

**Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника**

**Завдання першого туру дистанційного етапу
Всеукраїнської олімпіади з математики
для професійної орієнтації вступників
на базі повної загальної середньої освіти**

www.mif.pnu.edu.ua

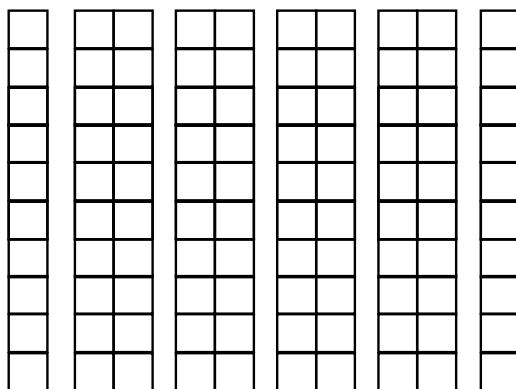
1. Розв'яжіть рівняння

$$3^{2x+1} - 3^x - 2 = 0.$$

2. У класі число відсутніх учнів становить $\frac{1}{6}$ від числа присутніх. Коли з класу вийшов один учень, число відсутніх стало рівне $\frac{1}{5}$ від числа присутніх. Скільки всіх учнів у класі?

3. Знайти всі двоцифрові натуральні числа, які збільшуються у 9 разів, якщо між цифрою десятків і цифрою одиниць вставити нуль.

4. Село Зомбилівка складається з п'яти паралельних вулиць, з обох боків кожної з яких — по десять однакових ділянок, див. рисунок:



Господар кожної з ділянок повинен відгортати сніг з тротуару перед своєю ділянкою, але жителі частенько лінуються... Тому сільрада вирішила вакцинувати деяких з господарів, щоб вживити їм чіпи в організм.

Вакцинований господар за переданою через 5G командою сільради не тільки відгортає сніг перед своєю ділянкою, але й може змусити до цього двох вказаних у команді найближчих (через паркан чи через вулицю) сусідів.

Яку найменшу кількість вибраних сільрадою господарів потрібно щепити, щоб бути певним, що сніг буде розчищено, якщо :

- 1) сільрада розташована за селом?
- 2) сільрада розташована в селі невідомо, на якій ділянці, і сама розчищає тротуар перед собою?

5. Сусіднє село Антиваксівка має таку ж форму, але його жителі принципово відмовились щепитися з релігійних переконань. Коли сільрада Антиваксівки (розташована за селом) пообіцяла кожному щепленому господареві по 1000 гривень, до ранку всі господарі вишикувались в черзі на вакцинацію (невідомо, у якому порядку).

Яку найменшу кількість господарів потрібно щепити у порядку їх живої черги, щоб бути певним, що сніг буде розчищено?

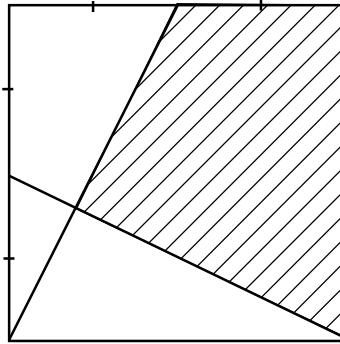
6. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} x^3 = y + 24; \\ y^3 = x + 24. \end{cases}$$

7. На тропічному острові в теплих морях вчителі отримують щомісяця по 100 сольдо. Щоб підтримати їх, президент острова видав указ, що у наступні місяці зарплатні становитимуть відповідно 200, 300, 400 і так далі сольдо. Одночасно Кабінет міністрів видав постанову, що за вхід у школу з наступного місяця з зарплатні кожного вчителя щомісячно відраховуватиметься відповідно 1, 2, 4, 8 і т.д. сольдо.

Вчитель математики задумується про пенсію, яка на острові дорівнює половині останньої отриманої місячної зарплатні. Через скільки місяців ви б порадили йому вийти на пенсію? Скільки сольдо щомісяця він тоді отримуватиме? Його колега вчитель фізики вирішив пропрацювати на півроку довше, ніж математик. Якою буде його пенсія?

8. Знайдіть площу заштрихованої частини одиничного квадрата.



9. Знайдіть всі пари натуральних чисел a і b , для яких

$$a^3 + b^3 = 10(a^2 + b^2).$$

Примітка. Цю задачу можна розв'язати з допомогою програми на C/C++, Python чи Java, якщо разом з програмою буде надіслано обґрунтування її правильності.

10. Скільки розв'язків у дійсних числах має рівняння:

$$x^{2021} + x^{2020} + \dots + x^2 + x = 2021 ?$$

“Затверджую”

Голова оргкомітету

Голова предметно-методичної комісії

Дата оприлюднення : 10 грудня 2021 року

Розв'язання та їх можливі доповнення або виправлення надіслати до :

25 січня 2022 року

Поштова адреса: Факультет математики та інформатики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника, вул. Шевченка 57/317, Івано-Франківськ, 76018

Електронна адреса: katg@pnu.edu.ua , тема листа “Олімпіада”