Завдання 1 – 10 XVI обласного турніру юних математиків 2020-2021 н.р.

1. Марійка та Миколка грають у таку гру. Спочатку Миколка називає деяке просте число p. Після цього Марійка записує на дошці натуральне число n. Тоді Миколка дописує до цього числа справа одну чи декілька цифр 3. Він виграє, якщо отримане таким чином число ділиться на p. В іншому разі – перемагає Марійка. Хто з них виграє, якщо обоє прагнуть перемогти?
2. Назвавши у попередній грі наугад декілька простих чисел, Миколка кожного разу поступився Марійці. Він вирішив не шукати причину поразок, а просто змінити правила гри. Тепер він записуватиме на дошці натуральне число n, а цифри 3 справа до цього числа нехай дописує Марійка і виграє, якщо у такий спосіб їй вдасться отримати складене число. В іншому разі – перемагає Миколка. Яке найменше натуральне число він може записати, щоб перемогти?
3. На площині розміщено 2020 точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Шість гравців по черзі з'єднують ці точки відрізками, кожний олівцем свого кольору. За один раз дозволяється з'єднати довільні дві точки, які ще не були з'єднаними. Виграє той, хто першим отримає трикутник з вершинами у заданих точках, усі сторони якого мають однаковий колір. Кожен гравець прагне перемогти і при цьому намагається завадити здобути перемогу своїм суперникам. Чи обов'язково за цих умов вдасться виявити переможця такої гри?
4. Натуральні числа x та y задовольняють умову $23+x^2=24y^2$. Доведіть, що множина усіх пар таких чисел є нескінченною.
5. Число 20 записали 16 разів поспіль. Подайте отримане у такий спосіб 32-цифрове число як суму квадратів двох натуральних чисел та обґрунтуйте правильність свого представлення.
6. Назвемо елемент $k\in\left\{2^{20},\,2^{20}+1,\,2^{20}+2,\,...,\,2^{21}-1\right\}$ *особливим*, якщо в його записі у двійковій системі числення рівно 16 цифр не дорівнюють жодній із сусідніх з ними цифрам. Доведіть, що кількість особливих елементів такої множини ділиться на 17.
7. Числа Фібоначчі визначаються рівностями: $F_1=F_2=1$, $F_{n+2}=F_n+F_{n+1},\ n\ge 1$. Доведіть, що
$$F_{17}>\sqrt{\frac{F_{15}F_{16}+1}{16}}+15\cdot\sqrt[16]{F_1F_2...F_{15}}\,.$$
8. Для довільних натуральних чисел $a,\,b,\,c,\,d$ розв'яжіть нерівність $x<\dfrac{ax+b}{cx+d}$.
9. У рівнобедреному трикутнику ABC з кутом 100° при вершині B вибрали точку M таку, що $\angle MAC=30^\circ$, $\angle MCA=20^\circ$. Знайдіть величину кута BMC.
10. Два кола дотикаються зовнішнім чином. Коло радіуса R дотикається до обох із них у двох різних точках, які лежать на прямій, що проходить через їхні центри. Коло радіуса r дотикається до кожного з трьох попередніх кіл. Яких значень може набувати при цьому відношення $\dfrac{r}{R}$?

Примітка. Завдання 11 – 20 будуть опубліковані на сайті https://mif.pnu.edu.ua/ після оприлюднення завдань XXIII Всеукраїнського турніру юних математиків імені професора М.Й. Ядренка на сайті http://tym.in.ua/ .