Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

Розв'язки завдань другого туру дистанційного етапу Всеукраїнської олімпіади з математики для професійної орієнтації вступників на базі повної загальної середньої освіти 2020-2021

www.mif.pnu.edu.ua

1. За яку найменшу кількість розламів можна повністю розламати шоколадку розміром 4×8 на шматочки? Ламати можна тільки вздовж прямих, що є заглибленнями на шоколадці. Ламати більше одного шматка одночасно не можна.

Розв'язання. Після кожного розламування стає на один шматочок більше, спершу їх 1, а у кінці 32. Тому, незалежно від обраного способу, знадобиться $32 - 1 = 31$ розламувань.

2. Розв'яжіть рівняння $\big||x - 1000| - 2000\big| = |x - 5000|$.

Розв'язання. Один з можливих способів спростити розв'язування і уникнути перебору різних можливих знаків виразів полягає у використанні факту, що модулі двох чисел рівні тоді і тільки тоді, коли ці числа рівні або протилежні. У нашому рівнянні ліва і права сторони під модулями, тому шукані x — це всі корені рівняння $|x - 1000| - 2000 = x - 5000$ або рівняння $|x - 1000| - 2000 = -(x - 5000)$, які після спрощення стають рівняннями $|x - 1000| = x - 3000$ або $|x - 1000| = 7000 - x$.

Якщо x задовольняє перше рівняння, то права сторона $x - 3000$ невід'ємна, тому $x \geq 3000 > 1000$, і $|x - 1000| = x - 1000$, і рівняння зводиться до $x - 1000 = x - 3000$, що неможливо.

Якщо $x < 1000$, то у другому рівнянні $|x - 1000| = 1000 - x = 7000 - x$, що теж неможливо, отже рівність можлива тільки при $x \geq 1000$, звідки

$|x - 1000| = x - 1000 = 7000 - x$, що дає $x = 4000$ — єдиний корінь рівняння.

3. 100 пронумерованих фішок стоять в ряд у порядку зростання. Будь-які дві фішки, які стоять через одну, можна міняти місцями. Чи вдасться розташувати фішки в зворотному порядку?

Розв'язання. При кожній описаній перестановці обмінюються місцями дві фішки, розташовані на непарних місцях, або дві фішки, розташовані на парних. У будь-якому випадку фішка, що стояла на непарному місці, ніколи не потрапить на парне, зокрема, 1-а ніколи не стане 100-ою. Отже, розташувати фішки у зворотному порядку не вдасться.

4. Якщо килим стане на 1 м довшим і на 1 м вужчим, його площа зменшиться на 3 м^2. На скільки зміниться площа килима, якщо його зробити ще на 1 м довшим і на 1 м вужчим?

Розв'язання. Нехай початкові довжина і ширина килима — відповідно x та y. Після першого перетворення площа килима стане рівною $(x + 1) \cdot (y - 1) = xy - x + y - 1$, що на 3 менше від початкової площі xy, звідки $xy - x + y - 1 = xy - 3$, і $x - y = 2$. Якщо килим подовжити і звузити ще на метр, його площа буде рівною $(x + 2) \cdot (y - 2) = xy - 2x + 2y - 4 = xy - 2(x - y) - 4 = xy - 4 - 4 = xy - 8$, тобто стане на 8 м^2 меншою за початкову і на 5 м^2 меншою за площу після першої зміни.

5. Сума 13 різних натуральних чисел рівна 92. Знайдіть ці числа.

Розв'язання. Розташуємо числа у порядку зростання. Перше з них не менше за 1, друге — більше за попереднє, тому не менше за 2, ..., останнє — не менше за 13, відповідно їх сума не менша за

$$1 + 2 + \ldots + 13 = \frac{1 + 13}{2} \cdot 13 = 7 \cdot 13 = 91.$$

Тепер зрозуміло, як отримати бажану суму — збільшити на 1 останній доданок: $1 + 2 + 3 + \ldots + 11 + 12 + 14 = 91 + 1 = 92$. Припустимо, що існують інші натуральні числа $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{12} < a_{13}$, сума яких теж рівна 92. Нехай k — найменший номер, для якого a_k відрізняється від k, тоді $a_k > k$. Якщо $k < 13$, то $a_{k+1} > a_k$, отже, $a_{k+1} \geq a_k + 1 > k + 1$, аналогічно $a_{k+2} > k + 2, \ldots, a_{13} > 13$. Отже, доданки з номерами k, $k + 1, \ldots, 13$ принаймні на одиницю більші за відповідні доданки суми $1 + 2 + \ldots + 13$. При $k < 13$ їх принаймні два, тому вся сума не менша за $91 + 2 = 93$, і отримати 92 у інший спосіб не вдасться.

6. Розв'яжіть нерівність $\dfrac{1}{x-1} - 1 > \dfrac{1}{x}$.

Розв'язання. Звівши до спільного знаменника, отримаємо

$$\frac{x - (x^2 - x) - (x - 1)}{x(x-1)} > 0,$$

тобто $\dfrac{-x^2 + x + 1}{x(x-1)} > 0$, чи $\dfrac{x^2 - x - 1}{x(x-1)} < 0$. Щоб розкласти чисельник на множники, знайдемо корені рівняння $x^2 - x - 1 = 0$, а саме $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ та $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Тоді нерівність набуває вигляду $\dfrac{(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2})(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2})}{x(x-1)} < 0$. Розв'язавши її методом інтервалів, отримуємо відповідь :
$x \in (\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}; 0) \cup (1; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2})$.

7. У льосі — 20 однакових банок з варенням. У 8 банках полуничне варення, в 7 — малинове, в 5 — вишневе. Яке найбільше число банок, які можна в темряві винести з льоху з упевненістю, що там залишилося ще хоча б 4 банки одного сорту варення і 3 банки іншого?

Розв'язання. Якщо винести не менш, ніж 8 банок, то може виявитись, що винесли принаймні 5 банок малинового варення і принаймні 3 банки вишневого. Тоді малинового і вишневого варення залишиться не більше, ніж по дві банки, і вимога задачі не буде виконана.

Припустимо, що винесли 7 банок, і серед того, що залишилось не можна знайти 4 банки одного сорту варення і 3 банки іншого. Тоді або банок якихось двох сортів менше, ніж по дві, або всіх сортів менше, ніж по три. У першому випадку залишиться не більше, ніж $8 + 2 + 2 = 12$ банок, тобто винесено ≥ 8 — суперечність. У другому випадку залишається не більше, ніж $3 + 3 + 3 = 9$ банок, що тим більше неможливо. Отже, 7 банок — це найбільша кількість, винісши яку в темряві з льоху, можна бути певним, що вимогу в умові буде виконано.

8. Скільки треба взяти доданків суми $1+2+3+4+5+\ldots$, щоб вийшло тризначне число, що складається з однакових цифр?

Розв'язання. Тризначне число вигляду $\overline{aaa}$ рівне $a \cdot 111 = a \cdot 3 \cdot 37$. З іншого боку, сума $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n$ рівна $\dfrac{n(n+1)}{2}$, отже, повинно виконуватись $\dfrac{n(n+1)}{2} = 111a$, тобто $n(n+1) = 2 \cdot 3 \cdot 37 \cdot a$, $1 \leq a \leq 9$ — натуральне. Тому чи n, чи $n + 1$ повинне ділитись на просте число 37. Найменші претенденти — це $n = 36$ і $n = 37$. Для $n = 36$ маємо $36 \cdot 37 = 2 \cdot 3 \cdot 37 \cdot 6$, тобто $a = 6$, і $1+2+3+4+5+\ldots+36 = 666$. Якщо $n = 37$, то $n + 1 = 38 = 2 \cdot 3 \cdot a$, де a — одноцифрове, що неможливо. Наступний кандидат — $n = 73$, але тоді сума рівна $\frac{73 \cdot 74}{2} = 2701$, тобто має більш, ніж три цифри, а тим більше трицифровість неможлива для більших n.

Отже, єдина кількість, при якій утворюється тризначне число, що складається з однакових цифр, рівна $n = 36$.

9. Якщо до 20 додати 16, вийде 36 — повний квадрат. Якщо від 20 відняти 16, матимемо 4 — теж повний квадрат. Чи існують ще натуральні числа, які стають повними квадратами і після додавання, і після віднімання 16?

Розв'язання. За умовою для такого натурального числа n маємо $n + 16 = a^2$, $n-16 = b^2$, де a і b теж натуральні. Тоді $a^2-b^2 = (a-b)(a+b) = 32$. Бачимо, що $a - b < a + b$ — натуральні числа однакової парності, добуток яких рівний 32. Існують дві такі пари, а саме $a - b = 4$, $a + b = 8$ та $a - b = 2$, $a + b = 16$. У першому випадку отримуємо $a = 6$, $b = 2$, а у другому $a = 9$, $b = 7$, що відповідає вже відомому нам числу $n = 20$ та ще одному значенню $n = 65$. Дійсно, $65 - 16 = 49 = 7^2$, $65 + 16 = 81 = 9^2$.

Отже, існує два числа, що задовольняють вимогу задачі.

10. Чи існує прямокутний трикутник, у якого радіус вписаного кола вдвічі менший за радіус описаного?

Розв'язання. Припустимо, що катети такого трикутника рівні a і b, а гіпотенуза — c. Відомо, що для прямокутного трикутника радіуси вписаного та описаного кола визначаються відповідно формулами $r = \dfrac{a+b-c}{2}$ та $R = \dfrac{c}{2}$, тому виконується рівність $2r = R$, тобто $a + b - c = \dfrac{c}{2}$, $a + b = \frac{3}{2}c$. Піднісши до квадрату, отримаємо $a^2 + 2ab + b^2 = \frac{9}{4}c^2$. Враховуючи $c^2 = a^2 + b^2$, маємо $\frac{9}{4}a^2 + \frac{9}{4}b^2 - a^2 - 2ab - b^2 = 0$, або $\frac{1}{4}(a^2 + b^2) + (a^2 - 2ab + b^2) = \frac{1}{4}(a^2 + b^2) + (a - b)^2 = 0$. Останній вираз є сумою квадратів і не може бути нульовим при ненульових a, b, тому шуканого трикутника не існує.

Голова предметно-методичної комісії