ВІДКРИТА ІВАНО-ФРАНКІВСЬКА ОБЛАСНА ОЛІМПІАДА
З МАТЕМАТИКИ ДЛЯ УЧНІВ 5 – 11 КЛАСІВ, 2021 р.

5 клас

1. Площа прямокутника, довжини сторін якого виражаються цілим числом сантиметрів, дорівнює 2021 $см^2$. Знайдіть периметр цього прямокутника, якщо відомо, що він не перевищує 2 метри.

2. Визначте останню цифру числа

$$a = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 2020\cdot 2021 - 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot 2019\cdot 2021.$$

Чи може передостання цифра числа a ділитися на 3, на 4 або на 5?

3. Калькулятор Миколки може працювати лише з цілими числами. Він має 4 клавіші, за допомогою яких ціле число a можна перетворити в одне з цілих чисел: $2a$, $\frac{a}{2}$, $3a+1$, $\frac{a-1}{3}$. Миколка ввів число 5 і, натиснувши після цього тричі на клавіші свого калькулятора, побачив на дисплеї число 6. Як, на вашу думку, таке могло статися, і чи зможе Миколка, продовживши натискати на клавіші, побачити на дисплеї число 7?

4. Марійка, Петрусь, Михайлик та Миколка взяли участь у відкритій олімпіаді з математики, під час якої вони розв’язували 5 задач. Кожен з них розв’язав різну кількість задач (принаймні одну), але кожна задача була розв’язаною однаковим числом цих учнів. Визначте, яку найбільшу кількість задач могла розв’язати Марійка, і наведіть приклад, як таке насправді могло трапитися.

5. По колу стоять 15 дітей. Зліва кожного хлопчика стоїть дівчина, а у половини дівчат – зліва також дівчинка. Відповідно, у другої половини дівчат зліва стоїть хлопчик. Скільки хлопчиків та скільки дівчат у цій компанії? Відповідь обґрунтуйте.

5.1. Оскільки $2021 = 1\cdot 2021 = 43\cdot 47$, то умову задачі задовольняє лише прямокутник з довжинами сторін 43 *см* та 47 *см*. Його периметр дорівнює 180 *см*.

5.2. Оскільки перший з добутків ділиться на 10, а другий є непарним і ділиться на 5, то останньою цифрою числа a є цифра 5.

Крім того, кожний з добутків ділиться на 25, а їх різниця є непарним числом. Тому число a може закінчуватися або на 25, або на 75. Отже, його передостання цифра не може ділитися ні на 3, ні на 4, ні на 5.

5.3. Наприклад:

$$5\xrightarrow{(1)}10\xrightarrow{(4)}3\xrightarrow{(1)}6; \quad 6\xrightarrow{(3)}19\xrightarrow{(1)}38\xrightarrow{(1)}76\xrightarrow{(4)}25\xrightarrow{(4)}8\xrightarrow{(2)}4\xrightarrow{(2)}2\xrightarrow{(3)}7.$$

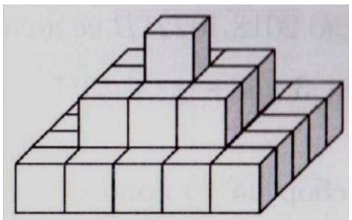
5.4. Найбільше ці учні разом могли розв'язати $5+4+3+2=14$, а найменше $4+3+2+1=10$ задач. Оскільки кожна з п'яти задач розв'язана однаковим числом цих учнів, то загальна кількість розв'язаних задач повинна ділитися на 5. Отже, вона може дорівнювати лише 10. Тому Марійка розв'язала не більше чотирьох задач. Приклад із чотирма задачами наведений у наступній таблиці:

Учень \ задача	1	2	3	4	5
Марійка	+	+	+	-	+
Петрусь	-	+	-	+	+
Михайлик	+	-	-	+	-
Миколка	-	-	+	-	-

5.5. Оскільки у кожного хлопчика сусід зліва – дівчинка, то з обох боків кожного хлопчика можуть стояти лише дівчата. Для тих дівчат, які стоять праворуч хлопчиків, внаслідок другої умови має бути ще стільки ж дівчат, які стоять правіше дівчат. Тому всіх дівчат – вдвічі більше ніж хлопчиків. Отже, у цій компанії може бути лише 5 хлопчиків та 10 дівчат. Умови задачі задовольняють, наприклад, такі розташування дітей по колу зліва направо (крайня справа дівчина у колі стоїть поруч з крайньою зліва):

1) ДХДДХДДХДДХДДХД, 2) ДХДХДХДХДХДДДДД.

6 клас



1. Археологи відкопали з піску піраміду складену з однакових кам'яних кубів, ребра кожного з яких дорівнювали 1 *м*. Верхні три шари піраміди зображено на малюнку справа. Інші її шари утворені за аналогічним принципом. Миколка з вершини піраміди стверджує, що в основі піраміди лежить 2021 куб. Знайдіть висоту піраміди, якщо відомо, що Миколка помилився не більше, як на 6 кубів.

2. Марійка виписала усі натуральні дільники деякого натурального числа $n>1$ за зростанням: $1=d_1<d_2<...<d_k=n$. Обчисливши суму $\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+...+\frac{1}{d_k}$, вона дуже здивувалася, що така сума виявилася цілим числом. Для якого найменшого n таке могло статися?

3. За круглим столом сиділи шестеро, кожний з яких або є лицарем, який завжди каже правду, або брехуном, який завжди бреше. Скільки серед них могло бути брехунів, якщо усі шестеро заявили, що обидва їхні сусіди є брехунами?

4. Петрусь зобразив на площині 6 точок і стверджує, що кожна з них знаходиться на відстані 1 *см* рівно від трьох інших з цих точок. Чи можуть його слова бути правдою? Відповідь обґрунтуйте.

5. Суму $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{2}{2\cdot 4}+\frac{3}{4\cdot 7}+\frac{4}{7\cdot 11}+\frac{5}{11\cdot 16}+\frac{6}{16\cdot 22}$ записали у вигляді одного правильного нескоротного дробу. Знайдіть різницю між знаменником та чисельником такого дробу?

6.1. Неважко побачити, що довжини сторін шарів, починаючи з верхнього, виражаються непарним числом метрів: 1, 3, 5, …, $2n-1$. Тому кількість кубів в основі піраміди є квадратом непарного натурального числа. Умову задачі задовольняє лише $n=23$, для якого $(2n-1)^2=45^2=2025$, бо $43^2=1849$ та $47^2=2289$ відрізняються від 2021 більше, ніж на 6. Отже, сторона основи піраміди дорівнює 45 *м*, а шукана висота піраміди становить 23 *м*.

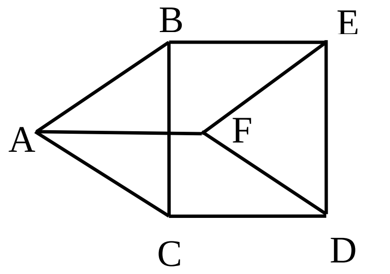
6.2. Для $n=6$. Для нього ця сума дорівнює $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=2$.

Для менших $n>1$ такі суми відповідно дорівнюють:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},\quad \frac{1}{1}+\frac{1}{3}=\frac{4}{3},\quad \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4},\quad \frac{1}{1}+\frac{1}{5}=\frac{6}{5}.$$

6.3. Серед кожних трьох, які сидять поруч, принаймні один є лицарем, інакше середній з них брехун сказав би правду. Тому лицарів не менше двох, а брехунів – не більше чотирьох. Крім того, лицарів не може бути більше, ніж брехунів, бо, наприклад, праворуч кожного лицаря точно сидить брехун. Отже, лицарів не більше трьох, а брехунів – не менше трьох. Умову задачі задовольняють такі два варіанти: 1) БЛБЛБЛ, 2) БЛББЛБ. Отже, у цій компанії можуть бути 3 або 4 брехуни.

6.4. Можуть. Див. малюнок справа, на якому довжини всіх проведених відрізків дорівнюють 1 *см*.



6.5. Подамо цю суму у вигляді

$$\frac{2-1}{1\cdot 2}+\frac{4-2}{2\cdot 4}+\frac{7-4}{4\cdot 7}+\frac{11-7}{7\cdot 11}+\frac{16-11}{11\cdot 16}+\frac{22-16}{16\cdot 22}=$$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{11}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{22}\right)=1-\frac{1}{22}=\frac{21}{22}.$$

Зрозуміло, що при цьому шукана різниця між знаменником та чисельником отриманого дробу дорівнює 1.

7 клас

1. Про цілі числа m та n відомо, що $m<n$ та $m^2-n^2=2021$. А чи насправді існують цілі числа з цими властивостями. Якщо так, то вкажіть хоч одну пару таких чисел.

2. За 7 годин роботи господар розрахувався з трьома своїми працівниками. Отриману суму вони поділили таким чином: перший взяв $\frac{3}{10}$ всієї суми та ще 100 гривень, другий – $\frac{4}{15}$ всієї суми та ще 200 гривень, а третьому залишилося $\frac{7}{30}$ всієї суми та ще 300 гривень. Скільки гривень отримав кожний із працівників?

3. Знайдіть передостанню цифру числа, яке дорівнює добутку $1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot 2019\cdot 2021$.

4. На прямій відзначили чотири точки і виміряли шість відстаней між кожними двома з цих точок. П'ять із них дорівнюють 1, 2, 3, 4 та 5 сантиметрів відповідно. Якого найбільшого значення могла набувати шоста відстань?

5. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC проведена бісектриса AD. Виявилося, що $BD = AC$. Знайдіть величину кута ABC.

7.1. Оскільки $2021 = 2025 - 4 = 45^2 - 2^2 = (-45)^2 - 2^2 = (-45)^2 - (-2)^2$, то умови задачі задовольняють, наприклад, такі пари цілих чисел $m = -45,\ n = 2$ та $m = -45,\ n = -2$. Підійдуть також пари $m = -1011$, $n = 1010$ та $m = -1011,\ n = -1010$. Інших пар цілих чисел з такими властивостями немає (див. розв'язання задачі 8.1).

7.2. Нехай вся отримана ними сума становила x гривень. Тоді

$$\frac{3}{10}x + 100 + \frac{4}{15}x + 200 + \frac{7}{30}x + 300 = x.$$

З цього рівняння знаходимо $x = 3000$ та

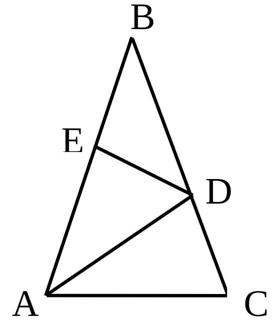
$$\frac{3}{10}x + 100 = \frac{4}{15}x + 200 = \frac{7}{30}x + 300 = 1000.$$

Таким чином, кожен з працівників отримав по 1000 гривень.

7.3. Зауважимо, що це число є непарним і ділиться на 25. Тому воно може закінчуватися лише на 25 або 75. При діленні на 4 непарні числа можуть давати лише остачі 1 або 3. Серед записаних 1011 множників чисел з остачею 1 є 506, а з остачею 3 – 505. Отже, їхній добуток при діленні на 4 дає остачу 3. Тому передостанньою цифрою поданого числа є цифра 7.

7.4. Нехай ці точки розташовані на прямій зліва направо у такому порядку: A, B, C, D. Покажемо, що шоста відстань може бути більшою за 5 см. Тоді також $AD > 5\ см$. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що $AC = 5\ см$. Якщо при цьому $AB = 1\ см$, то жодним вибором точки D не вдасться одночасно реалізувати виміри 2 та 3 см. Якщо $AB = 2\ см$, то умову задачі задовольняє $AD = 6\ см$. Якщо $AB = 3\ см$, то жодним вибором точки D не вдасться одночасно реалізувати виміри 1 та 4 см. А якщо $AB = 4\ см$, то $AD = 7\ см$. Отже, шоста відстань може набувати найбільшого значення 7 сантиметрів.

7.5. <u>І спосіб</u>. Відкладемо на стороні AB точку E таку, що $AE = AC$ (див. малюнок справа). Трикутники ADE та ADC рівні за двома сторонами і кутом між ними. Оскільки $AB = BC$ та $BD = AC$, то $BE = DC = DE$. Якщо $\angle ABC = \beta$, то також $\angle BDE = \beta$. Тому $\angle BAC = \angle ACB = \angle AED = 2\beta$. Отже, $5\beta = 180^{\circ}$, звідки $\beta = 36^{\circ}$.



<u>ІІ спосіб</u>. Очевидно, що $\beta = 36^{\circ}$ задовольняє умову задачі, бо при цьому матимемо два рівнобедрені трикутники ABD та ADC, для яких $BD = AD = AC$. Для доведення відсутності інших розв'язків врахуємо, що у трикутнику навпроти меншого кута лежить менша сторона. Припустимо, що $\beta > 36^{\circ}$. Тоді $\angle BAC = \angle ACB < 72^{\circ}$, $\angle BAD = \angle CAD < 36^{\circ}$, $\angle ADC > 72^{\circ}$. Отже, $BD < AD < AC$, що суперечить умові $BD = AC$. Якщо ж $\beta < 36^{\circ}$, то всі записані вище нерівності поміняються на протилежні.

8 клас

1. Про цілі числа m та n відомо, що $m < n$ та $m^2 - n^2 = 2021$. Знайдіть усі пари таких чисел, якщо, на вашу думку, вони існують.

2. Кожна з восьми однакових на вигляд монет зафарбована у різний колір. Миколці та Марійці відомо, що маси цих монет різні і дорівнюють 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 та 8 грамів відповідно. При цьому Марійка знає масу кожної конкретної монети, а Миколка не знає маси жодної з монет. Чи може Марійка за два зважування на терезах з двома шальками без гир допомогти Миколці визначити маси половини з цих монет?

3. Нехай a, b, c – такі цілі числа, що $a^2+b^2+c^2$ та $a^3+b^3+c^3$ діляться на 3. Доведіть, що $ab+bc+ca$ також ділиться на 3.

4. Розв’яжіть рівняння $|x-4|+|x|+|x+4|=8-x^2$.

5. У трапеції $ABCD$ бісектриса кута ABC перетинає середню лінію $MN \parallel AD$ у точці O. Доведіть, що AO – бісектриса кута BAD.

8.1. Оскільки $2021=2025-4=45^2-2^2=(-45)^2-2^2=(-45)^2-(-2)^2$, то умови задачі задовольняють, наприклад, такі пари цілих чисел $m=-45,\ n=2$ та $m=-45,\ n=-2$. Крім того, враховуючи рівність $m^2-n^2=(m-n)(m+n)$ та розклад на множники $2021=(-2021)\cdot(-1)$, отримаємо ще дві пари шуканих чисел $m=-1011,\ n=1010$ із співвідношень $m-n=-2021,\ m+n=-1$ та $m=-1011,\ n=-1010$ із рівнянь $m-n=-1,\ m+n=-2021$. Наведені вище перші дві пари отримуються аналогічно із розкладу $2021=(-47)\cdot(-43)$. Інших пар з такими властивостями немає, бо 43 та 47 – прості числа.

8.2. Може. У першому зважуванні, поклавши на одну шальку монети з масами 1, 2, 3, 4, 5 грамів, а на другу – монети з масами 7 та 8 грамів, вона допоможе Миколці визначити колір монети масою 6 грамів (вона не брала участь у зважуванні) та кольори двох найважчих монет. Це справді так, бо такий розподіл монет, при якому маси п’яти з них дорівнюють масам деяких двох інших, єдиний. Другим зважуванням монет з масами 1 та 7 грамів на одній шальці і з масою 8 грамів на іншій вона дасть змогу Миколці уточнити конкретні кольори монет з масами 7 та 8 грамів і дізнатися колір монети масою 1 грам. Таким чином Миколка знатиме кольори чотирьох монет з масами 1, 6, 7 та 8 грамів.

8.3. <u>I спосіб</u>. З рівності $n^3-n=(n-1)n(n+1)$ і того, що добуток трьох послідовних цілих чисел ділиться на 3, отримуємо, що разом з $a^3+b^3+c^3$ на 3 ділиться й $a+b+c$. Тому на 3 ділиться також

$$2(ab+bc+ca)=(a+b+c)^2-\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

Звідси випливає, що й $ab+bc+ca$ ділиться на 3.

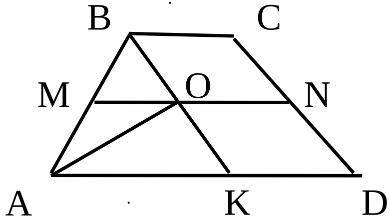
II спосіб. Оскільки при діленні на 3 квадрати цілих чисел можуть давати лише остачі 0 або 1, то з подільності $a^2+b^2+c^2$ на 3 випливає, що або на 3 ділиться кожне з чисел a, b, c, або жодне з них на 3 не ділиться. У першому випадку подільність $ab+bc+ca$ на 3 очевидна. А у другому $a^3+b^3+c^3$ може ділитися на 3 лише за умови, що кожне з чисел a, b, c при діленні на 3 дає остачу 1, або кожне – остачу 2. В обох варіантах усі доданки суми $ab+bc+ca$ при діленні на 3 дають остачу 1, тому така сума ділиться на 3.

8.4. I спосіб. Розкриваючи модулі, отримаємо, що:

$$|x-4|+|x|+|x+4|=\begin{cases}-x+4-x-x-4=-3x, & x\le -4,\\ -x+4-x+x+4=8-x, & -4\le x\le 0,\\ -x+4+x+x+4=8+x, & 0\le x\le 4,\\ x-4+x+x+4=3x, & x\ge 4.\end{cases}$$

На кожному з цих проміжків ліва частина рівняння не менша за 8. Водночас для правої частини рівняння маємо $8-x^2\le 8$. Тому рівність можлива лише за умови, що вони обидві дорівнюють 8. Справа це значення набувається лише при $x=0$. Оскільки при цьому значенні x ліва частина рівняння також дорівнює 8, то $x=0$ – єдиний корінь поданого рівняння.

II спосіб. Враховуючи геометричний зміст модуля, ліву частину рівняння можна розглядати як суму відстаней від точки x до точок 4, 0, -4 числової прямої. Нескладно переконатися, що за будь-якого розташування точки x на числовій прямій така сума не менша відстані між точками 4 та -4, тобто не менша за 8. А далі завершуємо розв’язання як і у першому способі.



8.5. I спосіб. Нехай для конкретності $AD>BC$, а точка M лежить на бічній стороні AB (див. малюнок справа). Позначимо через точку перетину прямої BO з основою AD. Тоді MO – середня лінія трикутника ABK. Тому AO – його медіана. Вона ж є і бісектрисою кута BAD, бо трикутник ABK рівнобедрений внаслідок рівностей $\angle ABK = \angle CBK = \angle AKB$.

Суть міркувань не зміниться і для випадку $BC > AD$.

II спосіб. Внаслідок рівностей $\angle MBO = \angle CBO = \angle MOB$ та $AM = MB$ маємо $AM = MO$. Тому $\angle MAO = \angle MOA = \angle DAO$, тобто AO – бісектриса кута BAD.

9 клас

1. Доведіть, що не існує цілих чисел m та n таких, що $m^3 - n^3 = 2021$.

2. Використовуючи по одному разові цифри від 0 до 9, запишіть найбільше натуральне число, яке ділиться на 99.

3. Учень при піднесенні до квадрату помилився і записав на дошці рівність $(a+b+2)^2 = a^2 + b^2 + 2^2$. Але для деяких цілих чисел a та b ця рівність виявилася правильною. Знайдіть усі пари (a,b) таких чисел.

4. Калькулятор Миколки має лише 4 клавіші, за допомогою яких раціональне число a можна перетворити в одне з чисел: $2a$, $\frac{a}{2}$, $3a+1$ чи $\frac{a-1}{3}$. Доведіть, що Миколка, ввівши першим число 9, після кількох натискань на клавіші зможе отримати будь-яке натуральне число від 1 до 8 включно?

5. Всередині кола довільним чином вибрали точку K, яка не лежить на діаметрі AB. Як, користуючись лише лінійкою, провести через K пряму, перпендикулярну до AB? (Нагадуємо, що у задачах на побудову лінійкою дозволяється лише проводити прямі лінії і не можна вимірювати ні кути, ні відстані).

9.1. Оскільки $(3k)^3 = 27k^3$ та $(3k \pm 1)^3 = 27k^3 \pm 27k^3 + 9k \pm 1$, то куби цілих чисел при діленні на 9 можуть давати лише остачі 0, 1 та 8, отже, остачі їхньої різниці належать множині $\{0,1,2,7,8\}$. Водночас остача 5, отримана при діленні 2021 на 9, до цієї множини не належить. Тому вказаних цілих чисел m та n не існує.

9.2. Оскільки сума всіх цифр від 0 до 9 дорівнює 45, то за будь-якого їх порядку записане ними число буде ділитися. Тому потрібно, щоб воно ділилося і на 11. Для цього на 11 повинна ділитися різниця між сумами цифр, записаних на парних та непарних позиціях відповідно. Враховуючи, що 45 – непарне число, ця різниця також має бути непарною. Дорівнювати за абсолютною величиною 33 або більше вона не може, бо сума навіть п'яти найменших цифр більша за 6, отже, вона може бути лише 11. З іншого боку, шукане число буде найбільшим, якщо його перші 5 цифр є такими: 98765. Тоді для досягнення потрібної різниці сума решти двох цифр на непарних позиціях має дорівнювати 7, а сума решти трьох цифр на парних позиціях – дорівнювати 3. Такі набори з цифр від 0 до 4 отримуються єдиним способом. Записуючи їх на відповідних позиціях за спаданням, отримаємо шукане число 9876524130.

9.3. Оскільки насправді $(a+b+2)^2 = a^2+b^2+2^2+2ab+4a+4b$, то знаходження шуканих пар (a,b) запишемо рівність $ab+2a+2b=0$ у вигляді $(a+2)(b+2)=4$. Обидва множники у лівій частині останньої рівності мають бути дільниками числа 4. Враховуючи, що

$$4=1\cdot 4=2\cdot 2=4\cdot 1=(-1)\cdot(-4)=(-2)\cdot(-2)=(-4)\cdot(-1),$$

отримаємо шукані 6 пар (a,b):

$$(-1,2),\ (0,0),\ (2,-1),\ (-3,-6),\ (-4,-4),\ (-6,-3).$$

9.4. Спочатку доведемо, що число 1 Миколці отримати вдасться:

$$9\xrightarrow{(3)}28\xrightarrow{(2)}14\xrightarrow{(2)}7\xrightarrow{(4)}2\xrightarrow{(2)}1.$$

Далі наводимо спосіб збільшення кожного натурального числа на 1:

$$n\xrightarrow{(2)}\frac{n}{2}\xrightarrow{(2)}\frac{n}{4}\xrightarrow{(3)}\frac{3n}{4}+1\xrightarrow{(1)}\frac{3n}{2}+2\xrightarrow{(1)}3n+4\xrightarrow{(4)}n+1.$$

9.5. Проведемо прямі AK та BK до перетину з колом у точках A_1 та B_1 відповідно і позначимо точку перетину прямих AB_1 та BA_1 через C (див. малюнок справа). Оскільки кути, які спираються на діаметр, є прямими, то K – точка перетину двох висот трикутника ABC, отже, і третьої його висоти. Тому шуканою прямою, перпендикулярною до AB, є пряма CK.

10 клас

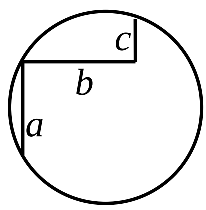
1. Розставте у квадраті 10×10 дванадцять прямокутників розмірами 1×4 так, щоб кожен з них покривав повністю 4 клітинки квадрата, і жодні два прямокутники не перетиналися між собою та не торкалися один одного навіть вершинами. Або ж доведіть, що зробити це неможливо.

2. Знайдіть усі квадратні тричлени $f(x)=ax^2+bx+c$, для яких при кожному значенні x правильною є рівність $f(x+1)=f(-x)$.

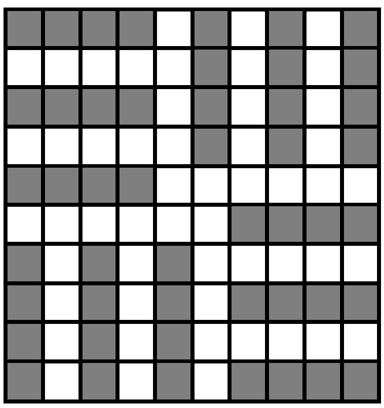
3. Серед 21 однакових на вигляд монет є 10 фальшивих. Усі справжні монети важать однаково, частина фальшивих монет на 1 грам легша, а інші фальшиві монети на 1 грам важчі за справжні. Марійка за одне зважування може покласти на кожну з двох шальок однакову кількість монет, і стрілка покаже різницю між їх масами у грамах. За яку найменшу кількість зважувань Марійка зможе дізнатися, чи вибрана нею навмання монета є справжньою?

4. Вкажіть найбільше натуральне число $k\le2021$, для якого знайдуться натуральні числа m та n такі, що $2^{m+n}=2^m+2^n+k$.

5. Знайдіть радіус кола, зображеного на малюнку справа, якщо кути між сусідніми ланками заданої всередині нього ламаної є прямими, а їхні довжини дорівнюють a, b та c відповідно.



10.1. Це можна зробити, наприклад, так:



10.2. Підставимо у подану рівність $x=0$. Тоді $f(1)=f(0)$, тобто $a+b+c=c$. Отже, усі такі тричлени задовольняють умову $b=-a$.

Доведемо, що при кожному $a\neq 0$ та довільному значенні c тричлени $f(x)=ax^2-ax+c$ є шуканими. Справді, при цьому

$$f(x+1)=a(x+1)^2-a(x+1)+c=ax^2+ax+c=f(-x).$$

До цього ж висновку можна прийти, аналізуючи тотожність

$$f(x+1)=a(x+1)^2+b(x+1)+c\equiv a(-x)^2+b(-x)+c=f(-x).$$

10.3. Зрозуміло, що без зважувань зробити це не вдасться. А ось одного зважування може бути достатньо. Нехай маса справжньої монети дорівнює a грамів, n фальшивих на 1 грам легші, а решта – на 1 грам важчі за справжні. Вибравши навмання одну монету, Марійка поставить решту 20 монет по 10 на кожну із шальок.

Якщо вибрана монета справжня і на одній із шальок всі монети виявилися справжніми, а на другій – фальшивими, то стрілка покаже різницю у грамах $n(a-1)+(10-n)(a+1)-10a=10-2n$, яка є парним числом.

Якщо тепер поміняти на шальках одну фальшиву монету місцями зі справжньою, то одна з шальок стане на 1 грам важчою, а друга на 1 грам легшою. При цьому показник стрілки зміниться на 2, але залишиться парним числом.

Такими замінами врешті решт вдасться добитися будь-якого розміщення монет на шальках, і кожного разу стрілка показуватиме парне число грамів. А у випадку випадкового вибору Марійкою фальшивої монети стрілка покаже непарне число грамів.

10.4. Запишемо рівність $2^{m+n}=2^m+2^n+k$ у вигляді

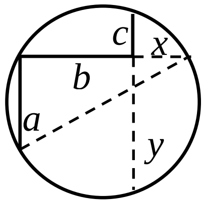
$$\left(2^m-1\right)\left(2^n-1\right)=k+1.$$

Оскільки $k+1\leq 2022$, а $2^{11}-1=2047>2022$, то жодне з чисел m та n не перевищує 10. Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що $m\geq n$. Далі, для фіксованих $m\leq 10$ будемо шукати максимальні значення $n\leq m$ такі, що $\left(2^m-1\right)\left(2^n-1\right)\leq 2022$:

$$\left(2^{10}-1\right)\left(2^{1}-1\right)=1023,\quad \left(2^{9}-1\right)\left(2^{2}-1\right)=1533,\quad \left(2^{8}-1\right)\left(2^{3}-1\right)=1785,$$
$$\left(2^{7}-1\right)\left(2^{4}-1\right)=1905,\quad \left(2^{6}-1\right)\left(2^{5}-1\right)=1953.$$

Таким чином, найбільшим значенням такого добутку є 1953. Відповідно, шукане значення $k=1952$. Йому відповідають пари натуральних чисел $m=6, n=5$ та $m=5, n=6$.

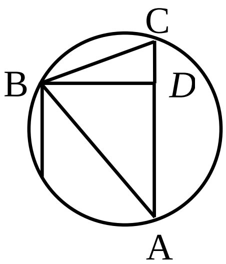
10.5. I спосіб. Проведемо додатково ще три відрізки пунктирними лініями (див. малюнок справа).



Оскільки $y=a+c$, $cy=bx$, то $b+x=b+\dfrac{c(a+c)}{b}$. Тоді з прямокутного трикутника з катетами a та $b+x$ за теоремою Піфагора знаходимо його гіпотенузу – діаметр заданого кола, половина якого – шуканий радіус

$$R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+\left(b+\frac{c(a+c)}{b}\right)^2}.$$

II спосіб. Розглянемо трикутник ABC, висота якого $BD=b$ та $CD=c$, $AD=a+c$ (див. малюнок справа). Записуючи його площу двома способами, отримаємо рівність $AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABC=BD\cdot AC$. Але $AC=2R\cdot\sin\angle ABC$, тому



$$R=\frac{AB\cdot BC}{2BD}=\frac{1}{2b}\sqrt{\left(b^2+(a+c)^2\right)\left(b^2+c^2\right)}.$$

Нескладно переконатися, що ці два вирази для R є тотожними.

11 клас

1. Учитель записав на дошці n різних двоцифрових чисел і знайшов модулі всіх попарних їх різниць. При якому найменшому значенні n принаймні один з таких модулів гарантовано запишеться двома однаковими цифрами?

2. Миколка заповнив клітинки таблиці 3×3 натуральними числами, не обов'язково різними. Він стверджує, що суми чисел у кожному рядку, кожному стовпчику та на кожній з діагоналей отриманої

таблиці дорівнюють 2021. Чи можуть його слова бути правдою? Якщо так, то наведіть приклад таблиці з такими властивостями.

3. Знайдіть усі значення параметрів a, b, c, при яких для всіх допустимих x правильною є рівність $a \cdot \mathrm{ctg} x + b \cdot \cos x + c \cdot \sin x = 0$.

4. Вкажіть хоч одне x таке, що $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1} = \left(1+\frac{1}{11}\right)^{11}$.

5. Всередині кола з центром у точці O довільним чином вибрали точки M та N, відмінні від O. Користуючись лише лінійкою, проведіть дві паралельні прямі, одна з яких проходить через точку M, а друга – через точку N. (Нагадуємо, що у задачах на побудову лінійкою дозволяється лише проводити прямі лінії і не можна вимірювати ні кути, ні відстані).

11.1. Щоб такий модуль був записаний двома однаковими цифрами, він повинен ділитися на 11. При діленні на 11 можливі лише 11 різних остач. Тому для $n \geq 12$ знайдуться принаймні два записані вчителем числа, модуль різниці яких ділиться на 11, отже, записується двома однаковими цифрами.

Для $n \leq 11$ такого гарантувати не вдасться. Достатньо розглянути набір чисел: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20. Модуль різниці жодних двох із них не перевищує 10, отже, не може бути записаний двома однаковими цифрами. Тому $n = 12$ – найменше шукане значення.

11.2. Не можуть. Розглянемо загальнішу задачу, вважаючи, що кожна з таких восьми сум дорівнює цілому числу S, а у центрі таблиці знаходиться натуральне число a. При обчисленні вказаних сум воно пораховане 4 рази, числа у кутових клітинках – тричі, а в інших чотирьох клітинках – двічі. Тому, додавши ще дві суми по рядку та стовпчику, які містять центральну клітинку таблиці, отримаємо разом 10 сум, у яких число a пораховане 6 разів, а числа в усіх інших клітинках – тричі. Таким чином, матимемо рівність $10S = 9S + 3a$, звідки $S = 3a$, тобто S ділиться на 3. Оскільки ж 2021 на 3 не ділиться, то слова Миколки не можуть бути правдою.

11.3. Підставивши у подану рівність $x=\frac{\pi}{2}$, знайдемо $c=0$. Далі, підставляючи $x=\frac{\pi}{4}$ та $x=-\frac{\pi}{4}$, для визначення коефіцієнтів a та b отримаємо рівняння $a+\frac{b}{\sqrt{2}}=0$ та $-a+\frac{b}{\sqrt{2}}=0$ відповідно. З них знаходимо $a=b=0$. Отже, подана тотожність можлива лише за умови, що всі значення параметрів a, b, c є нулями.

Нескладно переконатися, що за таких значень параметрів вона є правильною.

11.4. Запишемо ліву частину рівняння у вигляді

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}=\left(\frac{x}{x+1}\right)^{-(x+1)}=\left(\frac{(x+1)-1}{x+1}\right)^{-(x+1)}=\left(1+\frac{1}{-(x+1)}\right)^{-(x+1)}.$$

Покладаючи $-(x+1)=11$, знаходимо $x=-12$.

Зрозуміло, що наведених міркувань недостатньо для того, щоб зробити висновок про єдиність знайденого x.

11.5. Спочатку проведемо через точку O довільний діаметр AB цього кола так, щоб він не проходив через жодну з точок M та N і не був перпендикулярний до прямої MN. Далі, використовуючи ідею розв'язання задачі 9.5, проводимо через точки M та N прямі, перпендикулярні до AB. Зрозуміло, що такі прямі будуть паралельними.

Примітка. Замість візуальної перевірки, що діаметр AB не є перпендикулярним до MN, можна провести два діаметри. Принаймні один з них гарантовано задовольнятиме цю умову.