ІІІ відкрита олімпіада з математики для учнів 5 – 8 класів

5 клас

1. Учень йде до школи пішки, а назад повертається транспортом, витрачаючи на весь шлях пів години часу. Якщо б він в обидва боки їхав транспортом, то на весь шлях витратив би лише 10 хвилин. Скільки часу йому потрібно, щоб пройти цей шлях в обидва боки пішки?

Розв'язання. 50 хвилин. Справді, дорога транспортом в обидва боки займає 10 хвилин, тому в один бік вона займе 5 хвилин. Таким чином, на дорогу до школи учень витрачає $30-5=25$ хвилин і стільки ж часу йому буде потрібно, щоб повернутися пішки назад.

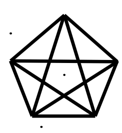
2. Миколка поділив порівну 5 однакових яблук між своїх шістьох товаришів, розрізавши кожне яблуко на рівні частини. Чи могло статися так, що жодне з яблук він не розрізував більше, ніж на 3 частини?

Розв'язання. Могло. Наприклад, якщо 3 яблука він розрізав пополам, а 2 яблука – на 3 рівні частини. Тоді кожен з друзів отримав по одній половині та одній третині яблука.

3. Серед 15 монет, однакових за зовнішнім виглядом, одна фальшива. Невідомо чи вона важча, чи легша, ніж решта монет. Як це з'ясувати, використавши лише два зважування на шалькових терезах без гир?

Розв'язання. Поділимо монети на 3 купки по 5 монет у кожній. Порівняємо маси перших двох купок. Якщо вони однакові, то фальшива монета у третій купці. Порівнюємо масу цієї купки з масою першої купки. Якщо вона менша, то фальшива монета легша. В іншому разі – важча. Якщо ж при першому зважуванні переважила одна з купок, то порівнюємо її масу з масою третьої купки. У випадку рівноваги фальшива монета легша. В іншому разі – вона важча.

4. На малюнку справа зображена фігура. Порахуйте кількість трикутників у цій фігурі.



Розв'язання. 35. Сторонами п'яти з них є сторона та дві діагоналі п'ятикутника, ще п'яти – дві сторони та одна діагональ, п'ятнадцяти –

сторона та частини двох діагоналей, п'яти – діагональ та частини двох інших діагоналей та ще п'яти – частини трьох діагоналей.

5. На дошці записані числа 1, 2, 3, …, 2020. Миколка підкреслив усі числа, які діляться на 3, потім – усі числа, які діляться на 5. Скільки чисел він підкреслив рівно один раз?

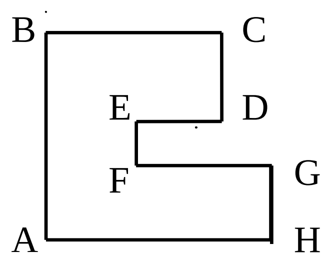
Розв'язання. 809 чисел. Рівно один раз ним підкреслені числа, які діляться на 3 та на 5, але не діляться на 15. Останні будуть підкреслені Миколкою двічі. Отже, їх потрібно вилучити як зі списку підкреслених чисел, які діляться на 3, так і зі списку підкреслених чисел, кратних 5. Всього отримуємо

$$\frac{2019}{3}+\frac{2020}{5}-2\cdot\frac{2010}{15}=673+404-268=809.$$

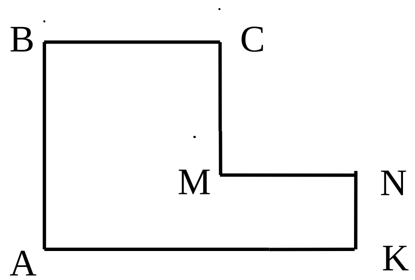
У чисельниках дробів записані найбільші натуральні числа, які не перевищують 2020 і діляться націло на 3, 5 та 15 відповідно.

Можна було міркувати ще й так. Серед кожних 15 послідовних натуральних чисел підкресленими рівно один раз будуть 6 чисел, які при діленні на 15 дають остачі 3, 5, 6, 9, 10 та 12. Від 1 до 2010 таких груп по 15 чисел є 134. Крім них, рівно один раз будуть підкреслені ще й числа 2013, 2015, 2016, 2019 та 2020. Разом: $6\cdot 134+5=809$.

6. Знайдіть периметр фігури $ABCDEFGH$, зображеної на малюнку справа, якщо $AB=6\ см$, $BC=5\ см$, $FG=4\ см$ і всі кути між її сусідніми сторонами прямі. Довжини решти сторін невідомі.



Розв'язання. Перемістимо фрагмент $EFGH$ трьох сторін заданої фігури вправо на довжину відрізка ED, а сам цей відрізок поставимо на прямій AH впритул до точки H справа від неї. У результаті отримаємо фігуру $ABCMNK$ (див. мал. справа), периметр якої дорівнює периметру фігури $ABCDEFGH$. Оскільки при цьому $AK=BC+MN=9\,см$ та $CM+NK=AB=6\,см$, то шуканий периметр дорівнює 30 см.



6 клас

1. Добуток двох двоцифрових чисел дорівнює A. Учень поміняв місцями цифри у кожному з цих чисел і, помноживши отримані двоцифрові числа, одержав у добутку число B. Доведіть, що $A-B$ ділиться на 99.

Розв'язання. Нехай спочатку такими двома двоцифровими числами були числа $\overline{ab}$ та $\overline{cd}$. Тоді

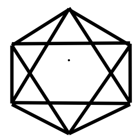
$$A-B=(10a+b)(10c+d)-(10b+a)(10d+c)=99(ac-bd)$$

ділиться на 99.

2. На піратському кораблі є декілька кішок, трохи матросів, кок й одноногий капітан Сільвер. В них усіх, разом узятих, 15 голів та 41 нога. Скільки на кораблі кішок?

Розв'язання. 6 кішок. Якщо не рахувати Сільвера, то у решти з них разом 14 голів та 40 ніг. Якщо б у всіх з них було по дві ноги, то всього отримали би лише 28 ніг. «Зайві» 12 ніг ділимо на 2 і знаходимо кількість кішок.

3. На малюнку справа зображена фігура. Порахуйте кількість трикутників у цій фігурі.



Розв'язання. 32. Сторонами шести з них є дві сторони та одна діагональ шестикутника, вісімнадцяти – сторона та частини двох діагоналей, двох – три діагоналі шестикутника, та ще шести – частини трьох діагоналей.

4. На столі лежить 20 сірників. Двоє по черзі беруть їх зі столу. За один раз дозволяється взяти довільну кількість сірників від 1 до n. Програє той, хто змушений буде забрати останній сірник. Миколка розпочинає гру і обіцяє перемогти. Чи може Сергійко, який вступає у гру другим, але до початку гри повідомляє, яку максимальну кількість сірників можна забирати за один раз, завадити йому в цьому? Якщо так, то вкажіть усі значення n, для яких Сергійкові це вдасться.

Розв'язання. Лише для $n=18$. При цьому, скільки б сірників не забрав Миколка своїм першим ходом, Сергійко у відповідь зможе залишити на столі 1 сірник, отже, перемогти. Якщо ж $n\le 17$, то Миколка своїм першим ходом забирає кількість сірників, яка дорівнює остачі від ділення 19 на $n+1$. Далі, яку б кількість k сірників не забирав Сергійко, Миколка у відповідь забиратиме $n+1-k$ сірників поки на столі не залишиться 1 сірник. А якщо

$n \geq 19$, то залишити Сергійкові на столі 1 сірник Миколка зможе уже першим своїм ходом.

5. На дошці записані числа 1, 2, 3, …, 2020. Миколка підкреслив усі числа, які діляться на 2, потім – усі числа, які діляться на 3, і, нарешті, – усі числа, які діляться на 5. Скільки чисел він підкреслив двічі?

Розв'язання. 471 число. Двічі ним підкреслені числа, які діляться на 6, на 10 та на 15, але не діляться на 30. Останні будуть підкреслені Миколкою тричі. Отже, їх потрібно вилучити як зі списку підкреслених чисел, які діляться на 6, так і зі списків підкреслених чисел, кратних 10 та 15. Всього отримуємо

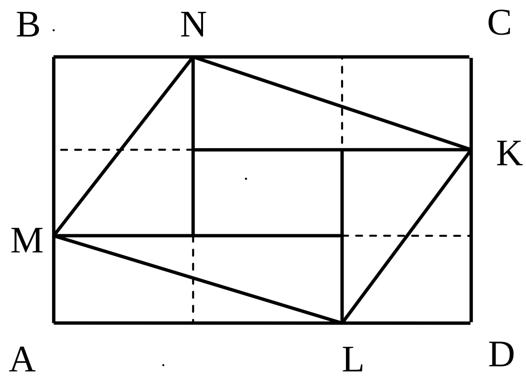
$$\frac{2016}{6}+\frac{2020}{10}+\frac{2010}{15}-3\cdot\frac{2010}{30}=336+202+134-201=471.$$

У чисельниках дробів записані найбільші натуральні числа, які не перевищують 2020 і діляться націло на 6, 10, 15 та 30 відповідно.

Можна було міркувати ще й так. Серед кожних 30 послідовних натуральних чисел підкресленими двічі будуть 7 чисел, які при діленні на 30 дають остачі 6, 10, 12, 15, 18, 20 та 24. Від 1 до 2010 таких груп по 30 чисел є 67. Крім них, двічі будуть підкреслені ще й числа 2016 та 2020. Разом: $7\cdot 67+2=471$.

6. На сторонах AB, BC, CD, DA прямокутника $ABCD$ вибрали точки M, N, K, L відповідно, які ділять кожну з цих сторін у відношенні $1:2$, рахуючи від вершини, записаної першою. Знайдіть відношення площі фігури $MNKL$ до площі прямокутника $ABCD$.

Розв'язання. 9 виділених жирним на малюнку справа фігурок (вісім прямокутних трикутників та один прямокутник у центрі) мають однакові площі. 5 із цих фігурок містяться у фігурі $MNKL$. Тому відношення площі фігури $MNKL$ до площі прямокутника $ABCD$ дорівнює $5:9$.



7 клас

1. Візьмемо очевидну рівність $6:6=7:7$. Після винесення за дужки спільного множника з кожної частини рівності будемо мати $6\cdot(1:1)=7\cdot(1:1)$, або, що те саме, $(2\cdot3)\cdot(1:1)=7\cdot(1:1)$. З останньої рівності одержуємо $2\cdot3=7$. Знайдіть помилку в цих міркуваннях.

Розв'язання. Помилка була допущена при винесенні за дужки спільного множника з кожної частини початкової рівності. Замість $6\cdot(1:1)=7\cdot(1:1)$ треба було записати $6\cdot(1:6)=7\cdot(1:7)$.

2. Знайдіть принаймні три пари натуральних чисел m та n, для яких правильною є рівність $m!+1=n^2$. (Через $m!$ позначено добуток всіх натуральних чисел від 1 до m). Чи може у цій рівності число n дорівнювати 2020?

Розв'язання. Такими, наприклад, є пари чисел: $(4;5)$, $(5;11)$, $(7;71)$. Дорівнювати 2020 у цій рівності число n не може, бо $m=1$ не задовольняє, а для $m>1$ ліва частина записаної рівності є непарним числом.

3. Пішов батько з чотирма синами в ліс по гриби. Батько знайшов 45 грибів тоді, коли кожний з його синів не знайшов жодного гриба. Роздав батько зібрані ним гриби дітям і всі знову розійшлися по лісу. Коли зібралися йти додому, виявилося, що один із синів знайшов ще стільки ж грибів, скільки одержав від батька, другий знайшов два гриби, третій два гриби загубив, а четвертий – загубив половину тих грибів, що одержав від батька. При цьому в усіх синів грибів стало порівну. Скільки грибів дав батько кожному з них?

Розв'язання. 5, 8, 12 та 20 грибів. Якщо позначити кількості грибів, які батько дав своїм синам, через x, y, z та $2t$, то з умови задачі отримаємо рівності $x+y+z+2t=45$ та $2x=y+2=z-2=t$. Отже, $x+(2x-2)+(2x+2)+4x=45$, тобто $x=5$, $y=2x-2=8$, $z=2x+2=12$, $2t=4x=20$.

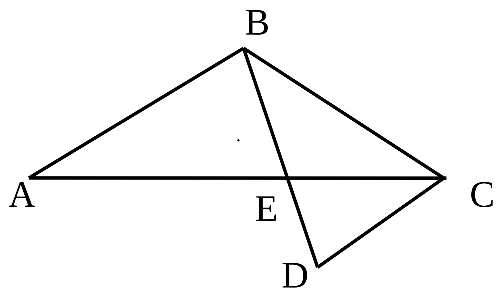
4. Вчитель перевірив роботи трьох учнів – Андрія, Василя та Сергія, але не приніс у клас. Учням він сказав: "Один із вас отримав "3", другий – "4", а третій – "5". У Сергія не "5", у Василя не "4", а в Андрія, здається, "4". Коли принесли зошити, то виявилось, що вчитель тільки одному учневі сказав правильну оцінку, двом іншим – неправильну. Які оцінки отримали учні?

Розв'язання. Можливі 6 варіантів розташування оцінок 5, 4, 3: АВС, АСВ, ВАС, ВСА, САВ та СВА. Кожен запис означає, що "5" отримав перший учень, "4" – другий, "3" – третій. Букви у записах – перші літери імен учнів. З цих записів лише перший підходить до умови задачі: в твердженнях вчителя одна оцінка правильна, а дві інші – ні. Тому Сергій отримав "3", Василь – "4", Андрій – "5".

5. Три товариші-мотоциклісти, маючи один двомісний мотоцикл, повинні за три години одночасно прибути до міста, розташованого за 60 км від них. Чи вдасться їм це зробити, якщо швидкість мотоцикла (з вантажем чи без нього) 50 км/год, а пішки кожен з них рухається зі швидкістю 5 км/год ?

Розв'язання. Вдасться. Наприклад, так. Один мотоцикліст за одну годину відвозить одного з товаришів на відстань 50 км. Решту 10 км той за дві години встигне пройти пішки. Так само за дві години другий товариш пройде 10 км від початку маршруту, де його вже чекатиме мотоцикліст, який менше ніж за одну годину подолає відстань у 40 км, повертаючись назад. Ще одну годину вони витратять, щоб вдвох прибути на мотоциклі до міста одночасно з їх третім товаришем.

6. Відрізок BD перетинає сторону AC трикутника ABC, причому $BD = AB = BC$ та $\angle ABD = 70^\circ$. Знайдіть у градусах величину кута ACD.



Розв'язання. Трикутники ABC та BCD (див. мал. справа) – рівнобедрені. Нехай $\angle ACD = x$, $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$. Тоді $\angle BDC = \angle BCD = \alpha + x$, і для зовнішнього кута BEC трикутників ABE та DCE отримуємо, що $\angle BEC = 70^\circ + \alpha$ та $\angle BEC = 2x + \alpha$. Звідси маємо $2x = 70^\circ$, $x = 35^\circ$. Отже, $\angle ACD = 35^\circ$.

Можна було міркувати ще й так: точки A, C, D лежать на колі з центром у точці B. Тому вписаний кут ACD дорівнює половині центрального кута ABD.

8 клас

1. Знайдіть усі трійки простих чисел $p_1 < p_2 < p_3$ таких, що $p_1 p_2 p_3 = 5(p_1 + p_2 + p_3)$.

Розв'язання. $p_1 = 2$, $p_2 = 5$, $p_3 = 7$. Справді, добуток $p_1 p_2 p_3$ ділиться на 5, тому принаймні одне з цих чисел дорівнює 5. Позначимо два інші з них через p та q. Тоді з рівності $pq = p + q + 5 \Leftrightarrow (p-1)(q-1) = 6$ знаходимо ще два шукані прості числа 2 та 7.

2. Обчисліть $\sqrt{1+2019\sqrt{1+2020\sqrt{1+2021\cdot 2023}}}$.

Розв'язання. Скориставшись рівністю $1+(n-1)(n+1)=n^2$, отримаємо

$$\sqrt{1+2019\sqrt{1+2020\sqrt{1+2021\cdot 2023}}} =$$

$$= \sqrt{1+2019\sqrt{1+2020\cdot 2022}} = \sqrt{1+2019\cdot 2021} = 2020.$$

3. Розкладіть вираз $x^8 + x + 1$ на два множники шостого та другого степенів.

Розв'язання.

$$x^8 + x + 1 = x^8 - x^2 + x^2 + x + 1 = x^2\left(x^3 - 1\right)\left(x^3 + 1\right) + x^2 + x + 1 =$$

$$= \left(x^2\left(x^3+1\right)(x-1)+1\right)\left(x^2+x+1\right) = \left(x^6 - x^5 + x^3 - x^2 + 1\right)\left(x^2 + x + 1\right).$$

4. Яке з чисел, $x - y$ чи $\frac{25}{4}$, більше, якщо

$$x = \frac{1^2}{1} + \frac{2^2}{3} + \frac{3^2}{5} + \ldots + \frac{12^2}{23}, \quad y = \frac{1^2}{3} + \frac{2^2}{5} + \frac{3^2}{7} + \ldots + \frac{12^2}{25}\ ?$$

Розв'язання. Друге число більше. Справді,

$$x - y = \frac{1^2}{1} + \frac{2^2 - 1^2}{3} + \frac{3^2 - 2^2}{5} + \ldots + \frac{12^2 - 11^2}{23} - \frac{12^2}{25} =$$

$$= 12 - \frac{12^2}{25} = \frac{12\cdot 13}{25} = 6{,}24 < 6{,}25 = \frac{25}{4}.$$

5. На конгресі зустрілися математик, історик, біолог та хімік. Кожний із них володів двома іноземними мовами з числа таких: англійська, італійська, німецька та французька. Італійську мову знав лише один з них, але була одна мова, якою володіли троє. Хоч хімік і не розмовляє англійською, він може бути перекладачем, якщо захочуть поговорити біолог та історик. Історик не знає німецької, але знає французьку мову і може поговорити з математиком, хоч той і не володіє французькою. Які мови знав кожний із вчених?

Розв'язання. Математик не знає французької мови, якою володіє історик. Якщо припустити, що історик знає також італійську, то для спілкування з ним і математик мав би володіти італійською мовою, що суперечить умові задачі. Тому історик не знає італійської мови, зате знає англійську, яку внаслідок цього повинен знати і математик.

Оскільки біологу для розмови з істориком потрібен перекладач, то він не знає ні англійської, ні французької, отже, знає німецьку та італійську. Враховуючи, що таким перекладачем повинен бути хімік, останній, не знаючи англійської, а також італійської, якою володіє лише біолог, повинен знати німецьку та французьку мови.

А поговорити втрьох однією мовою – німецькою – зможуть лише хімік, біолог і математик за умови, що математик знатиме її.

Остаточно отримуємо: математик знає англійську та німецьку, історик – англійську та французьку, біолог – німецьку та італійську, а хімік – німецьку та французьку мови.

6. Прямокутний трикутник ABC з гіпотенузою AB рухається у прямому куті з вершиною O так, що вершина A ковзає по одній, а вершина B – по іншій стороні цього кута. Доведіть, що при цьому вершина C рухається вздовж деякого відрізка.

Розв'язання. Зрозуміло, що точки O та C знаходяться з різних сторін прямої AB, бо інакше трикутник ABC не міг би рухатися вказаним способом. Два протилежні кути O та C чотирикутника $OACB$ (див. мал. справа) прямі, тому навколо нього можна описати коло. При вказаних в умові задачі рухах величина його діаметра AB не змінюється. Так само не змінюється і довжина хорди BC. Тому не змінюються й величини вписаних кутів BOC, які спираються на дуги BC. Це означає, що вершина C рухається вздовж відрізка прямої, яка проходить через точку O.