

**Прикарпатський національний університет  
імені Василя Стефаника**

**Завдання другого туру дистанційного етапу  
Всеукраїнської олімпіади з математики  
для професійної орієнтації вступників  
на базі повної загальної середньої освіти  
(2023)**

**[www.mif.pnu.edu.ua](http://www.mif.pnu.edu.ua)**

1. Організація з Безпеки і Співробітництва у Середзем'ї запропонувала провести міжнародні переговори між ельфами та орками задля встановлення остаточного світового порядку, миру і дружби. Для цього за круглим столом повинні зібратися по 6 делегатів від кожної раси. Головуючий Гендальф не вірить у компроміс і заляв стіл переговорів (за яким він не сидить) так, що після кожного його плескання у долоні з усіма учасниками одночасно стаються такі зміни:

- якщо орк сидить між двома ельфами, він стає ельфом;
- якщо ельф сидить між двома орками, він стає орком.

Чи може Гендальф розсадити учасників так, щоб після скінченної кількості плескань більшість учасників стали ельфами? Яку найбільшу кількість ельфів, які вже не змінюються після плескань, так можна досягти?

2. Розв'яжіть нерівність  $x + 1 > 2\sqrt{x}$ .

3. Скількома способами можна заповнити зірочки цифрами так, щоб отримати правильно виконане віднімання у стовпчик, і всі цифри у прикладі були різними:

$$\begin{array}{r} * * * \\ - \quad * * \\ \hline 7 \end{array}$$

4. У прямокутному трикутнику проведені з вершини прямого кута бісектриса і медіана рівні відповідно 2 см і 3 см. Знайдіть площу цього трикутника.

5. Доведіть, що числовий ребус

$$\begin{array}{r} a \quad b \quad c \quad d \\ + \quad b \quad c \quad d \quad a \\ \hline 2 \quad 0 \quad 2 \quad 3 \end{array}$$

не має розв'язку.

6. Розв'яжіть рівняння

$$\frac{1}{\sqrt{x} + 1} + \frac{1}{x - 1} = \frac{2}{3}.$$

7. Спортивний майданчик має форму круга радіуса 100 м. На його краю встановили прожектор, що може повертатись і освітлювати площу у межах прямого кута. Як зорієнтувати прожектор, щоб він освітлював найбільшу можливу частину майданчика, і якою тоді буде освітлена площа?

8. У двох горнятках налито рівні кількості чорної кави і молока. Дозволено переливати з будь-якого горнятка у інше довільну кількість рідини, ретельно перемішуючи. Чи можна з допомогою декількох таких переливань досягти того, щоб у першому горнятку молока було більше, ніж кави?

9. Знайдіть найменше з натуральних чисел, всі перестановки цифр якого дають числа, що діляться на 12.

10. Розв'яжіть систему

$$\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = 158, \\ 3x^2y + y^3 = -185. \end{cases}$$

“Затверджую”



Голова предметно-методичної комісії

Дата оприлюднення : 20 лютого 2023 року

Розв'язання та їх можливі доповнення або виправлення надіслати до :

12 квітня 2023 року

Поштова адреса: Факультет математики та інформатики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника, вул. Шевченка 57/317, Івано-Франківськ, 76018

Електронна адреса: [katg@pnu.edu.ua](mailto:katg@pnu.edu.ua)