Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

Розв'язки завдань першого туру дистанційного етапу Всеукраїнської олімпіади з математики для професійної орієнтації вступників на базі повної загальної середньої освіти 2020-2021

www.mif.pnu.edu.ua

1. Щоб підживити мозок перед розв'язуванням завдань олімпіади, учасник купив яблук, апельсинів, горіхів і цукерок. Вся покупка без яблук коштувала 119 гривень, без апельсинів — 111 гривень, без горіхів — 99 гривень, а без цукерок — 73 гривні. Скільки разом коштували яблука та горіхи?

Розв'язання. Нехай x — вартість яблук і горіхів, а y — вартість апельсинів і цукерок. Якщо додати вартість покупки без яблук та вартість покупки без горіхів, то апельсини і цукерки будуть пораховані двічі, а яблука і горіхи — по одному разу, звідки $119 + 99 = x + 2y$. Аналогічно, якщо додамо вартість покупки без апельсинів та вартість покупки без цукерок, то врахуємо яблука і горіхи двічі, а апельсини і цукерки один раз, тому $111 + 73 = 2x + y$.

Щоб розв'язати систему $\begin{cases} x + 2y = 218, \\ 2x + y = 184, \end{cases}$ додамо її рівняння і отримаму рівність $3x + 3y = 402$ поділимо на 3, звідки $x + y = 134$. Віднявши це від рівності $2x + y = 184$, знайдемо $x = 50$ гривень — спільну вартість яблук і горіхів. Аналогічно, віднявши від $x + 2y = 218$, отримаємо, що апельсини і цукерки коштували $y = 84$ гривні.

Звичайно, можна знайти і ціну кожного виду ласощів зокрема і додати вартості яблук та горіхів.

2. Розв'яжіть рівняння $x^2 + y^2 - 8x + 12y + 52 = 0$.

Розв'язання. Оскільки вираз зліва рівний $(x-4)^2 + (y+6)^2$, тому є сумою квадратів, він може бути рівним нулю тільки при $x - 4 = 0$, $y + 6 = 0$, тобто $x = 4$, $y = -6$. Отже, пара $(4, -6)$ є єдиним розв'язком рівняння.

3. Скільки існує натуральних чисел x, для яких

$$|x - 10| + |x - 30| \neq 2 \cdot |x - 20| \ ?$$

Розв'язання. Якщо $x \geq 30$, то всі три вирази $x - 10$, $x - 20$, $x - 30$ невід'ємні, і знаки модуля можна опустити, тоді нерівність набуває вигляду

$$(x - 10) + (x - 30) \neq 2 \cdot (x - 20),$$

тобто $2x - 40 \neq 2x - 40$, що неможливо. Якщо ж $x \leq 10$, то вирази $x - 10$, $x - 20$, $x - 30$ недодатні, і знаки модуля опускаємо, дописавши перед виразами мінуси, тоді нерівність набуває вигляду

$$-(x - 10) - (x - 30) \neq -2 \cdot (x - 20),$$

тобто $-2x + 40 \neq -2x + 40$, що теж неможливо. Отже, при $x \leq 10$ чи $x \geq 30$ виконано рівність.

Якщо ж $10 < x < 30$, то вираз $x - 10$ додатний, а вираз $x - 30$ від'ємний. Відомо, що для чисел a і b протилежних знаків $|a + b| < |a| + |b|$, тому для таких x маємо $|(x-10) + (x-30)| = |2x - 40| = 2 \cdot |x - 20| < |x - 10| + |x - 30|$, отже, нерівність виконано для всіх цілих чисел $11, 12, \ldots, 28, 29$ і тільки для них. Звідси кількість шуканих чисел рівна 19.

Можна було також розкривати модулі, розглянувши чотири можливі випадки, результат був би таким самим.

4. Розв'яжіть рівняння $\log_{x-1}(2x - 3) = 2$.

Розв'язання. За означенням логарифма дана рівність означає

$$\begin{cases} (x-1)^2 = 2x - 3, \\ x - 1 > 0, \\ x - 1 \neq 1, \end{cases} \quad \text{тобто} \quad \begin{cases} x^2 - 4x + 4 = 0, \\ x > 1, \\ x \neq 2. \end{cases}$$

Але $x^2-4x+4=(x-2)^2=0$ можливе тільки при $x=2$, що суперечить третій умові. Отже, рівняння не має розв'язків.

5. Чи має рівняння $x^5y=xy^5+2020$ розв'язки у цілих числах?

Розв'язання. Перетворимо рівняння до вигляду $x^5y-xy^5=2020$, тобто $xy(x^4-y^4)=xy(x^2-y^2)(x^2+y^2)=xy(x-y)(x+y)(x^2+y^2)=2020$. Отже, число $2020=2^2\cdot5\cdot101$, яке є добутком *чотирьох* простих натуральних чисел, повинне бути добутком *п'яти* ненульових цілих чисел x, y, $x-y$, $x+y$ та x^2+y^2.

Розглянемо парність цих п'яти співмножників залежно від парності x та y. Якщо x, y парні, то всі п'ять співмножників парні, що неможливо, бо $2\cdot2\cdot5\cdot101$ не можна розкласти у добуток п'яти парних цілих чисел.

Якщо x, y непарні, то $x-y$, $x+y$ та x^2+y^2 парні, що теж неможливо, бо $2\cdot2\cdot5\cdot101$ не розкладається у добуток цілих чисел навіть з *трьома* парними співмножниками.

Якщо x парне, а y непарне, то співмножники $x-y$, $x+y$ та x^2+y^2 теж непарні. Якщо $2\cdot2\cdot5\cdot101$ розкладено у добуток цілих чисел з чотирма непарними спімножниками, то принаймні два з них за модулем повинні бути рівні 1. Зрозуміло, що за модулем x^2+y^2 найбільше з них, отже, не рівне 1, тому можливі три випадки :

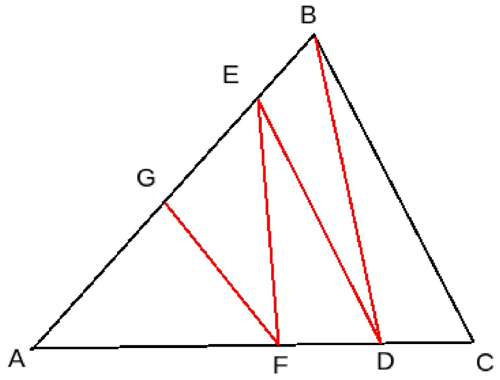
$$\begin{cases}|y|=1,\\|x-y|=1,\end{cases}\qquad\begin{cases}|y|=1,\\|x+y|=1,\end{cases}\qquad\begin{cases}|x-y|=1,\\|x+y|=1.\end{cases}$$

У першому та другому випадках $|y|=1$, а x та y за модулем відрізняються на 1, тому $|x|$ може бути або 0, або 2. Очевидно, що при $x=0$ чи $x=\pm2$ і $y=\pm1$ вираз x^5y-y^5x не може бути рівним 2020.

У третьому випадку $|x+y|=|x-y|$, тому $x+y=x-y$ чи $x+y=-(x-y)$, і $x=0$ чи $y=0$, що теж неможливо.

Аналогічно відкидаємо випадок, коли x непарне, а y парне. Отже, дане рівняння не має розв'язків у цілих числах.

6. Як у даному трикутнику ABC (див. рисунок) провести ламану $BDEFG$ так, щоб всі п'ять отриманих трикутників мали однакову площу?



Розв'язання. Площі трикутників будуть рівними, якщо і тільки якщо площа $\triangle BCD$ буде рівною $1/5$ від площі $\triangle BCA$, площа $\triangle BDE$ — рівною $1/4$ від площі $\triangle BDA$, площа $\triangle EDF$ — $1/3$ від площі $\triangle EDA$, а площі $\triangle AFG$ і $\triangle EFG$ — рівними. Оскільки $\triangle BCD$ і $\triangle BCA$ мають спільну висоту, це означає, що $|DC| = \frac{1}{5}|AC|$, звідки знаходимо D. Аналогічно $\triangle BDE$ і $\triangle BDA$ мають спільну висоту, тому потрібно $|EB| = \frac{1}{4}|AB|$, що дає шукане E. Далі з $|FD| = \frac{1}{3}|AD|$ знаходимо F, а G повинне бути серединою відрізка AE.

7. Яку найбільшу кількість натуральних чисел можна написати в рядок так, щоб сума кожних 9 послідовних чисел була парною, а сума кожних 10 послідовних чисел — непарною? Наведіть приклад.

Розв'язання. Якщо умову виконано, то для кожних послідовних десяти чисел їх сума непарна, а сума без першого числа — парна. Отже, перше число з кожних послідовних десяти має бути непарним.

Якщо у нашій послідовності є принаймні 18 чисел, то від кожного з перших 9 чисел можна відрахувати ще дев'ять сусідніх чисел вправо, тому кожне з перших 9 чисел є першим серед якихось десяти сусідніх чисел. Отже, перші 9 чисел у нашій послідовності непарні, і їх сума непарна, а повинна бути парною. Ця суперечність доводить, що шукана послідовність не може містити ≥ 18 натуральних чисел.

Послідовність

$$\underbrace{1,1,1,1,1,1,1,1}_{8\text{ чисел}},2,\underbrace{1,1,1,1,1,1,1,1}_{8\text{ чисел}}$$

містить 17 елементів і задовольняє вимоги задачі. Отже, найбільша кількість, про яку мова в умові задачі, рівна 17.

8. Площі трикутників, утворених відрізками діагоналей трапеції та її основами, дорівнюють 4 см^2 та 9 см^2. Знайти площу трапеції.

Розв'язання. Нехай $ABCD$ — дана трапеція, AD — її більша основа, BC — менша, O — точка перетину діагоналей AC і BD. Трикутники AOD і COB подібні, тому $\frac{AO}{OC} = \frac{DO}{OB} = k$. Оскільки трикутники AOB і COB мають спільну висоту, відношення їх площ рівне відношенню основ : $\frac{S_{AOB}}{S_{COB}} = \frac{AO}{OC} = k$. Аналогічно спільну висоту мають трикутники AOD і AOB, тому $\frac{S_{AOD}}{S_{AOB}} = \frac{DO}{OB} = k$. Звідки маємо рівність $\frac{S_{AOB}}{S_{COB}} = \frac{S_{AOD}}{S_{AOB}}$, і $(S_{AOB})^2 = S_{AOD} \cdot S_{COB}$, тобто $S_{AOB} = \sqrt{S_{AOD} \cdot S_{COB}} = \sqrt{9 \cdot 4} = 6$ см^2. Подібно $S_{COD} = 6$ см^2, звідки загальна площа трапеції рівна $4+6+6+9 = 25$ см^2.

9. Петрусеві і Марійці Миколай приніс чарівні скриньки, які за ніч подвоюють кількість покладених туди цукерок, і вони негайно поділили цукерки від Миколая порівну і поклали до скриньок, вирішивши не чіпати їх якнайдовше. Ласун Петрусь не витримав і щоранку тихцем з'їдав по цукерці з Марійчиної скриньки. За якийсь час він злякався викриття і "випадково" висипав вміст обох скриньок на підлогу, змішавши його. Розумна Марійка перерахувала цукерки, виявила, що їх 321, і звинуватила Петруся у шахрайстві. Чому? Якщо зможете (необов'язково), скажіть, скільки цукерок приніс Миколай дітям.

Розв'язання. Оскільки на початку діти поділили цукерки порівну, їх кількість була парною. Якби Петрусь не шахрував, кількість подвоювалась би щоночі і залишалась парною. Тому зрозуміло, що непарна кількість свідчить про те, що "хтось" брався до вмісту скриньок.

Оскільки за ніч загальна кількість цукерок m подвоюється, а Петрусь з'їдає одну з них, то кількість цукерок стає непарною: $n = 2m - 1$. Звідси за кількістю цукерок n кожного дня, крім першого, можемо знайти кількість цукерок попереднього дня $m = \frac{n+1}{2}$. Тому, повертаючись назад від дня, коли Петрусь спіймався, маємо : $\frac{321+1}{2} = 161$, $\frac{161+1}{2} = 81$, $\frac{81+1}{2} = 41$, $\frac{41+1}{2} = 21$, $\frac{21+1}{2} = 11$, $\frac{11+1}{2} = 6$ цукерок. Отже, день, коли їх було 6, був першим. Саме стільки цукерок приніс дітям Миколай.

10. Коли до розчину солі долили склянку з 200 г води, концентрація розчину у відсотках маси зменшилась на 4, а після доливання ще одної такої склянки — ще на 3. Якою була початкова маса розчину?

Розв'язання. Нехай початкова загальна маса розчину x г, а маса солі в розчині m г. Тоді концентрації розчину у відсотках послідовно рівні $\frac{m}{x} \cdot 100$, $\frac{m}{x+200} \cdot 100$, $\frac{m}{x+400} \cdot 100$. Маємо систему :

$$\begin{cases} \frac{m}{x} \cdot 100 - \frac{m}{x+200} \cdot 100 = 4, \\ \frac{m}{x+200} \cdot 100 - \frac{m}{x+400} \cdot 100 = 3, \end{cases}$$

тобто

$$\begin{cases} \frac{200m}{x(x+200)} = \frac{4}{100}, \\ \frac{200m}{(x+200)(x+400)} = \frac{3}{100}. \end{cases}$$

Поділивши перше рівняння на друге, отримаємо $\frac{x+400}{x} = \frac{4}{3}$, звідки $\frac{400}{x} = \frac{1}{3}$, і початкова маса рівна $x = 1200$ г.

Голова предметно-методичної комісії