{l.}^{\eta})\right)_{\alpha}^{\alpha}\eta\right] \in \mathbb{H}^{n\times 1},\ l = 1,\ldots,n, \end{aligned}$$

are the row vector and the column vector, $\widehat{\mathbf{a}}_{.s}$ *is the sth column of* $\widehat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^*\mathbf{C}\mathbf{A}^{\eta}$ *and* $\widehat{\mathbf{a}}_{l.}^{\eta}$ *is the lth row of* $\widehat{\mathbf{A}}^{\eta} = \mathbf{A}^{\eta *}\mathbf{C}^{\eta}\mathbf{A}$.

Similarly, it can been represented for other components...

We use notations from [4, 5].

[1] He Z.H., Wang Q.W. A real quaternion matrix equation with applications // Linear and Multilinear Algebra. – 2013. – V. 61, No. 6. – P. 725–740.

[2] Kyrchei I.I. Determinantal representations of the Moore-Penrose inverse over the quaternion skew field and corresponding Cramer's rules // Linear and Multilinear Algebra. – 2011. – V. 59, No. 4. – P. 413–431.

[3] Kyrchei I.I. The theory of the column and row determinants in a quaternion linear algebra // In: A.R. Baswell (Ed.), Advances in Mathematics Research 15. – Nova Science Publ., New York, 2012. – P. 301-359.

[4] Kyrchei I.I. Determinantal representations of solutions to systems of quaternion matrix equations // Advances in Applied Clifford Algebras. – 2018. – V. 28 – P. 1-23.

[5] Kyrchei I.I. Cramer's rules for the system of two-sided matrix equations and of its special cases // In: Hassan A. Yasser (Ed.), Matrix Theory. – IntechOpen, 2018. – P. 3-20.

e-mail: kyrchei@online.ua

Determination of the initial data of the solution of the fractional diffusion equation

Lopushanskyj A.O.
Rzeszów University, Poland
Lopushanska H.P.
Ivan Franko National University of Lviv, Ukraine

We use the following: $Q = \mathbb{R}^n \times (0,T]$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ is the space of infinitely differentiable functions v in $\mathbb{R}^n$ such that $x^\gamma D^\alpha v$ are bounded in $\mathbb{R}^n$ for all multi-indexes α, γ (the Schwartz space of smooth rapidly decreasing functions), $S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$ $(\gamma > 0, a > 0)$ is the space of type $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ [1, p. 201]:

$$S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n) = \{v \in S(\mathbb{R}^n) : |D^\alpha v(x)| \le C_{\alpha,\delta}(v) e^{-(a-\delta)|x|^{\frac{1}{\gamma}}}, x \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha, \forall \delta > 0\}$$

$$= \{v \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : ||v||_{k,a} = \sup_{|\alpha| \le k, x \in \mathbb{R}^n} e^{a(1-\frac{1}{k})|x|^{\frac{1}{\gamma}}} |D^\alpha v(x)| < +\infty \ \forall k \in \mathbb{N}, \ \ k \neq 1\},$$

$\mathcal{S}_{\gamma,(a)}(\bar{Q}))$ is the space of functions $v \in C^\infty(\bar{Q})$ such that $(\frac{\partial}{\partial t})^s v(\cdot,t) \in \mathcal{S}_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$ for all $t \in [0,T]$, $s \in \mathbb{Z}_+$ and $(\frac{\partial}{\partial t})^s v(x,T) = 0$, $s \in \mathbb{Z}_+$,

$$S'_{\gamma,(a),C}(\bar{Q}) = \{f \in S'_{\gamma,(a)}(\bar{Q}) : \big(f(x,\cdot), \varphi(x)\big) \in C[0,T] \ \ \forall \varphi \in S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)\}.$$

For $\beta \in (0,1)$ we study the inverse problem

$$D_t^\beta u - \Delta u = F_0(x) g(t), \quad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

$$u(x,0) = F_1(x), \ \ x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

$$\int_0^T \big(u(\cdot,t), \varphi(\cdot)\big) dt = (F, \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n) \tag{3}$$

of the determination the pair $(F_1, u) \in S'_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n) \times S'_{\gamma,(a),C}(\bar{Q})$ where

$$D^\beta u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{-\beta} \frac{\partial}{\partial \tau} u(x,\tau) d\tau$$

is the Djrbashian-Caputo fractional derivative of u, F, F_0 are given Schwartz type distributions, g is a given continuous function.

Theorem 1. *Assume that $\gamma \ge 1$, $0 < aT^{\frac{\beta}{2\gamma}} \le (2-\beta)\Big(\frac{\beta^\beta}{4}\Big)^{\frac{1}{2-\beta}}$, $F_0, F \in \mathcal{S}'_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$, $g \in C[0,T]$. Then there exist $T_0 \in (0,T]$ and the unique solution $(F_1, u) \in \mathcal{S}'_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}'_{\gamma,(a),C}(\mathbb{R}^n \times [0,T_0])$ of the inverse problem* (1)–(3).

As a result, we obtain the conditions for the unique solvability of the problem (1)–(3) in spaces of such distributions.

1. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Пространства основных и обобщенных функций. Т. 2. – М.: Гостехиздат, 1958.

e-mail: alopushanskyj@gmail.com, lhp@ukr.net

Sufficient conditions for the emergence of solutions of weakly perturbed boundary value problems for quasidifferential equations with measures

Mazurenko V. V.
Vasyl Stefanyk Precarpathian National University

We study the solvability conditions of a weakly perturbed linear nonhomogeneous boundary value problem (BVP) $\mathcal{P}_\varepsilon$:

$$Ly(x) = f(x) + \varepsilon\sigma(x)y(x), \tag{1}$$

$$l_k y(\cdot) = \eta_k + \varepsilon\tilde{l}_k y(\cdot), \; k = \overline{1, m}. \tag{2}$$

Here

$$Ly(x) := \sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{q}(-1)^{q-j}\Big(a_{ij}(x)y^{(p-i)}\Big)^{(q-j)}$$

is a quasidifferential expression of order $n\,(= p+q)$, l_k and $\tilde{l}_k$ are linear functionals defined in the space $BV^+[a,b]$ of right-continuous functions of bounded variation on $[a,b]$, $\eta_k \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \geqslant 0$ is a small parameter.

The BVP $\mathcal{P}_0$ obtained by setting $\varepsilon = 0$ in (1) and (2) is called a generating BVP. For ordinary differential equations with continuous and Lebesque integrable coefficients, different special cases of the generating BVP $\mathcal{P}_0$ such as Cauchy problems, two-point BVPs, Cauchy–Nicoletti problems, Vallee–Poussin problems, multi-point BVPs, BVPs with multi-point conditions of an integral type, BVPs with interface conditions have been studied by many authors (see [1] and the references therein).

We weaken claims to the coefficients of equation (1) and suppose that the following conditions hold: (A) a_{00}^{-1} is bounded and measurable on $[a,b]$ function; (B) a_{i0}, a_{0j} are Lebesque integrable square on $[a,b]$ functions ($i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,q}$); (C) a_{ij} ($i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,q}$), σ, and f are measures on $[a,b]$, i. e. $a_{ij} = b'_{ij}$, $\sigma = \omega'$, and $f = g'$, where $b_{ij}, \omega, g \in BV^+[a,b]$, so the differentiation and the equality in (1) are understood in the generalized sense.

First, we consider the generating BVP $\mathcal{P}_0$. Let $K(x,t)$ denote the Cauchy function of the homogeneous quasidifferential equation $Ly(x) = 0$ and let $K_{xt}^{[i]\{j\}}(x,t)$ denote a mixed quasiderivative of order $i+j$ [2]. Let $M = \Big(l_k K_t^{\{n-l\}}(\cdot,a)\Big)_{k=\overline{1,m}}^{l=\overline{1,n}}$ be the $m \times n$ matrix of a rank $r \leqslant \min\{m,n\}$ obtained by substituting a fundamental system of solutions $K_t^{\{l-1\}}(x,a)$, $l = \overline{1,n}$, into conditions (2), and let $M^+ = \big(m_{ij}\big)_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,m}}$ be a Moore–Penrose pseudo-inverse $n \times m$ matrix to M [3]. Then $P_M = E_n - M^+M$ and $P_{M^*} = E_m - MM^+$ are an $n \times n$ matrix and an $m \times m$ matrix that project the spaces $\mathbb{R}^n$ and $\mathbb{R}^m$ onto the null spaces $N(M) = \{u \in \mathbb{R}^n \colon Mu = 0\}$ and $N(M^*) = \{v \in \mathbb{R}^m \colon M^*v = 0\}$ respectively. Let us remark that $\operatorname{rank} P_M = n - r =: \nu$ and $\operatorname{rank} P_{M^*} = m - r =: \mu$. Further, by P_M^ν denote an $n \times \nu$ matrix whose columns are ν linearly independent columns of the matrix P_M; $P_{M^*}^\mu$ is a $\mu \times m$ matrix whose rows are μ linearly independent rows of P_{M^*}; $\big(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_\nu(x)\big) = \big(K_t^{\{n-1\}}(x,a), \ldots, K_t^{\{1\}}(x,a), K(x,a)\big)P_M^\nu$ is the full system of ν linearly independent solutions of the homogeneous $(f=0, \eta_k=0)$ BVP $\mathcal{P}_0$. The following theorem gives a solvability criterion of the generating BVP $\mathcal{P}_0$.

Theorem. *Suppose the conditions (A)—(C) hold. If* $\operatorname{rank} M = r$, *then the homogeneous BVP* $\mathcal{P}_0$ *has exactly* ν *linearly independent solutions in the space* $AC[a,b]$ *of absolute continuous functions on* $[a,b]$. *The nonhomogeneous BVP* $\mathcal{P}_0$ *is solvable if and only if* $g \in BV^+[a,b]$ *and* $\eta_k \in \mathbb{R}$ $(k=\overline{1,m})$, *satisfy the condition*

$$P^{\mu}_{M^*}\bigl(\eta_1 - l_1 y_g(\cdot), \eta_2 - l_2 y_g(\cdot), \ldots, \eta_m - l_m y_g(\cdot)\bigr)^T = 0, \tag{3}$$

where $y_g(x) = \displaystyle\int_a^b \Phi(x,t)dg(t)$ *and* $\Phi(x,t) = \frac{\operatorname{sign}(x-t)}{2}K(x,t)$. *In this case, the BVP* $\mathcal{P}_0$ *possesses the* ν*-parameter family of solutions*

$$y(x,c) = \sum_{i=1}^{\nu} \varphi_i(x)c_i + \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-1} K_t^{\{l\}}(x,a)m^+_{n-l,k}\eta_k + (Gg)(x), \tag{4}$$

where $c \in \mathbb{R}^{\nu}$, $(Gg)(x)$ *is a generalized Green operator acting upon an arbitrary function* $g \in BV^+[a,b]$ *as follows* $(Gg)(x) = \left[1 - \sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{l=0}^{n-1} K_t^{\{l\}}(x,a)m^+_{n-l,k}l_k\right]y_g(x)$. *A necessary and sufficient condition for solution* (4) *to be unique is* $P^{\nu}_M = 0$.

Solvability criterion (3) enables us to propose a method of the regularization of a BVP that is solvable not everywhere. Consider the weakly perturbed BVP $\mathcal{P}_\varepsilon$. Suppose the generating BVP $\mathcal{P}_0$ is unsolvable for some $g \in BV^+[a,b]$ and $\eta_k \in \mathbb{R}$ $(k=\overline{1,m})$. This means that the analysed case is critical, and solvability criterion (3) does not hold for the generating BVP $\mathcal{P}_0$. It is of interest to analyse whether it is possible to make this problem solvable by means of linear perturbations and, if this is possible, then of what kind should the perturbations $\omega(x)$ and $\tilde{l}_k$ $(k=\overline{1,m})$ be. In this critical case, with the help of the $\mu \times \nu$ matrix $Q = P^{\mu}_{M^*}\bigl[\tilde{M} - \Omega\bigr]P^{\nu}_M$, where $\tilde{M} = \left(\tilde{l}_k K_t^{\{n-l\}}(\cdot,a)\right)^{l=\overline{1,n}}_{k=\overline{1,m}}$ and $\Omega = \left(l_k \displaystyle\int_a^b K_t^{\{q-j\}}(\cdot,s)d\omega(s)K_t^{[p-i]\{n-l\}}(s,a)\right)^{l=\overline{1,n}}_{k=\overline{1,m}}$, we obtain constructive condition for the emergence of solutions of the BVP $\mathcal{P}_0$ and construct an iterative procedure for finding these solutions in the form of Laurent series in powers of a small parameter ε containing one term with a negative power of ε.

[1] Бобик О.І., Боднарчук П.І., Пташник Б.Й., Скоробогатько В.Я. Елементи якісної теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними. – К.: Наукова думка, 1972.

[2] Тацій Р.М., Стасюк М.Ф., Мазуренко В.В., Власій О.О. Узагальнені квазідиференціальні рівняння. – Дрогобич: Коло, 2011.

[3] Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized Inverse Operators and Fredholm Boundary–Value Problems. VSP, Utrecht, Boston, 2004.

e-mail: viktor.mazurenko@pu.if.ua

Local derivations on subalgebras of compact operators with respect to semi-finite von Neumann algebras

Nurjanov B.O.
Karakalpak state university named after Berdakh

Let $\mathcal{A}$ be an algebra over the field complex number. A *derivation* $D : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ is a linear operator satisyfing the identity $D(xy) = D(x)y + xD(y)$ for all $x, y \in \mathcal{A}$ (the Leibniz rule). Recall that a linear operator Δ on an algebra $\mathcal{A}$ is called a *local derivation* if given any $x \in \mathcal{A}$ there exists a derivation $D : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ (depending on x) such that $\Delta(x) = D(x)$.

The notion of local derivations was introduced independently by D. Larson and A. Sourour [1] and R. Kadison [2]. The main purpose in the study of local derivations is to find the conditions which imply that a local derivation is a derivation.

It is well-known that one of the important concepts in the theory of operator algebras is compact operators with respect to von Neumann algebras. Compact operators with respect to a von Neumann algebra were defined and studied by Breuer [3].

Let $B(H)$ be the $*$-algebra of all bounded linear operators on a Hilbert space H, and let $\mathbf{1}$ be the identity operator on H. Consider a von Neumann algebra M on H, i. e. a weakly closed $*$-subalgebra in $B(H)$ containing the operator $\mathbf{1}$ and denote by $\|\cdot\|$ the operator norm on M. Denote by $P(M) = \{e \in M : e = e^2 = e^*\}$ the lattice of all projections in M and $P_{fin}(M) = \{e \in P(M) : e \text{ is finite}\}$.

Recall that an operator $x \in M$ is *compact* with respect to M, if it is the limit in the norm of finite operators in M, i.e., of operators for which the relative dimensionality of the closure of the range is finite. Denote by $C(M)$ the set of all compact operators with respect to the von Neumann algebra M.

The $*$-sublagebra $\mathcal{A} \subset C(M)$ is said to be *solid*, if $x \in \mathcal{A}$ and $y \in C(M)$, $|y| \leq |x|$ implies $y \in \mathcal{A}$.

Theorem 1. *Let M be a semi-finite von Neumann algebra. Suppose that $\mathcal{A}$ is a solid $*$-subalgebra in $C(M)$ such that $e \in \mathcal{A}$ for all $e \in P_{fin}(M)$. Then every local derivation Δ on the algebra $\mathcal{A}$ is a derivation.*

[1] Larson D. R., Sourour A. R. Local derivations and local automorphisms of $B(X)$ // Proc. Sympos. Pure Math. 51. Providence, Rhode Island. – 1990, V. 2. – P. 187–194.
[2] Kadison R. V. Local derivations // J. Algebra. – 1990, V. 130. – P. 494–509.
[3] Breuer M. Fredholm theories in von Neumann algebras. I. // Math. Ann. – 1968, V. 178. – P. 243–254.

e-mail: nurjanov@list.ru

Nonlinear numerical methods for the solution of initial value problem for ordinary differential equations

Pelekh Ya.M.
Lviv Polytechnic National University
Konyk I.V., Royko Yu.Ya.
Lviv Polytechnic National University

A mathematical modelling is the effective method of study of physical processes, in many important cases allows to replace the real process, and also gives an opportunity to get both quality and quantitative picture of the designed process. As exact solutions of the investigated models can be got only in very partial cases, then it is necessary to use numerical methods. At planning of radio electronic charts, automatic control systems, calculations of dynamics of the mechanical systems, kinetics of chemical reactions etc. there is a necessity not only to find the numeral solutions of such models but also research of the assured estimations of their closeness to the exact solutions.

A new applications of continued fractions to the development of numerical methods for the solution of differential equations are considered. The continued fractions at corresponding conditions give high-rate to convergence of algorithms, bilateral and monotonous approximations, own a weak sensitiveness to the errors of rounding off. A process of calculation of the continued fractions is cyclic and easily programed.

A problem of construction of methods and algorithms of receipt of the bilateral approximation is for adequate mathematical description of physical processes that are based on the continued fractions and that allow in every at each point of integration to get approximate to the exact solution with surplus and shortage is the actual scientifically-applied problem of mathematical modelling.

A research object is nonlinear numerical methods for the solution of differential equations. The purpose of the study is to develop methods and algorithms to build computational methods for the numerical solution of the Cauchy problem for ordinary differential equations.

The nonlinear formulas of Runge-Kutta of the third order of accuracy for the solution of Cauchy problem for ordinary differential equations, that are based on continued fractions, are constructed.

A characteristic feature of these algorithms is the fact that for certain values of the parameters it is possible to obtain both new and traditional numerical methods for the solution of the Cauchy problem for ordinary differential equations. The new bilateral numeral methods of first and the second order of accuracy for the solution of Cauchy problem for ordinary differential equations are constructed. By means of this numerical methods it is possible to obtain on each step of integration not only upper and lower approximations to the exact solution, but also information concerning the magnitude of the leading term of the error without the need for additional calculations in right side of the differential equation.

e-mail: pelekh_ya_m@ukr.net

About coefficients of hybrid symmetric square L-functions

Savastru O.V.
I. I. Mechnikov Odessa National University

Let $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_f(n) e^{2\pi i n z}$ be a holomorphic cusp form of even weight $k \geq 12$ for the full modular group $SL(2, \mathbb{Z})$, $z \in H$, $H = \{z \in \mathbb{C} | Im(z) > 0\}$ is the upper half plane. We suppose that $f(z)$ is a normalized eigenfunction for the Hecke operators $T(n) (n \geq 1)$ with $\lambda_f(1) = 1$. For prime p we have

$$\lambda_f(p) = \alpha_p + \overline{\alpha_p}, \quad \alpha_p \cdot \overline{\alpha_p} = 1.$$

In [2], Shimura introduced the symmetric square L-function $L(s, sym^2 f, \chi)$ attached to f:

$$L(s, sym^2 f, \chi) := \prod_p (1 - \alpha_f^2(p)\chi(p)p^{-s})(1 - \chi(p)p^{-s})^{-1} \times (1 - \overline{\alpha}_f^2(p)\chi(p)p^{-s})$$

for an arbitrary primitive Dirichlet character χ mod d, $\operatorname{Re} s > 1$.

We have

$$L(s, sym^2 f, \chi) = L(2s, \chi^2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_f(n)^2 \chi(n)}{n^s} := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n \chi(n)}{n^s},$$

where $L(2s, \chi^2)$ is the Dirichlet L-function associated with χ^2.

Fomenko [1] investigated sum of coefficients of symmetric square L-function associated with a cusp form and a trivial character. We considered non-trivial case and proved the following theorem.

Theorem 1. *Let $X > 1$ be a real number. Then for every $\epsilon > 0$ and for any fixed ρ, $0 \leq \rho \leq 1$, we have*

$$\int_0^X |\Delta_\rho(t, sym^2 f, \chi)|^2 dt = C X^{\frac{4}{3}\rho + \frac{5}{3}} + O(X^{\rho + \frac{5}{3} + \epsilon} d^{2(\rho+1)+\epsilon}),$$

where

$$C = d^{2\rho+1} 2^{-2\rho-1} \pi^{-2\rho-2} (4\rho + 5)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n^2}{n^{\frac{2}{3}\rho + \frac{4}{3}}}.$$

[1] Fomenko O.M. The behavior of Riesz means of the coefficients of a symmetric square L-function // Journal of Mathematical Sciences. – 2007. – V. 143 – No. 3. – P. 3174–3181.

[2] Shimura G. On the holomorphy of certain Dirichlet series // Proc. London Math. Soc. – 1975. – V. 31. – P. 79–98.

e-mail: savolga777@gmail.com

Model of Personal Autonomy and Legal Equilibrium for Containment Theory in Criminology

Sheliazhenko Y.
KROK University of Economics and Law

Since the law includes algorithmic regulation of human behavior in a way that addresses individuals that are subject to law as capable to reasonable actions in a way that respects their autonomy [1], effective and accountable legal regulation needs robust computation based on dependable mathematical modeling to understand and predict behavior of person as a subject to law.

An autonomous person in the society is an agent who directs and determines the course of own life taking the costs and the benefits of own choices [2]. For example, in the criminal law principle of individual autonomy means that each individual should be treated as responsible for own behavior [3].

In the previous paper [4] author was proposed the linear model of personal autonomy to display a relation between the freedom as an amount of agent's action and responsibility as an amount of legal reaction. The model is a diagram in the first quadrant of a Cartesian plane with a graph of rights depicting emergence of responsibility, caused by exercise freedom, and a graph of duties depicting freedom of taking inevitable responsibility. Also, there were proposed to call the legal equilibrium the state of balanced rights and duties, similarly to economic equilibrium point of balance on well-known supply and demand diagram. This approach was illustrated by the taxpayer autonomy model, where freedom and responsibility were measured in financial amounts of income and tax, and also suggested that action and reaction can be calculated in other values than money.

Question. *How to build a model of personal autonomy where action and reaction are temporal variables, for example, a time spent on crime and punishment?*

Our answer to the question is based on containment theory assuming that every person is restrained from illegal and criminal behavior by containment structure, both inner (self-control, strong ego, legal conscience, sense of responsibility. . .) and outer (social control, opportunities, restrictions, punishments. . .) [5].

Let t is any time of life for freedom axis, $t \in [0, 1]$ seeing human have one life, $L(t) \geq 0$ is a time of lawful behavior and $U(t) \geq 0$ is time of unlawful behavior:

$$L(t) + U(t) = t \qquad (1)$$

To model personal autonomy and to calculate legal equilibrium in inner and outer containment, let's define:

1) Two pairs of responsibility functions $R(t)$, $D(t)$ of free time spent t as time needed for obligatory behavior to enjoy the rights, in case of $R(t)$, or fulfill the duties, in the case of $D(t)$;

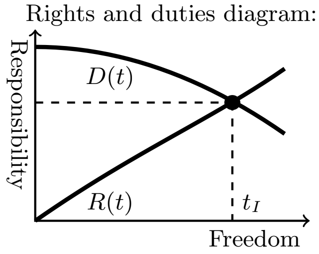
2) Inner containment function $I(t_c)$, designed to prolong responsible behavior, for example, with remorse for time of engagement in crime t_c;

3) Outer containment function $O(t_c)$, designed to reduce time spending on misbehavior, for example, by a term of punishment for criminal activity time t_c.

Inner containment model:

$$\begin{cases} R(t) = L(t) + I(U(t)) \\ D(t) = 1 - U(t) \end{cases}$$

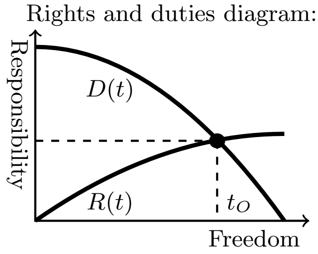
Rights and duties diagram:



Outer containment model:

$$\begin{cases} R(t) = L(t + O(U(t))) \\ D(t) = 1 - U(t + O(U(t))) \end{cases}$$

Rights and duties diagram:



Theorem 1. *For the time of legal equilibrium in inner containment model $t_I : R(t_I) = D(t_I)$ and for the time of legal equilibrium in outer containment model $t_O : R(t_O) = D(t_O)$ there are $I(U(t_I)) = 1 - t_I$ and $O(U(t_O)) = 1 - t_O$.*

Proof. Accordingly to the inner containment model equations:

$$L(t_I) + I(U(t_I)) = R(t_I) = D(t_I) = 1 - U(t_I) \Rightarrow I(U(t_I)) = 1 - L(t_I) - U(t_I) \quad (2)$$

Similarly, for the outer containment model equations:

$$L(t_O + O(U(t_O))) = R(t_O) = D(t_O) = 1 - U(t_O + O(U(t_O))) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow L(t_O + O(U(t_O))) + U(t_O + O(U(t_O))) = 1 \quad (3)$$

Applying rule (1) to (2) and (3), $I(U(t_I)) = 1 - t_I$ and $t_O + O(U(t_O)) = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow O(U(t_O)) = 1 - t_O$. A theorem is proved. □

Theorem 2. *Legal equilibrium time in outer containment does not exceed similar time in inner containment $t_O \leq t_I$ if inner containment does not exceed outer $I(t) \leq O(t)$ and $U(t)$, $O(t)$ are monotonically increasing in interval $t \in [0, 1]$*

Proof. Let's assume the opposite $t_O > t_I$ is true, then $O(U(t_O)) > O(U(t_I))$, so $1 - t_O = O(U(t_O)) > O(U(t_I)) >= I(U(t_I)) = 1 - t_I$ and finally $t_I > t_O$, so the assumption is wrong and a theorem is proved. □

[1] Hildebrandt M. Algorithmic regulation and the rule of law // Philosophical Transactions of the Royal Society A. – 2018. – V. 376, No 2128. – Pp. 20170355-20170358. – DOI: 10.1098/rsta.2017.0355

[2] Oshana M. Personal Autonomy in Society. – Abingdon:Routledge, 2006. – 204p.

[3] Ashworth A., Horder J. Principles of Criminal Law. – Oxford: Oxford University Press, 2013. – 542 p.

[4] Sheliazhenko Y. Computer Modeling of Personal Autonomy and Legal Equilibrium // Advances in Intelligent Systems and Computing. – 2018. – V. 765. – Pp. 74-81. – DOI: 10.1007/978-3-319-91192-2_8. – arXiv: 1808.05379

[5] Adler F. et al. Criminology. – Boston: McGraw-Hill, 2001. – 508 p.

e-mail: yuriy.sheliazhenko@gmail.com

Approximative characteristics of the classes $L^{\psi}_{\beta,p}$ of periodic functions in the space L_1

Shkapa V.
State University of Telecommunications
Vlasyk H.
State University of Telecommunications

The paper is devoted to the study of the approximation of periodic functions of one variable of the classes $L^{\psi}_{\beta,p},\ 1 < p < \infty$ in the space L_1 [1].

Let B be the set of functions ψ satisfying the following conditions: 1) ψ are positive and nonincreasing; 2) exists a constant $C > 0$ such that $\frac{\psi(t)}{\psi(2t)} \le C,\ t \in \mathbb{N}$.

Let L_1 be the space of 2π-periodic functions f with the usual norm. We denote by

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_1 = \sup_{f \in L^{\psi}_{\beta,p}} \inf_{\Theta_m} \inf_{T(\Theta_m,\cdot)} \|f(\cdot) - T(\Theta_m,\cdot)\|_1,$$

$$e^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_1 = \sup_{f \in L^{\psi}_{\beta,p}} \inf_{\Theta_m} \|f(\cdot) - S_{\Theta_m}(f,\cdot)\|_1$$

the best m-term and orthogonal trigonometric approximations of the classes $L^{\psi}_{\beta,p}$, where $T(\Theta_m, x) = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k e^{in_k x}$, $S_{\Theta_m}(f,x) = \sum\limits_{k=1}^{m} \hat{f}(n_k) e^{in_k x}$, $\Theta_m \subset \mathbb{N}$ — a finite set containing m elements, c_k — complex numbers and $\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$ — Fourier coefficients of f.

We prove the following

Theorem 1. *Let $1 < p < \infty,\ \psi \in B,\ \beta \in \mathbb{R}$. Then the following estimate is true*

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_1 \asymp e^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_1 \asymp \psi(m).$$

[1] Stepanets A.I. Classification and Approximation of Periodic Functions. – London, 1995.

e-mail: vshkapa@ukr.net, annawlasik@gmail.com

Some applications of the operator calculus for Gevrey ultradistributions

Solomko A.
Vasyl Stefanyk Precarpathian National University

In the article [1] we constructed a vector analogue of operator calculus for generators of strongly continuous n-parametric semigroups of operators in the convolution algebra of Gevrey ultradistributions with supports in the positive n-dimensional cone.

We define the vector space $G \equiv G(\mathbb{R}^n)$ of ultradifferentiable Gevrey functions with compact supports. Denote that the space G is a topological multiplication algebra. The linear and continuous functionals on the space G are named by Gevrey ultradistributions and denote by $G' \equiv G'(\mathbb{R}^n)$. Let $G'_+ \equiv G'(\mathbb{R}^n_+)$ is subspace in G' of ultradistributions with supports in cone $\mathbb{R}^n_+$. We introduce the topology of inductive limit on the space $G(\mathbb{R}^n_+, X) = \bigcup\limits_{\nu \succ 0} G_\nu(\mathbb{R}^n_+, X)$, where $(X, \|\cdot\|)$ – Banach space. Further we denote $G_+(X) \equiv G(\mathbb{R}^n_+, X)$. Let $U : \mathbb{R}^n_+ \ni s \to U_s \in L[G_+]$ is n-parametric semigroup of shifts along the cone $\mathbb{R}^n_+$. We define the cross-correlation operation of functional $f \in G'_+$ with function $\varphi \in G_+$ by formula $(f \bullet \varphi)(t) = \langle f(s), U_s\varphi(t)\rangle$, where $t, s \in \mathbb{R}^n_+$. The linear mapping $T_f : G_+ \ni \varphi \to f \bullet \varphi \in G_+$ be an operator of cross-correlation.

The main result of our reseach is the next theorem.

Theorem. *Let $\mathbb{R}^n_+ \ni t \to e^{-itA} \in L(X)$ be a n-parametric strongly continuous semigroup of operators with generator $-iA$. The mapping $\Phi : G'_+ \ni f \to \widehat{f}(A) \in L[\widehat{G}_A]$, where the linear operator $\widehat{f}(A)$ is defined by relation:*

$$\widehat{f}(A) : \widehat{G}_A \ni \widehat{x}_A \to \widehat{f}(A)\widehat{x}_A = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \left(e^{-itA} \otimes T_f\right) x(t)dt,$$

is continuous homomorphism of convolution algebra of Gevrey ultradistributions onto closed subalgebra of algebra $L[\widehat{G}_A]$.

Denote that in the previous theorem we used the same designations as in [1].

This theorem determines operator calculus for convolution algebra of Gevrey ultradistributions. For constructed operator calculus we consider examples of calculation Dirac function for generator of n-parametric strongly continuous semigroups of operators and solve the problem of representation of multiplicative powers and derivatives for Dirac function from the generator of the semigroup of fractional integration.

[1] Solomko A. Operator calculus for Gevrey ultradistributions and its applications // Information Technology in Selected Areas of Management. AGH University of Science and Technology Press. Krakow, 2016. – P. 135–141.

e-mail: ansolvas@gmail.com

Localized peaking regimes for quasilinear parabolic equations

Yevgenieva Ye.
Institute of Applied Mathematics and Mechanics NAS of Ukraine

Let $\Omega \subset R^n$ be a bounded domain such that $\partial\Omega \in C^2$. The following initial problem for a quasilinear parabolic equation is considered in cylindrical domain $Q = (0, T) \times \Omega,\ 0 < T < \infty$:

$$(|u|^{q-1}u)_t - \Delta_p(u) = 0, \quad p \geq q > 0, \tag{1}$$

$$u(0, x) = u_0(x) \ \text{ in } \Omega, \ \ u_0 \in L^{q+1}(\Omega), \tag{2}$$

We consider a class U_F of all weak solutions u of the problem (1)–(2) with a singular peaking time $t = T$, namely:

$$\mathcal{E}^{(u)}(t) := \int_\Omega |u(t, x)|^{q+1} dx + \int_0^t \int_\Omega |\nabla_x u(\tau, x)|^{p+1} dx d\tau \leqslant F(t) \quad \forall t < T, \tag{3}$$

where F is an arbitrary nonincreasing function such that

$$F(t) \to \infty \quad \text{as} \quad t \to T.$$

The function F from different classes with different character of singular peaking was considered. Depending on the relation between p and q from (1) and on the form of the function F, precise estimates of the profile of weak solutions of the problem (1)–(3) has been obtained (see [1] and [2]).

Moreover in the paper [1] an important application of these results was described for the case $p = q$. Namely, the following problem for a quasilinear parabolic equation of diffusion – nonlinear degenerate absorption type was considered:

$$(|u|^{p-1}u)_t - \Delta_p(u) = -b(t, x)|u|^{\lambda-1}u \quad (t, x) \in Q, \ \lambda > p > 0, \tag{4}$$

$$u = \infty \quad \text{ on } (0, T) \times \partial\Omega \cup \{0\} \times \Omega. \tag{5}$$

Here $b(t, x)$ (the absorption potential) is a continuous function in $[0, T] \times \overline{\Omega}$ such that $b(t, x) > 0$ in $[0, T) \times \overline{\Omega}$, $b(t, x) = 0$ on $\{T\} \times \Omega$. So the asymptotic behavior of a class of large solutions (in the sense of condition (5)) of equation (4) was studied in [1].

This research was supported by the Project 0117U006353 from the Department of Targeted Training of T. Shevchenko National University of Kyiv at the NASU.

[1] Shishkov A., Yevgenieva Ye. Localized peaking regimes for quasilinear parabolic equations // Mathematische Nachrichten. – 2018. – 25 p.
See also https://arxiv.org/abs/1802.03717

[2] Yevgenieva Ye. Limiting profile of solutions of quasilinear parabolic equations with flat peaking // Journal of Mathematical Sciences. – 2018. – V. 234, No. 1. – P. 106–116.

e-mail: yevgeniia.yevgenieva@gmail.com

Іменний покажчик

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

VI ВСЕУКРАЇНСЬКА МАТЕМАТИЧНА КОНФЕРЕНЦІЯ ІМЕНІ Б. В. ВАСИЛИШИНА

"НЕЛІНІЙНІ ПРОБЛЕМИ АНАЛІЗУ"

(26 – 28 вересня 2018 року, Івано-Франківськ – Микуличин)

ТЕЗИ ДОПОВІДЕЙ

Комп'ютерна верстка *В. Мазуренко*
Коректори *Т. Гой, О. Махней, І. Савка*

Підписано до друку 21.09.2018 р.
Формат 60x84/16. Папір офсетний. Гарнітура "Computer Modern".
Ум. друк. арк. 5,37. Наклад 100. Зам. № 74 від 21.09.2018 р.

Друк: підприємець Голіней О. М.
76008, м. Івано-Франківськ, вул. Галицька, 128.
Тел.: (0342)58-04-32, +38 050 540 30 64