Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника

Розв'язки завдань першого туру дистанційного етапу Всеукраїнської олімпіади з математики для професійної орієнтації вступників на базі повної загальної середньої освіти 2021-2022

www.mif.pnu.edu.ua

1. Розв'яжіть рівняння

$$3^{2x+1} - 3^x - 2 = 0.$$

Розв'язання. Позначимо $3^x = t$, тоді $t > 0$, і рівняння набуває вигляду $3t^2 - t - 2 = 0$. Квадратне рівняння має корені $t_1 = -\frac{2}{3}$ (сторонній, оскільки не задовольняє $t > 0$) та $t_2 = 1$. Тоді з $3^x = 1$ отримуємо $x = 0$ — єдиний розв'язок початкового рівняння.

2. У класі число відсутніх учнів становить 1/6 від числа присутніх. Коли з класу вийшов один учень, число відсутніх стало рівне 1/5 від числа присутніх. Скільки всіх учнів у класі?

Розв'язання. Спершу співвідношення між відсутніми і присутніми учнями становило $1 : 6$, тому з усіх x учнів класу відсутніх було $\frac{x}{7}$. Коли вийшов ще один учень, співвідношення стало рівним $1 : 5$, тобто відсутніх стало $\frac{x}{6}$. Отже:

$$\frac{x}{7} + 1 = \frac{x}{6} \iff \frac{x}{6} - \frac{x}{7} = 1 \iff \frac{x}{42} = 1,$$

звідки отримуємо $x = 42$ — загальну чисельність учнів у класі.

3. Знайти всі двоцифрові натуральні числа, які збільшуються у 9 разів, якщо між цифрою десятків і цифрою одиниць вставити нуль.

Розв'язання. Якщо у шуканому числі x десятків і y одиниць, то воно рівне $\overline{xy} = 10x + y$. Після вставлення нуля отримаємо число $\overline{x0y} =$

$100x + y$. Нам потрібно, щоб $\overline{x0y} = 9 \cdot \overline{xy}$, тобто $100x + y = 9(10x + y) \iff 10x = 8y \iff 5x = 4y$. Тоді y повинне ділитись на 5, звідки маємо єдину можливість $y = 5$, $x = 4$, і єдиним таким числом є 45.

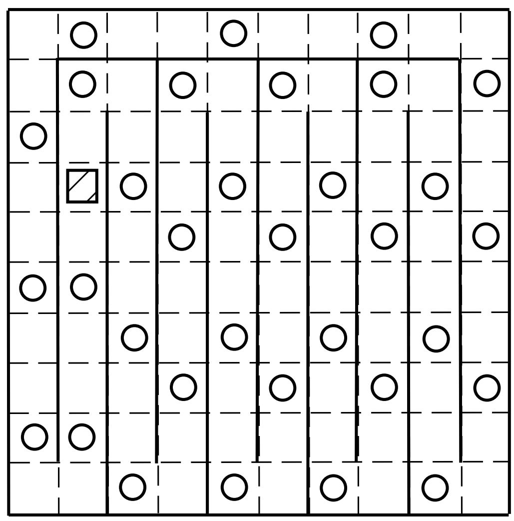
4. Село Зомбилівка складається з п'яти паралельних вулиць, з обох боків кожної з яких — по десять однакових ділянок.

Господар кожної з ділянок повинен відгортати сніг з тротуару перед своєю ділянкою, але жителі частенько лінуються... Тому сільрада вирішила вакцинувати деяких з господарів, щоб вживити їм чіпи в організм. Вакцинований господар за переданою через 5G командою сільради не тільки відгортає сніг перед своєю ділянкою, але й може змусити до цього двох вказаних у команді найближчих (через паркан чи через вулицю) сусідів.

Яку найменшу кількість вибраних сільрадою господарів потрібно щепити, щоб бути певним, що сніг буде розчищено, якщо :

1) сільрада розташована за селом?
2) сільрада розташована в селі невідомо, на якій ділянці, і сама розчищає тротуар перед собою?

Розв'язання.



Оскільки несуттєво, чи ділянки розділені вулицею, чи парканом, зобразимо село як квадрат з клітинок розміру 10×10. Почнемо з випадку 2).

Як бачимо, всі ділянки можна “обійти змійкою”, пройшовши по кожній рівно один раз. Почнемо з сільради і підемо по “змійці” у будь-якому напрямку. З кожних трьох ділянок підряд оберемо середню, прищепимо її ґазду і зобов’яжемо його змусити до роботи попереднього і наступного господаря. Доведеться прищепити $(100 - 1) : 3 = 33$ господарів, позначених на схемі кружечками (сільраду позначено квадратиком). Бачимо, що сніг скрізь буде розчищено.

Якщо щеплено $n < 33$ господарів, то заштрихуємо для кожного з них його ділянку та ділянки двох “підшефних” сусідів. Разом з ділянкою біля сільради так ми гарантуємо прибирання снігу на не більш, ніж $3n + 1$ заштрихованих ділянках, що менше за $3 \cdot 33 + 1 = 100$, тобто нема гарантії порядку на всіх тротуарах.

Отже, для сільради в селі мінімальна кількість щеплених, що гарантує успіх, рівна 33.

У випадку 1) аналогічно доводиться, що потрібно прищепити принаймні 34 господарів (наприклад, ще одного на місці, де зображена сільрада).

5. Сусіднє село Антиваксівка має таку ж форму, але його жителі принципово відмовились щепитися з релігійних переконань. Коли сільрада Антиваксівки (розташована за селом) пообіцяла кожному щепленому господареві по 1000 гривень, до ранку всі господарі вишикувались в черзі на вакцинацію (невідомо, у якому порядку).

Яку найменшу кількість господарів потрібно щепити у порядку їх живої черги, щоб бути певним, що сніг буде розчищено?

Розв’язання. Якщо прищепити 98 господарів, то кожен з двох нещеплених має не менш, ніж двох сусідів, принаймні один з яких щеплений і змусить нещепленого розчистити сніг. Варіантів розташування двох нещеплених, при яких у них тільки один спільний щеплений сусід, нема, тому кожному можна призначити окремого “наглядача”. Отже, 98 щеплених достатньо.

Якщо прищеплено не більш, ніж 97 господарів, то може трапитись, що серед нещеплених — господар однієї з кутових ділянок і два його сусіди. Тоді нема певності, що тротуар перед кутовою ділянкою буде розчищено.

Отже, мінімум, що гарантує результат — 98 господарів.

6. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} x^3 = y + 24; \\ y^3 = x + 24. \end{cases}$$

Розв'язання. Віднявши рівняння системи, отримаємо, що для її розв'язків повинно виконуватись $x^3 - y^3 = y - x$, тобто

$$x^3 - y^3 + x - y = 0 \iff (x - y)(x^2 - xy + y^2 + 1) = 0.$$

Вираз $x^2 - xy + y^2$ (неповний квадрат різниці) завжди є невід'ємним, наприклад, через те, що $x^2 - xy + y^2 = (x - \frac{y}{2})^2 + \frac{3y^2}{4}$, звідки $x^2 - xy + y^2 + 1 \geq 1$, і друга дужка у останньому рівнянні є ненульовою. Отже, для можливих розв'язків системи повинно бути $x = y$.

Це можна обґрунтувати і простіше: вираз x^3 строго зростає при зростанні x. Якби виконувалось $x < y$, то було б $x^3 - y^3 < 0$, $y - x > 0$, тому рівність $x^3 - y^3 = y - x$ була б неможливою. Аналогічно виключаємо $x > y$.

Тому $y = x$, і система зводиться до рівняння $x^3 = x + 24$, тобто $x^3 - x - 24 = 0$. Легко помітити корінь $x = 3$. Тоді за теоремою Безу многочлен $x^3 - x - 24$ ділиться на $x - 3$. Поділивши в стовпчик, маємо $x^3 - x - 24 = (x - 3)(x^2 - 3x + 8)$. Квадратний тричлен $x^2 - 3x + 8$ коренів не має, тому єдиним розв'язком системи є $x = y = 3$.

7. На тропічному острові в теплих морях вчителі отримують щомісяця по 100 сольдо. Щоб підтримати їх, президент острова видав указ, що у наступні місяці зарплатні становитимуть відповідно 200, 300, 400 і так далі сольдо. Одночасно Кабінет міністрів видав постанову, що за вхід у школу з наступного місяця з зарплатні кожного вчителя щомісячно відраховуватиметься відповідно 1, 2, 4, 8 і т.д. сольдо.

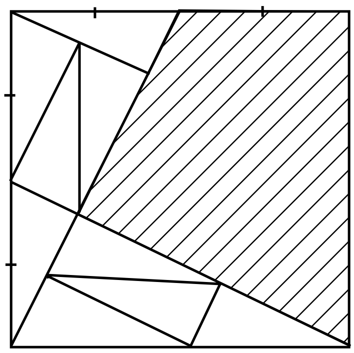
Вчитель математики задумується про пенсію, яка на острові дорівнює половині останньої отриманої місячної зарплатні. Через скільки місяців ви б порадили йому вийти на пенсію? Скільки сольдо щомісяця він тоді отримуватиме? Його колега вчитель фізики вирішив пропрацювати на півроку довше, ніж математик. Якою буде його пенсія?

Розв'язання. У наступні місяці зарплата вчителя змінюватиметься відповідно на $100-1$, $100-1$, $100-2$, $100-4$, $100-8$ і т.д. сольдо. Отже, за n-ий місяць (де $n > 1$, тобто, крім першого), зміна зарплати становитиме $100-2^{n-2}$. Якщо $n \le 8$, то $2^{n-2} \le 2^{8-2} = 2^6 = 64 < 100$, тому до восьмого місяця включно отримана зарплата зростатиме, а при $n \ge 9$ матимемо $2^{n-2} \ge 2^{9-2} = 2^7 = 128 > 100$, і $100-2^{n-2} < 0$ — зарплата почне зменшуватись.

Тому математикові доречно вийти на пенсію за 8 місяців. Тоді зарплата досягне $900-2^7 = 772$ сольдо, і пенсія становитиме $772/2 = 386$ сольдо.

Остання зарплата працьовитого фізика буде рівною $1500-2^{13} = 1500-8192 = -6692$, а пенсія відповідно -3346 сольдо, тобто він трохи підтримуватиме матеріально рідний острів.

8. Знайдіть площу заштрихованої частини одиничного квадрата.



Розв'язання. З малюнка видно, що трикутник, що складає чверть квадрата, ділиться на 5 рівних менших прямокутних трикутників, які, отже, мають площі по $\frac{1}{20}$. Поза заштрихованою частиною таких трикутників 9, отже, її площа $1-\frac{9}{20} = \frac{11}{20}$.

9. Знайдіть всі пари натуральних чисел a і b, для яких

$$a^3 + b^3 = 10(a^2 + b^2).$$

Розв'язання. Одну з пар видно відразу — це $(10, 10)$. Якщо записати рівняння як $a^2(a - 10) + b^2(b - 10) = 0$, бачимо, що при $a > 10$ маємо $a^2(a-10) > 0$, тому повинно бути $b^2(b-10) < 0$, звідки $b < 10$. І навпаки, якщо $a < 10$, то $b > 10$.

Припустимо для конкретності, що $a > 10$, $b < 10$. Тоді $a^2(a - 10) = b^2(10-b) < 9^2 \cdot 9 = 729$. Вираз $a^2(a-10)$ при $a > 10$ зростає зі зростанням a. Якщо підставити $a = 14$, отримаємо $a^2(a - 10) = 784 > 729$, тому a не може перевищувати 13. Маємо варіанти $a = 11$, $a = 12$ чи $a = 13$. Але натуральне число $b^2(10 - b)$ при $1 \leq b \leq 9$ не може мати простих співмножників 11 чи 13, які матиме $a^2(a - 10)$ при $a = 11$ або $a = 13$, тому залишається тільки $a = 12$. Отже, $b^2(10 - b) = 12^2(12 - 10) = 288$, звідки b парне. Неважко переконатись, що жодне парне $b < 10$, тобто $b = 2, 4, 6, 8$, не дає значення $b^2(10 - b) = 288 = 2^5 \cdot 3^2$.

Отже, натуральних чисел $a > 10$, $b < 10$, як і $a < 10$, $b > 10$, які задовольняють рівність $a^3 + b^3 = 10(a^2 + b^2)$, не існує, і $a = b = 10$ є єдиною шуканою парою.

Примітка. Для повного зарахування розв'язку задачі з допомогою програми на C/C++, Python чи Java вимагалось *обґрунтувати* межі, в яких варто перебирати натуральні a і b. Наприклад, вище обґрунтовано, що досить брати або $a = b = 10$, або одне з чисел між 1 і 9, а інше — між 11 і 13. Якщо межі перебору вказувались довільно при запуску, то не було гарантії, що "захоплено" всі потенційно цікаві пари.

10. Скільки розв'язків у дійсних числах має рівняння:

$$x^{2021} + x^{2020} + \ldots + x^2 + x = 2021\ ?$$

Розв'язання. Один з розв'язків є очевидним: $x = 1$. Припустимо, що існують і інші. Додамо до обох сторін рівняння 1 і помножимо на $x - 1$:

$$(x - 1)(x^{2021} + x^{2020} + \ldots + x^2 + x + 1) = 2022(x - 1).$$

Враховуючи формулу

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}),$$

запишемо рівняння як $x^{2022} - 1 = 2022(x-1)$, або ж, після перенесення, $x^{2022} - 2022x + 2021 = 0$.

Функція $y = x^{2022} - 2022x + 2021$ має похідну $y' = 2022x^{2021} - 2022$, яка строго зростає при збільшенні x. Зокрема, маємо $y' < 0$ при $x < 1$ і $y' > 0$ при $x > 1$, тому при $x = 1$ функція y набуває найменшого значення $y_{min} = 1 - 2022 + 2021 = 0$. Отже, розв'язків, відмінних від $x = 1$, рівняння $x^{2022} - 2022x + 2021 = 0$, а тому й початкове рівняння, не має.

Голова предметно-методичної комісії