**Завдання 1 – 8 XV обласного турніру юних математиків 2019-2020 н.р.**

1. На участь в турнірі юних математиків подали заявки 16 команд. Оргкомітет планує провести турнір у чотири тури так, щоб у кожному турі у чотирьох групах змагалися по чотири команди, причому жодні дві команди-учасниці не зустрічалися між собою більше одного разу. Чи вдасться йому реалізувати свій задум?
2. Миколка стверджує, що може вибрати на бічній стороні $BC$ рівнобедреного трикутника $ABC$, всі кути якого вимірюються цілим числом градусів, таку точку $E$, що $BE = AC$, і кут $AEC$ також вимірюється цілим числом градусів. Доведіть, що такий трикутник існує. Чи знайдеться не подібний до нього рівнобедрений трикутник з такими ж властивостями?
3. Висота $CH$, бісектриса $CK$ та медіана $CM$ трикутника $ABC$ ділять кут $C$ на чотири рівні частини. Знайдіть градусні міри всіх кутів такого трикутника.
4. Доведіть, що рівняння $x^2 - xy - y^2 = 20^2 + 20 \cdot 19 - 19^2$ має нескінченну кількість розв'язків у натуральних числах $x$ та $y$.
5. Вкажіть принаймні три пари взаємно простих натуральних чисел $a$ та $b$, для яких рівняння $x^4 - x^2y^2 - y^4 = a^4 + a^2b^2 - b^4$ має розв'язки у натуральних числах $x$ та $y$.
6. Знайдіть принаймні три четвірки натуральних чисел таких, що добуток будь-яких двох чисел кожної з четвірок, збільшений на 1, є квадратом натурального числа.
7. Для всіх натуральних чисел $n$ доведіть таку подвійну нерівність:
$$n^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}\right) < \frac{9}{8}n^2.$$
8. В шаховій партії за ходу білих виникла наступна позиція. Білі: Кр a1, пп. b5, b6, e4, e5, g3; чорні: Кр g8, пп. b7, e6, g4. З яким результатом закінчиться ця партія за правильної гри обох суперників?

***Примітка.*** Завдання 9 – 20 будуть розміщені на нашому сайті після оприлюднення задач XXII Всеукраїнського турніру юних математиків імені професора М.Й. Ядренка.