Федак І.В.

ІІІ етап Всукраїнської олімпіади з математики

(*2019 рік, І тур, достатній рівень*)

20 січня 2019 року відбувся І тур ІІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики. Вперше для достатнього та середнього рівнів МОН були запропоновані тривіальні задачі з номером 0, до всіх з яких правильною відповіддю був пункт а). Наводимо умови та вказівки до розв'язування інших задач достатнього рівня. З умовами завдань всіх рівнів та авторськими розв'язаннями можна ознайомитися на сайті http://matholymp.com.ua.

Умови задач

7 клас

0. Пара цілих чисел (x, y) задовольняє рівність $(x-1)^2 + y^2 = 0$. Яке значення може набувати число y:

а) 0; ***б)*** 10; ***в)*** 100; ***г)*** 2019?

(В роботі треба написати лише пункт правильної відповіді без пояснень).

1. Чи існує пара правильних нескоротних дробів, різниця яких дорівнює їх добутку і знаменник одного з яких дорівнює 2019? Якщо існує, то знайдіть принаймні дві пари таких дробів.

2. З точки O проти руху годинникової стрілки проведені n променів $OA_1, OA_2, \dots, OA_n$, при цьому $\angle A_1OA_n < 180^{\mathrm{O}}$. Для якого найменшого n могло статися, що серед кутів $\angle A_iOA_j, 1 \le i < j \le n$, буде пара кутів величиною 60^{O}, пара кутів величиною 45^{O} та пара кутів величиною 30^{O}.

3. Натуральні числа a, b, c, d задовольняють умову $a < b < c < d$. Чи може найменше спільне кратне чисел a та b бути більшим найменшого спільного кратного чисел c та d?

4. У виразі $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \dots \pm 2018$ Андрій обирає один із знаків перед кожним числом. Скільки різних додатних значень може при цьому вийти як результат обчислення значення виразу з обраними знаками?

8 клас

0. Пара цілих чисел (x, y) задовольняє рівність $(x-1)^4 + y^4 = 0$. Яке значення може набувати число y:

а) 0; ***б)*** 100; ***в)*** 1000; ***г)*** 2019?

(В роботі треба написати лише пункт правильної відповіді без пояснень).

1. Розглянемо на декартовій площині сукупність прямих $y = (k+n)x + k - n$, де k, n – довільні цілі числа. Чи існує точка з цілими координатами, через яку не пройде жодна з таких прямих?

2. На дошці записане число 2019. Катя та Микола по черзі (розпочинає Катя) роблять такі ходи: вони вибирають будь-який дільник d записаного на дошці числа N і записують на дошці замість числа N число $N-(2d-1)$, якщо воно є натуральним. Програє той, хто напише на дошці число 1. Хто може перемогти у цій грі, якщо кожний прагне перемогти?

3. У трикутнику ABC відомо, що $2AC = AB$ та $\angle A = 2\angle B$. У цьому трикутнику провели бісектрису AL і позначили точку M – середину сторони AB. Виявилося, що $CL = ML$. Доведіть, що $\angle B = 30^{\mathrm{O}}$.

4. Яке найменше значення набуває вираз $x^6 + x^4y^2 + x^2y^4 + y^6$, якщо добуток дійсних чисел x, y дорівнює 1?

5. Задача 4 за 7 клас.

9 клас

0. Чому дорівнює в градусах величина найменшого кута прямокутного трикутника, якщо один з його кутів дорівнює 60^{O}:

а) 30^{O}; ***б)*** 90^{O}; ***в)*** 180^{O}; ***г)*** 2019^{O}?

(В роботі треба написати лише пункт правильної відповіді без пояснень).

1. Розглянемо на декартовій площині сукупність парабол $y = kx^2 + (k-n)x + k + n$, де k, n – довільні цілі числа. Чи існує точка з цілими координатами, через яку не пройде жодна з таких парабол?

2. У прямокутному трикутнику ABC довжини катетів задовольняють умову $BC = \sqrt{2}AC$. Доведіть, що медіани AN та CM перпендикулярні.

3. На довгій паперовій смужці без пробілів записані одне за одним три числа 2^{100}, 3^{100} та 5^{100} так, що утворилося багатоцифрове число N. Арсеній стверджує, що може замінити останню цифру числа N так, що утвориться степінь числа 13. Чи правда це?

4. Для додатних чисел x, y, z, a, b, c, які задовольняють умову $x+y+z=a+b+c$, доведіть нерівність

$$\frac{x}{a+b}+\frac{y}{b+c}+\frac{z}{c+a}+\frac{a}{x+z}+\frac{b}{x+y}+\frac{c}{y+z}>2.$$

5. У виразі $\pm1\pm2\pm2^2\pm2^3\pm\ldots\pm2^{2019}$ Андрій обирає один із знаків перед кожним числом. Скільки різних додатних значень може при цьому вийти як результат обчислення значення виразу з обраними знаками?

10 клас

0. Чому дорівнює в градусах величина найменшого кута паралелограма, якщо один з його кутів дорівнює 150^{O}:

а) 30^{O}; ***б)*** 180^{O}; ***в)*** 360^{O}; ***г)*** 2019^{O}?

(В роботі треба написати лише пункт правильної відповіді без пояснень).

1. Розв’яжіть рівняння $\dfrac{\sqrt{x}+2}{\cos 2x+3}=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\cos 2x+1}$.

2. На дошці записане число 2019. Катя та Микола по черзі (розпочинає Катя) роблять такі ходи: вони вибирають будь-який дільник d записаного на дошці числа N і записують на дошці замість числа N число $N-(4d-1)$, якщо воно є натуральним. Програє той, хто не зможе зробити хід за правилами. Хто може перемогти у цій грі, якщо кожний прагне перемогти?

3. Назвемо прямокутний трикутник ABC *особливим*, якщо довжини всіх його сторін є цілими числами та на кожній зі сторін є така точка X, відмінна від вершин трикутника ABC, для якої довжини відрізків AX, BX та CX – цілі числа. Знайдіть принаймні один особливий трикутник.

4. Скількома способами можна покрити квадрат 4×4, що складається з 16 квадратиків 1×1, п'ятьма прямокутниками 3×1 так, щоб рівно один квадратик 1×1 лишився непокритим?

5. Для додатних чисел x, y, z, t доведіть нерівність

$$\frac{x^8+1}{x^4}+\frac{y^8+1}{y^4}+\frac{z^8+1}{z^4}+\frac{t^8+1}{t^4}\ge 2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{t}+\frac{t}{x}\right).$$

11 клас

0. Скільки усього вершин у правильній 2018-кутній піраміді:

а) 2019; ***б)*** 19; ***в)*** 10; ***г)*** 2?

(В роботі треба написати лише пункт правильної відповіді без пояснень).

1. Знайдіть усі розв'язки рівняння $\dfrac{2\cos 2x}{6-3\cos 3x}=\dfrac{\cos 2x+1}{\cos 3x+2}$,

якщо $-\pi\le x\le\pi$.

2. У гострокутному трикутнику ABC, в якому $AB<AC$, точка M – середина сторони BC, K – середина ламаної BAC. Доведіть, що $\sqrt{2}KM>AB$.

3. Розглянемо таблицю $m\times n,\ m\ge 2, n\ge 2$ (m рядків, що занумеровані числами $1, 2, ..., m$, та n стовпчиків, що занумеровані числами $1, 2, ..., n$), яка заповнена натуральними числами. Нехай b_i – НСК (найменше спільне кратне) усіх чисел, що стоять в i-му рядку, $1\le i\le m$, і визначимо число B – НСД (найбільший спільний дільник) чисел $\left(b_1, b_2, ..., b_m\right)$. Також нехай c_j – НСД усіх чисел, що стоять в j-му стовпчику, $1\le j\le n$, та визначимо число C – НСК чисел $\left(c_1, c_2, ..., c_n\right)$. Чи можна стверджувати, що обов'язково або B ділиться націло на C, або, навпаки, C ділиться націло на B?

4. Для додатних чисел x, y, z, добуток яких дорівнює 1, доведіть нерівність $\dfrac{x^6+2}{x^3}+\dfrac{y^6+2}{y^3}+\dfrac{z^6+2}{z^3}\ge 3\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}\right)$.

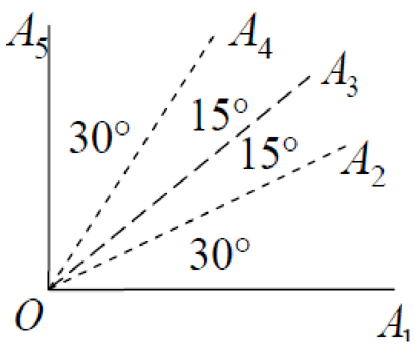
5. *Полігоном* назвемо зв'язну по стороні фігуру, що складається з квадратиків 1×1. Відомо, що прямокутник, відмінний від квадрата, можна розрізати на 8 попарно різних полігонів. Полігони вважаються однаковими, якщо їх можна сумістити шляхом зсувів, повертань чи перевертань. Яку найменшу площу може мати цей прямокутник?

Відповіді та вказівки до розв'язування задач

7.1. Враховуючи рівності $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}$, умову задачі задовольняють такі пари чисел: $\frac{1}{2018},\frac{1}{2019}$ та $\frac{1}{2019},\frac{1}{2020}$.

7.2. З умови задачі випливає, що проведені промені повинні попарно утворювати принаймні 6 кутів. Тому $n\geq4$.

Для $n=4$ таких кутів рівно 6. Якщо найбільший з них не дорівнює 60°, то решти п'яти кутів не вистачить для утворення трьох потрібних пар. А якщо він дорівнює 60°, то іншого кута величиною 60° не знайдеться. Отже, $n\geq5$. Приклад для $n=5$ наведений на малюнку справа.



7.3. Може. Для кожного натурального $n\geq3$ задовольняють такі четвірки чисел: $a=n, b=n+1, c=n+2, d=2n+4$. При цьому

$$НСК(a,b)-НСК(c,d)=n(n+1)-(2n+4)=(n+2)(n-3)+2>0.$$

Зокрема, для $n=3$ знайдемо числа $a=3, b=4, c=5, d=10$, для яких $НСК(a,b)=12>НСК(c,d)=10$.

7.4. Найбільшим значенням виразу, яке отримаємо у такий спосіб, є число $1+2+3+...+2018=1009\cdot2019=2037171$. Крім того, заміна будь-якого знака «+» на «–» зменшує значення виразу на парне число, тому розстановкою знаків вдасться отримувати лише непарні значення. Припустимо, що деяке непарне натуральне число, більше за 1, розстановкою знаків «+» на «–» ми отримали. Якщо при цьому перед 1 стоїть знак «+», то замінивши його на «–», зменшимо значення виразу на 2. Інакше, знайдемо першу зліва направо пару розташованих підряд знаків «–», «+», змінимо ці знаки на протилежні і знову ж зменшимо значення виразу на 2. (Це не вдасться зробити лише у випадку, коли всі виставлені знаки були «–», і значення виразу дорівнює –2037171). Звідси випливає, що у такий спосіб вдасться отримати як шукані додатні значення всі непарні натуральні числа від 1 до 2037171. Зрозуміло, що їх кількість дорівнює $2037172 : 2 = 1018586$.

8.1. Таких точок є навіть нескінченна кількість. Для всіх непарних $x = 2m + 1,\ m \in \mathrm{Z},$ отримуємо лише парні значення

$$y = (k+n)(2m+1) + k - n = 2(mk + mn + k).$$

Зокрема, покладаючи $m = 0$, отримаємо, що жодна з цих прямих не пройде через точку $(1;1)$.

8.2. Переможе Катя, якщо, наприклад, вона кожного разу вибиратиме дільник $d = 1$. Оскільки Микола також завжди матиме право вибрати $d = 1$, то поки числа N залишаються більшими за 1 в обох гравців буде можливість зробити хід за правилами. При цьому з кожним ходом записані натуральні числа N зменшуються, і після кожного ходу Каті на дошці буде записане парне число N, а після кожного ходу Миколи – непарне N. Звідси випливає, що записати на дошці число 1 буде змушений саме Микола.

8.3. З умови задачі випливає, що трикутник ALB є рівнобедреним (за рівними кутами при основі AB), в якому медіана LM буде водночас і висотою. Крім того, з рівності $AC = AM$ отримуємо, що $\Delta ACL = \Delta AML$ (за двома сторонами і кутом між ними). Тому кут ACL також прямий. Звідси, з врахуванням рівності $\angle A = 2\angle B$, отримуємо, що $\angle B = 30^{\circ}$.

8.4. З врахуванням рівності $xy = 1$ запишемо заданий вираз у вигляді $x^6 + x^2 + y^2 + y^6$ і скористаємося очевидними нерівностями $\left(x^3 - y^3\right)^2 \ge 0 \Leftrightarrow x^6 + y^6 \ge 2x^3y^3 = 2$, $(x-y)^2 \ge 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \ge 2xy = 2$, рівність в яких досягається для $x = y = 1$ та $x = y = -1$. Тому найменшим значенням заданого виразу є 4.

До цього ж результату приходимо й за нерівністю Коші:

$$x^6+x^4y^2+x^2y^4+y^6 \ge 4\cdot\sqrt[4]{x^6\cdot x^4y^2\cdot x^2y^4\cdot y^6}=4\cdot\left|x^3y^3\right|=4.$$

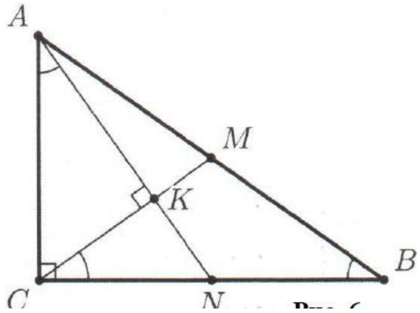
8.5. Див. розв'язання задачі 7.4.

9.1. Таких точок є навіть нескінченна кількість. Для всіх x вигляду $x=3m+1,\ m\in Z,$ отримуємо лише кратні трьом значення

$$y=k\left(3m+1\right)^2+\left(k-n\right)\left(3m+1\right)+k+n=3\left(3m^2k+3mk+k-mn\right).$$

Зокрема, покладаючи $m=0$, отримаємо, що жодна з цих парабол не пройде через точку $\left(1;1\right)$.

9.2. Оскільки $BC=\sqrt{2}AC$ та $BC=2NC$, то $AC=\sqrt{2}NC$. Тому $\Delta\ ACN \sim \Delta\ BCA$ (див. малюнок справа). Крім того, $\angle MCB=\angle MBC$, що випливає з рівності $MB=MC$.



Отже, $\angle AKC=\angle KCN+\angle KNC=\angle ABC+\angle BAC=90^{\mathrm{O}}$, що й треба було довести.

9.3. Спочатку проаналізуємо остачі від ділення на 3. Оскільки $2^{100}\equiv 1\left(\mathrm{mod}\,3\right)$, $3^{100}\equiv 0\left(\mathrm{mod}\,3\right)$, $5^{100}\equiv 1\left(\mathrm{mod}\,3\right)$, то $N\equiv 2\left(\mathrm{mod}\,3\right)$. Але $13^k\equiv 1\left(\mathrm{mod}\,3\right)$ для всіх натуральних k, тому останню цифру 5 числа N Арсеній міг замінити лише на 1, 4 або 7.

Тепер розглянемо остачі від ділення на 8. Маємо $13^k\equiv 5\left(\mathrm{mod}\,8\right)$ для непарних k та $13^k\equiv 1\left(\mathrm{mod}\,8\right)$ для парних k, а число N закінчується на 625, тобто $N\equiv 1\left(\mathrm{mod}\,8\right)$. Звідси випливає, що заміни останньої цифри 5 на 4 чи на 7 не задовольняють, а у разі заміни 5 на 1 показник степеня k повинен бути непарним.

Для останньої заміни досліджуємо остачі від ділення на 5. Оскільки при цьому $N-4\equiv 1\left(\mathrm{mod}\,5\right)$, а $13^k\equiv 1\left(\mathrm{mod}\,5\right)$ лише для k, кратних 4, то і в цьому випадку отримуємо суперечність.

Отже, слова Арсенія не можуть бути правдою.

9.4. Умова $x+y+z=a+b+c$ є зайвою. Вказана нерівність справджується незалежно від неї. Справді,

$$\frac{x}{a+b}+\frac{y}{b+c}+\frac{z}{c+a}+\frac{a}{x+z}+\frac{b}{x+y}+\frac{c}{y+z}>$$
$$>\frac{x}{a+b+c}+\frac{y}{a+b+c}+\frac{z}{a+b+c}+\frac{a}{x+y+z}+\frac{b}{x+y+z}+\frac{c}{x+y+z}=$$
$$=\frac{x+y+z}{a+b+c}+\frac{a+b+c}{x+y+z}\geq 2.$$

9.5. З нерівності
$$2^n=2+2+2^2+2^3+\ldots+2^{n-1}>1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{n-1} \quad (*)$$
випливає, що значення заданого виразу будуть додатними тоді і тільки тоді, коли перед 2^{2019} стоятиме знак «+». При цьому інші знаки можна розставити довільно.

Розглянемо два довільні різні утворені у такий спосіб вирази, значення яких є додатними, і визначимо для них найбільше n, для якого у цих виразах перед 2^n виставлені різні знаки. Якщо від обох з них відняти попарно рівні доданки зі степенями двійки, більшими за n, то внаслідок нерівності (*) отримаємо числа різних знаків. Звідси випливає, що всі отримувані при вказаних розстановках знаків додатні значення заданого виразу будуть різними.

Оскільки на решті 2019 позиціях перед степенями двійки від $1=2^0$ до 2^{2018} є по дві можливості вибору знаку, то остаточно зможемо отримати 2^{2019} різних додатних значень.

10.1. Запишемо задане рівняння у вигляді $\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}=\frac{\cos 2x+3}{\cos 2x+1}$ і поділимо в обох частинах чисельники на знаменники. В отриманій рівності $1+\frac{1}{\sqrt{x}+1}=1+\frac{2}{\cos 2x+1}$ її ліва частина не перевищує 2, а права – не менша за 2. Обидві вони дорівнюють 2 лише за умови $\sqrt{x}=0$ та $\cos 2x=1$. Звідси отримуємо єдиний розв'язок $x=0$.

10.2. Оскільки 2019 має лише прості дільники 3 та 673, то Катя першим ходом зможе вибрати тільки $d=1$ чи $d=3$, залишаючи Миколі числа $N=2016$ та $N=2008$ відповідно. А він, вибираючи відповідно $d=504$ чи $d=502$, залишає число 1 і перемагає уже своїм першим ходом.

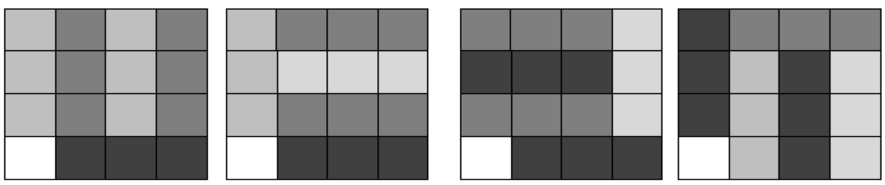
10.3. Розглянемо прямокутний трикутник ABC з катетами $AC = 8n$, $BC = 6n$ та гіпотенузою $AB = 10n$, де $n -$ натуральне число. Тоді на AB шуканою точкою X буде середина гіпотенузи, яка віддалена від кожної з вершин трикутника ABC на $5n$.

Виберемо на катетах AC та BC точки K та M відповідно такі, що $CK = 3k$, $CM = 4k$, де $k -$ деяке натуральне число, причому $1 \le k \le n$. Щоб відстані від вибраних точок до всіх вершин трикутника ABC були натуральними числами, достатньо, щоб суми $(3k)^2 + (6n)^2$ та $(4k)^2 + (8n)^2$ були квадратами натуральних чисел, тобто, щоб квадратом натурального числа була сума $k^2 + 4n^2$. Нескладно переконатися, що останню умову задовольняє, наприклад, пара чисел $k = 5, n = 6$. Тому прямокутний трикутник ABC з катетами $AC = 48$, $BC = 36$ та гіпотенузою $AB = 60$ є особливим.

10.4. Спочатку доведемо, що непокритою може залишитися лише кутова клітинка. Нехай, наприклад, такою залишилася не кутова клітинка першого стовпчика. Тоді інші клітинки цього стовпчика вдасться покрити лише горизонтальними плитками 3×1. Отже, і в рядку з непокритою клітинкою плитку 3×1 також треба покласти горизонтально. Але в такому разі не зможемо покрити клітинки четвертого стовпчика. Аналогічно доводимо для інших не кутових клітинок, які знаходяться на краю квадрата 4×4.

Якщо ж непокритою залишиться одна з чотирьох клітинок всередині квадрата 4×4, то клітинки над нею і під нею також доведеться покривати горизонтальними плитками 3×1. Але тоді не вдасться покрити принаймні одну з клітинок зліва чи справа від неї.

Нехай тепер непокритою залишилася ліва нижня клітинка квадрата 4×4. Для решти клітинок отримуємо 4 способи їх покриття плитками 3×1, зображені на малюнку нижче:



У трьох перших з них клітинки нижнього рядка покриті горизонтальною плиткою 3×1, а четвертий відповідає випадку, в якому ці клітинки покриваються вертикальними плитками.

Зрозуміло, що для інших непокритих кутових клітинок теж матимемо по 4 варіанти. Тому всього існує 16 різних способів.

10.5. Задана нерівність випливає з нерівності

$$2\left(\frac{x^8+1}{x^4}+\frac{y^8+1}{y^4}+\frac{z^8+1}{z^4}+\frac{t^8+1}{t^4}\right)=$$

$$=\left(x^4+\frac{1}{z^4}+z^4+\frac{1}{y^4}\right)+\left(y^4+\frac{1}{t^4}+t^4+\frac{1}{z^4}\right)+\left(z^4+\frac{1}{x^4}+x^4+\frac{1}{t^4}\right)+$$

$$+\left(t^4+\frac{1}{y^4}+y^4+\frac{1}{z^4}\right)\ge 4\cdot\sqrt[4]{x^4\cdot\frac{1}{z^4}\cdot z^4\cdot\frac{1}{y^4}}+4\cdot\sqrt[4]{y^4\cdot\frac{1}{t^4}\cdot t^4\cdot\frac{1}{z^4}}+$$

$$+4\cdot\sqrt[4]{z^4\cdot\frac{1}{x^4}\cdot x^4\cdot\frac{1}{t^4}}+4\cdot\sqrt[4]{t^4\cdot\frac{1}{y^4}\cdot y^4\cdot\frac{1}{z^4}}=4\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{t}+\frac{t}{x}\right).$$

11.1. Запишемо задане в умові рівняння у вигляді $\frac{2\cos 2x}{\cos 2x+1}=\frac{6-3\cos 3x}{\cos 3x+2}$ і поділимо в обох частинах чисельники на знаменники. В отриманій рівності $2-\frac{2}{\cos 2x+1}=-3+\frac{12}{\cos 3x+2}$ ліва частина не перевищує 1, а права – не менша 1, причому обидві вони дорівнюють 1 лише за умови $\cos 2x=1$ та $\cos 3x=1$. Оскільки $-\pi\le x\le\pi$, то звідси отримуємо єдиний розв'язок $x=0$.

11.2. Продовжимо CA поза точку A до точки E такої, що $AE=AB$. Тоді MK – середня лінія трикутника BAE. Проведемо промінь серединного перпендикуляра до BE, який проходить через точку A, і відкладемо на ньому точку P таку, що кут BPE – прямий. Тоді, оскільки кут BAE тупий, отримуємо потрібну нерівність $\sqrt{2}KM=\sqrt{2}\cdot\frac{BE}{2}=BP>AB$.

11.3. Нехай p – просте число, що є дільником принаймні одного числа, записаного в таблиці. Тоді в розклад на множники числа B воно входить у степені, який дорівнює найменшому із найбільших степенів p, обчислених по рядках таблиці. Для конкретності будемо вважати, що це є множник p^{β}, який є дільником деякого числа з рядка i_0.

Аналогічно в розклад на множники числа C воно входить у степені, який дорівнює найбільшому із найменших степенів p, обчислених по стовпчиках таблиці. Для конкретності вважаємо, що це є множник p^{γ}, який є дільником деякого числа зі стовпчика j_0.

Розглянемо тепер максимальний степінь δ, з яким p входить у розклад на множники числа таблиці на перетині рядка i_0 та стовпчика j_0. З умови задачі отримуємо, що $\gamma \le \delta \le \beta$.

Оскільки аналогічна нерівність справджується для всіх таких простих чисел p, то обов'язково B ділиться націло на C.

11.4. Оскільки $xyz = 1$, то $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} \ge 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x^3} \cdot \frac{1}{y^3} \cdot \frac{1}{z^3}} = 3$. Тому

$$\frac{x^6+2}{x^3} + \frac{y^6+2}{y^3} + \frac{z^6+2}{z^3} \ge$$

$$\ge \left(x^3 + \frac{1}{y^3} + 1\right) + \left(y^3 + \frac{1}{z^3} + 1\right) + \left(z^3 + \frac{1}{x^3} + 1\right) \ge$$

$$\ge 3 \cdot \sqrt[3]{x^3 \cdot \frac{1}{y^3} \cdot 1} + 3 \cdot \sqrt[3]{y^3 \cdot \frac{1}{z^3} \cdot 1} + 3 \cdot \sqrt[3]{z^3 \cdot \frac{1}{x^3} \cdot 1} = 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right).$$

11.5. Різних полігонів з площами 1 та 2 є по одному, з площею 3 – два, а з площею 4 – п'ять, то разом 8 різних полігонів можуть займати площу, не меншу за $1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 25$.

Оскільки за умовою задачі прямокутник не повинен бути квадратом, а прямокутник 25×1 доведеться викладати лише полігонами-прямокутниками $n \times 1$, сума площ перших восьми з яких дорівнює 36, то отримати мінімальну площу 25 не вдасться.

Приклад викладання вісьмома полігонами прямокутника 13×2 з площею 26 наведений на малюнку нижче: