Федак І.В.

III етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики 2022/2023 н. р. в Івано-Франківській області

III етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики 2022/2023 навчального року в Івано-Франківській області був проведений 5 лютого 2023 року на базі Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника. У ньому взяли участь 124 учні. По класах: 7 клас – 31, 8 клас – 29, 9 клас – 21, 10 клас – 22, 11 клас – 21.

У 7 класі учасники олімпіади розв'язували 4 задачі, у 8 – 11 класах – по 5 задач. Кожна задача оцінювалася у 7 балів. Завдання олімпіади були запропоновані Інститутом модернізації змісту освіти. Варіанти завдань були трьох рівнів, які відрізнялися один від одного лише у двох останніх задачах. Учні області розв'язували завдання найпростішого з них достатнього рівня. З умовами задач всіх рівнів та їх авторськими розв'язаннями можна ознайомитися за посиланням

https://matholymp.com.ua/storage/948/tekst-2022-23-tur-1-6-3.pdf

У результаті їх виконання Псюк Юрій, учень 9 класу Калуського ліцею імені Дмитра Бахматюка, отримав 100% від можливого числа балів. Але тільки 8 учнів набрали понад 50% балів, а 15 – понад третину балів, яка до внесення змін у Положення про олімпіади давала можливість учневі вважатися переможцем. А це лише близько 12% від числа всіх учасників.

Оскільки внаслідок внесених змін до такого Положення дозволяється вважати переможцем у кожному класі до 50% учасників олімпіади по цій паралелі без встановлення нижньої планки для набраних балів, то склалася доволі абсурдна ситуація, коли переможцями олімпіади стали учні, які набрали лише 5, 4, 6, 5, 5 балів у 7 – 11 класах відповідно (у 7 класі з 28, у 8 – 11 класах – з 35). Протоколи перевірки розміщені на сайті Івано-Франківського обласного інституту післядипломної педагогічної освіти

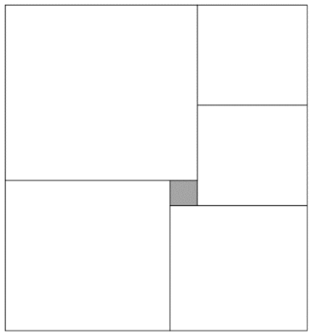
https://www.ippo.if.ua/index.php/component/content/article/82-uncategorised/2625-pidsumkovi-protokoly-iii-etapu-vseukrainskykh-olimpiad-2022-2023

Прикро, що навіть з першими трьома задачами олімпіади впевнено справилися лише 14, 1 та 3 учасники відповідно із 124, а не розв'язали їх взагалі 72, 102 та 97 учасників, що вказує як на слабку підготовку учнів, так і на не зовсім вдалий підбір задач.

Нижче наводимо власну версію розв'язань задач достатнього рівня. До окремих задач подані розв'язання, альтернативні до авторських, в інших – лише незначні їх уточнення.

Умови та розв’язання задач

7 клас



1. Прямокутник розрізаний на 6 квадратів, як це показане на малюнку справа. Сірий квадрат всередині має сторону, що дорівнює 1. Чому дорівнює площа прямокутника?

Розв’язання. Нехай сторона одного з двох рівних квадратів дорівнює x. Тоді у правого верхнього квадрата сторона дорівнює $x+1$, у лівого верхнього – дорівнює $x+2$, лівого нижнього – дорівнює $x+3$. І ми приходимо до рівняння $x+3=2x-1$, звідки $x=4$. Отже, основа прямокутника дорівнює $2x+3=11$, а висота дорівнює $2x+5=13$. Тому його площа $11\times 13=143$.

2. Дано $n \geq 3$ попарно різних дійсних чисел. Доведіть, що серед них знайдеться або 3 числа з додатною сумою, або 2 числа з від’ємною сумою.

Розв’язання. Розглянемо два найменші з цих чисел. Якщо їх сума від’ємна, то твердження задачі виконане. Якщо ні, то принаймні одне з цих чисел додатне. А тоді більше від нього третє за величиною число також додатне, і сума таких трьох чисел теж буде додатною.

3. Прості числа p, q, r, s задовольняють умову:

$$5 < p < q < r < s < p + 10.$$

Доведіть, що сума $p + q + r + s$ ділиться на 60

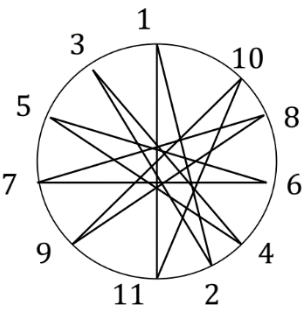
Розв’язання. Оскільки за такої умови просте число p буде непарним, то простими мають бути чотири із таких п’яти чисел: $p,\ p+2,\ p+4,\ p+6,\ p+8$. Серед будь-яких трьох послідовних непарних чисел одне ділиться на 3, а серед будь-яких п’яти таких чисел одне ділиться на 5. Щоб серед цих п’яти чисел рівно одне було кратне трьом, це мусить бути число $p+4$. Воно має ділитися і на 5, інакше у такому наборі виявиться менше простих чисел, ніж 4. Позначивши таке складене число $p+4=15k$, отримаємо:

$$p + q + r + s = p + (p + 2) + (p + 6) + (p + 8) =$$
$$= (15k-4) + (15k-2) + (15k+2) + (15k+4) = 60k.$$

Вказані умови задовольняє, наприклад, набір чисел 7, 11, 13, 17.

4. На колі задані 11 точок. Петрик деяким чином їх занумерував числами 1, 2, … , 11.Після цього були з'єднані відрізками такі пари точок: 1 та 2, 2 та 3, …, 10 та 11, 11 та1. Яка найбільша можлива кількість точок перетинів цих відрізків могла утворитися? Самі задані 11 точок в якості точок перетинів не рахуємо.

Розв'язання. Зрозуміло, що перші два з проведених таким чином відрізків не дадуть жодної точки перетину. Третій відрізок може перетинати тільки перший з них, четвертий – перші два, п'ятий – перші три, …, десятий – перші вісім. І, нарешті, одинадцятий – також лише 8 відрізків від другого до дев'ятого. Тому не вдасться отримати більше, ніж $1+2+3+4+5+6+7+8+8=44$ точки перетину. Приклад 44 таких точок наведений на малюнку справа.



8 клас

1. Знайдіть ціле число, що є найближчим до значення виразу:

$$\left(\left(7+\sqrt{48}\right)^{2023}+\left(7-\sqrt{48}\right)^{2023}\right)^2-\left(\left(7+\sqrt{48}\right)^{2023}-\left(7-\sqrt{48}\right)^{2023}\right)^2.$$

Розв'язання. $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$, то така різниця дорівнює

$$4\left(7+\sqrt{48}\right)^{2023}\left(7-\sqrt{48}\right)^{2023}=4\left(\left(7+\sqrt{48}\right)\left(7-\sqrt{48}\right)\right)^{2023}=.$$

$$=4(49-48)^{2023}=4.$$

2. Задані довільні натуральні числа k та n, що задовольняють умову: $3\le k\le n$. Доведіть, що серед n попарно різних дійсних чисел знайдеться або k чисел з додатною сумою, або (k - 1) число з від'ємною сумою.

Розв'язання. Розглянемо (k - 1) найменших з цих чисел. Якщо їх сума від'ємна, то твердження задачі виконане. Якщо ні, то принаймні одне з цих чисел додатне. А тоді більше від нього наступне за величиною число також додатне, і сума таких k чисел теж буде додатною.

3. Їжачком будемо називати круг без межі, тобто круг без точок кола, що його обмежує. Діаметром їжачка назвемо діаметр цього круга. Будемо казати, що їжачок сидить у точці, в якій розташований центр відповідного круга. Нехай нам задано трикутник зі сторонами a, b, c, у вершинах якого сидять їжачки. Відомо, що всередині трикутника існує точка, з якої по прямій траєкторії можна дістатися до будь-якої сторони трикутника, не зачепивши жодного їжачка. Яке найбільше значення може набувати сума діаметрів цих їжачків?

Розв'язання. Зрозуміло, що їжачки, які знаходяться у вершинах кожної зі сторін трикутника перетинатися між собою не можуть. Тому їх радіусів не перевищує довжини такої сторони. Додавши такого роду три нерівності для кожної зі сторін, отримаємо, що сума діаметрів їжачків не перевищує суми довжин $a+b+c$. Рівність досягається, якщо радіуси їжачків дорівнюють відстаням від вершин трикутника до точок дотику вписаного кола до сторін цього трикутника. При цьому шуканою точкою всередині трикутника буде центр такого кола. Відрізки проведені з нього до точок дотику зі сторонами виявляться дотичними до пар сусідніх їжачків.

4. Петрик розв'язав на тестуванні 33 задачі. За розв'язання меншої частини з них, серед яких була перша задача, він отримав a балів, за розв'язання усіх інших він отримав b балів. Відомо, що натуральні числа a та b задовольняють умову: $1 \le b < a \le 10$. По завершенні Петрик порахував середній бал за розв'язання усіх задач і він виявився цілим числом. За розв'язання скількох задач Петрик отримав a балів?

Розв'язання. Якщо Петрик на бал a розв'язав n задач, а на бал b розв'язав $33-n$ задач, то його середній бал дорівнював:

$$\frac{na+(33-n)b}{33} = b + \frac{n(a-b)}{33}.$$

Щоб це число було цілим, потрібно, щоб $n(a-b)$ ділилося націло на $33 = 11 \times 3$. Але $a-b \le 9 < 11$, тому на 11 має ділитися n. Із множини $\{0, 11, 22, 33\}$ всі умови задачі задовольняє лише $n = 11$.

5. По колу стоять $n \ge 3$ дітей, кожний з яких має дві таблички, одну з цифрою 0, другу – з цифрою 1. У певний момент кожна дитина піднімає одну з табличок на свій розсуд. Далі через кожну хвилину кожна дитина, у якої число на табличці відрізняється від чисел на табличках обох її сусідів (ліворуч та праворуч), міняє свою табличку. Чи може тривати нескінченно довго ситуація, коли принаймні одна дитина міняє табличку?

Розв'язання. Якщо n парне, а таблички з цифрами 1 та 0 у дітей чергуються, то такий процес може тривати нескінченно довго. При цьому щохвилини кожна дитина мінятиме табличку 0 на 1, а табличку 1 – на 0. *Та тільки, чи житимуть діти нескінченно довго*? Абсурд!

Нехай тепер n непарне. Якщо всі діти підняли таблички одного знаку, то процес зміни табличок закінчиться, так і не розпочавшись. Якщо ні, то знайдуться принаймні дві сусідні дитини, які підняли таблички з однаковими цифрами. Якщо таких сусідніх дітей з однаковими табличками і більше, то виділимо окремо всю їхню групу. Для конкретності будемо вважати, що у них таблички з цифрою 1. З обох боків вона межує з дітьми, які підняли табличку 0. У виділеній групі надалі таблички змінюватися не будуть, а сусідні діти з табличками 0 поміняють табличку лише за умови, що в іншої сусідньої з ними дитини також бути табличка 1. Таким чином, виділена група з табличками 1 лише розшириться. У результаті за скінченне число кроків або в усіх дітей будуть підняті таблички 1, або групки з не менше як по дві дитини з табличками 1 та 0 чергуватимуться, і дальших змін табличок відбуватися не буде.

9 клас

1. Знайдіть ціле число, що є найближчим до значення виразу:

$$\left((3+\sqrt{1})^{2023}-\left(\frac{1}{3-\sqrt{1}}\right)^{2023}\right)\cdot\left((3+\sqrt{2})^{2023}-\left(\frac{1}{3-\sqrt{2}}\right)^{2023}\right)\cdot$$
$$\cdot\left((3+\sqrt{3})^{2023}-\left(\frac{1}{3-\sqrt{3}}\right)^{2023}\right)\cdot\ldots\cdot\left((3+\sqrt{8})^{2023}-\left(\frac{1}{3-\sqrt{8}}\right)^{2023}\right).$$

Розв'язання. Оскільки $\frac{1}{3-\sqrt{8}}=\frac{3+\sqrt{8}}{(3-\sqrt{8})(3+\sqrt{8})}=3+\sqrt{8},$ то останній множник, а з ним і весь добуток дорівнює нулю.

2. Ненульові числа a, b, c задовольняють рівність $ab+bc+ca=0$. Доведіть, що числа $a+b+c$ та $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}$ одного знаку.

Розв'язання. $(a+b)\,(b+c\,)(c+a)\neq 0$, бо якщо, наприклад, $a+b=0$, то з поданої в умові задачі рівності $ab+(a+b)c=0$ випливає, що $ab=0$. Суперечність. Аналогічно доводимо для двох інших множників такого добутку.

Крім того, з поданої рівності діленням на abc отримаємо, що й $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$. Тоді також

$$0=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{c}\right)^2+2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right).$$

Звідси випливає, що $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}<0$.

Отже, ще раз враховуючи умову задачі, отримаємо:

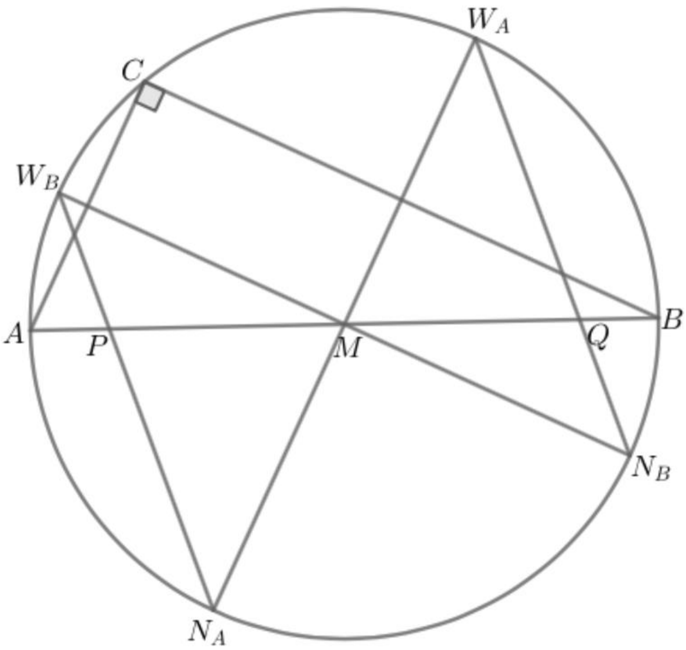
$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)=-(a+b+c)\left(\frac{c}{ab}+\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}\right)=$$

$$=-\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}+\frac{a^2}{bc}\right)-\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b^2}{ca}\right)-\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c^2}{ab}\right)=$$

$$=-(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}\right)>0.$$

Тому числа $a+b+c$ та $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}$ одного знаку.

3. Дано прямокутний трикутник ABC з прямим кутом ACB. Нехай W_A та W_B відповідно – середини менших дуг BC та AC описаного кола трикутника ABC, а N_A та N_B відповідно – середини більших дуг BC та AC. Позначимо через P та Q відповідно точки перетину відрізка з прямими N_AW_B та N_BW_A. Доведіть, що $AP=BQ$.



Розв'язання. Прямий кут ACB спирається на діаметр AB такого кола. Тому пари точок W_A, N_A та W_B, N_B симетричні відносно середини $AB-$ точки M. Отже, й відрізки N_AW_B та N_BW_A, а з ними і точки P та Q, також є симетричними відносно M. З рівностей $AM=BM$ та $PM=QM$ випливає, що й $AP=BQ$.

4. Є 100 карток, на кожній з яких записане одне з чисел 1, 2, …, 100 так, що кожне число є рівно на одній картці. Картки складені у стопку так, що на них зверху донизу записані числа 1, 2, …, 100 у вказаному порядку. Петрик перекладає картки за такими правилами. Якщо перед його k-тим ходом числа на картках зверху донизу записані у порядку $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots, a_{100}$, то після його ходу вони розташовуються таким чином: $a_k, a_{k-1}, \dots, a_2, a_1, a_{k+1}, \dots, a_{100}$, (зокрема, при $k = 1$ порядок карток не змінюється). Петрик робить по черзі ходи 1, 2, …, 100. Після чого він знову робить ходи 1, 2, …, 100 і так далі. Чи обов'язково після скінченної кількості ходів повториться початкове розташування карток зверху донизу з числами 1, 2, …, 100?

Розв'язання. Відзначимо, що за описаних умов тасування колоди кожна наступна комбінація чисел на картках може утворюватися лише з однієї передуючої їй комбінації. Оскільки максимальна можлива кількість різних комбінацій, які можуть утворитися, не більша за 100!, то на деякому скінченному кроці одна з комбінацій вперше повториться. Це і буде початкове розміщення карток у колоді, бо інакше її попередник мав би повторитися уже кроком раніше.

5. Знайдіть усі пари цілих невід'ємних чисел $x \geq y$, для яких числа $x + 3^y$ та $y + 3^x$ є двома послідовними цілими числами.

Розв'язання. З умови задачі маємо рівність $y + 3^x = x + 3^y + 1$, з якої випливає, що $x \neq y$. Тому $x > y$. Позначимо $x - y = n$. Тоді попередню рівність можна записати у вигляді $n + 1 = 3^y(3^n - 1)$, звідки для невід'ємних y випливає, що $n + 1 \geq 3^n - 1$. Таку нерівність задовольняє $n = 1$, при якому $3^y = 1$, $y = 0$, $x = 1$.

Доведемо, що інших розв'язків немає. Достатньо буде показати, що для $n \geq 2$ виконується нерівність $3^n > n + 2$.

Для $n = 2$ це очевидно: $3^2 > 2 + 2$.

Припустимо, що для деякого $n = k \geq 2$ також $3^k > k + 2$.

Тоді й для $n = k + 1$ правильною буде нерівність

$$3^{k+1} = 3 \times 3^k > 3(k + 2) > k + 3 = (k + 1) + 2.$$

Тому внаслідок принципу математичної індукції $3^n > n + 2$ для всіх натуральних чисел $n \geq 2$.

10 клас

1. Знайдіть усі такі натуральні числа n, що задовольняють нерівності:

$$-46 \leq \frac{2023}{46-n} \leq 46-n.$$

Розв'язання. Розглянемо два можливі випадки.

Якщо $n < 46$, то ліва частина нерівності правильна, а для правої частини отримуємо нерівність $(46-n)^2 \geq 2023$, з якої знаходимо $46 - n \geq 45$, тобто $n \leq 1$. Отже, $n = 1$.

Якщо ж $n > 46$, то подані нерівності можна записати у вигляді

$$46(n-46) \geq 2023 \geq (n-46)^2,$$

звідки знаходимо, що одночасно $n - 46 \geq 44$ та $n - 46 \leq 44$. Тому $n - 46 = 44, n = 90$.

Інших розв'язків немає.

2. Для довільних додатних чисел a, b, c розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} ax^3 + by = cz^5, \\ az^3 + bx = cy^5, \\ ay^3 + bz = cx^5. \end{cases}$$

Розв'язання. Оскільки подана система рівнянь є циклічною, то достатньо розглянути лише випадки $x \leq y \leq z$ та $x \leq z \leq y$.

У першому випадку, віднявши від першого рівняння третє, отримаємо рівність $a(x^3 - y^3) + b(y - z) = c(z^5 - x^5)$, ліва частина якої недодатна. Тому такою ж має бути і права частина, тобто $z \leq x$.

А у другому випадку, віднявши від другого рівняння третє, аналогічно отримаємо рівність $a(z^3 - y^3) + b(x - z) = c(y^5 - x^5)$, також з недодатною лівою частиною. Тому тут $y \leq x$.

Як бачимо, в обох випадках повинно бути $x = y = z$. Тому розв'яжемо рівняння $ax^3 + bx = cx^5$, корінь $x_1 = 0$ якого очевидний. А з біквадратного рівняння $cx^4 - ax^2 - b = 0$ знайдемо два інші його дійсні корені $x_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+4bc}}{2c}}$.

Таким чином, розв'язками поданої системи рівнянь є такі три трійки чисел: $(0; 0; 0)$, $(t; t; t)$ та $(-t; -t; -t)$, де $t = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+4bc}}{2c}}$.

3. Розглянемо на декартовій площині усі пари різних точок (A, B), кожна з яких має обидві цілі координати. Серед цих пар точок знайдіть усі такі, для яких знайдуться дві різні точки (X, Y) з обома цілими координатами, що чотирикутник $AXBY$ опуклий та вписаний.

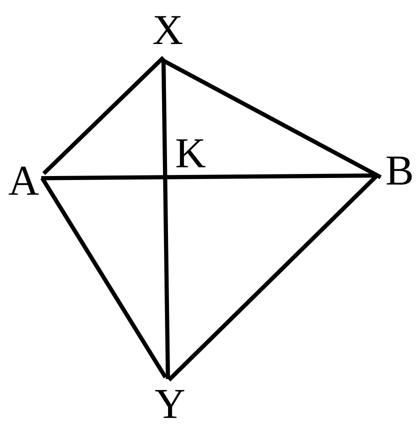
Чотирикутник називається опуклим, якщо обидві його діагоналі лежать всередині чотирикутника.

Розв'язання. Зрозуміло, що відтань між точками A та B з обома цілими координатами не може бути меншою за 1.

Якщо $AB = 1$ і чотирикутник $AXBY$ опуклий та вписаний, то сума його кутів AXB та AYB дорівнює 180^o. Тому принаймні один з них не менший за 90^o. Отже, його вершина має знаходитися всередині чи на межі кола з діаметром AB. Але у ньому, крім A та B, точок з обома цілими координатами не існує.

Доведемо тепер, що всі пари точок (A, B), які знаходяться на відстані, більшій за 1, задовольняють умови задачі.

Якщо ні абсциси, ні ординати цих точок не співпадають, то точки X та Y з обома цілими координатами можна вибрати на перетині прямих, які проходять через точки A та B паралельно до осей координат. При цьому прямокутник $AXBY$ буде вписаним.



Нехай тепер рівними є лише ординати точок $A(a, c)$ та $B(b, c)$, де $|a - b| > 1$. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що $a < b$. Виберемо точки $X(a + 1, c + 1)$ та $Y(a + 1, c - d)$. Оскільки відрізки AB та XY перетинаються у точці $K(a + 1, c)$, то для того, щоб чотирикутник $AXBY$ був вписаним, достатньо виконання рівності $AK \times BK = XK \times YK$, звідки знаходимо $d = b - a - 1$. При цьому обидві координати точок X та Y будуть цілими, а чотирикутник $AXBY$ – опуклим.

Аналогічно розглядається випадок рівності абсцис точок A та B.

4. У кімнаті є n ламп та 2024 перемикачі. Кожна лампа з'єднана рівно з 1000 перемикачами. При натисканні на перемикач кожна з'єднана з ним лампа змінює свій стан – з «ON» на «OFF» та навпаки. Відомо, що натисканням на деякі з перемикачів можна досягти того, що усі лампи перейдуть в стан «ON». Доведіть, що цього можна досягнути натисканням на перемикачі сумарно не більше ніж 1012 разів.

Розв'язання. Очевидно, що кожний перемикач не варто натискати більше одного разу. Розіб'ємо усі перемикачі на дві групи: група I – ті перемикачі, які треба натиснути, щоб перевести усі лампи в стан «ON», група II – усі інші перемикачі. Оскільки кожна лампа з'єднана з парною кількістю перемикачів, то якщо натиснути усі перемикачі групи II, то усі лампи також перейдуть в стан «ON». Дійсно виберемо лампу «A», якщо в групі I парна кількість перемикачів, що з'єднані з «A», то їх парна кількість і в групі II, при натисканні що там, що там, стан лампи «A» не зміниться. Аналогічно для непарної кількості. Як у першому, так і у другому випадку, така лампа спочатку була виключеною, а після непарної кількості натискань включилася. Сумарно в групі I та II 2024 перемикачі. Значить принаймні в одній з них не більше 1012 перемикачів, що й доводить твердження задачі.

5. Див. задачу 5 для 9 класу.

11 клас

1. Яке з чисел більше: $A = \frac{1}{9} : \sqrt[3]{\frac{1}{2023}}$ чи $B = log_{2023}91125$.

Розв'язання. $A < B$. Справді,

$$A = \frac{\sqrt[3]{2023}}{9} < \frac{\sqrt[3]{2197}}{9} = \frac{13}{9} < \frac{3}{2},$$

$$B > log_{2025}91125 = log_{45^2}45^3 = \frac{3}{2}.$$

2. Дано $n \geq 4$ додатних чисел. Розглянемо всі $\frac{n(n-1)}{2}$ попарних сум цих чисел. Покажіть, що якісь дві суми відрізняються не більше, ніж в $\sqrt[n-2]{2}$ рази.

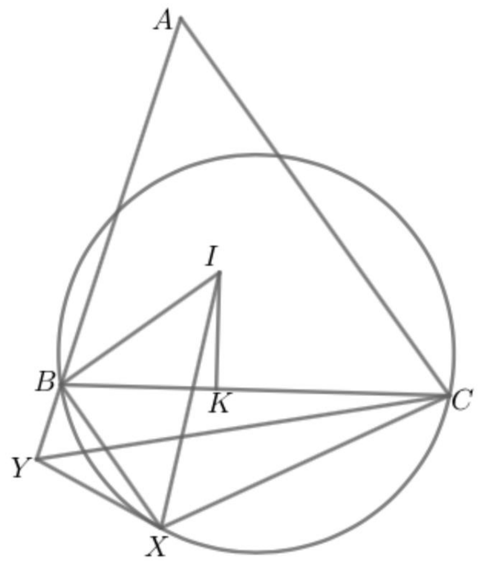
Розв'язання. Запишемо ці числа за спаданням: $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$. Тоді $2x_1 \geq x_1 + x_2 \geq x_1 + x_3 \geq \cdots \geq x_1 + x_n > x_1$. Тому

$$\frac{x_1 + x_2}{x_1 + x_3} \times \frac{x_1 + x_3}{x_1 + x_4} \times \ldots \times \frac{x_1 + x_{n-1}}{x_1 + x_n} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 + x_n} < \frac{2x_1}{x_1} = 2.$$

Отже, принаймні один із дробів такого добутку не перевищує $\sqrt[n-2]{2}$.

3. Точка $I -$ інцентр трикутника ABC, $AB < AC$. На бісектрисі зовнішнього кута ABC трикутника ABC обрали таку точку X, що $IC = IX$. Нехай дотична до описаного кола трикутника BXC у точці X перетинає пряму AB у точці Y. Доведіть, що $AC = AY$.

Розв'язання. У трикутниках XBC та YBX кути при вершині B рівні за властивістю бісектриси, а відповідні кути при вершинах X та $C -$ за властивістю кутів між хордою і дотичною та вписаних кутів. Тому ці два трикутники подібні. Отже, $\frac{BX}{BC} = \frac{BY}{BX}$ (див. мал. справа).



Опустимо з точки I перпендикуляр AK до сторони BC і зауважимо, що кут IBX прямий. При цьому точка K буде точкою дотику вписаного кола трикутника ABC до його сторони BC. У результаті отримаємо:

$$BY = \frac{BX^2}{BC} = \frac{IX^2 - BI^2}{BC} = \frac{CI^2 - BI^2}{BC} = \frac{(CI^2 - IK^2) - (BI^2 - IK^2)}{BC} =$$

$$= \frac{CK^2 - BK^2}{BC} = \frac{(CK - BK)(CK + BK)}{BC} = CK - BK.$$

Позначимо через p півпериметр трикутника ABC. За властивістю відрізків дотичних до вписаного кола, звідси знаходимо

$$AY = AB + BY = AB + (p - AB) - (p - AC) = AC,$$

що й треба було довести.

4. Знайдіть усі натуральні числа x, y, z, які задовольняють рівність $2^x + 21^y = z^2$.

Розв'язання. Якщо $x -$ непарне число, то ліва частина рівності при діленні на 3 дає остачу 2, а права може давати лише остачі 0 або 1. Тому $x -$ парне число. Покладаючи $x = 2n$, запишемо подану рівність у вигляді $(z + 2^n)(z - 2^n) = 21^y$. Різниця першого та другого множників у лівій частині такої рівності є степенем числа 2. Тому вони не можуть мати спільним дільником ні 3, ні 7. Отже, залишається розглянути лише такі два варіанти:

а). $z + 2^n = 21^y$, $z - 2^n = 1$. Тоді $2^{n+1} = 21^y - 1$, що неможливо, бо права частина ділиться на 10, а ліва – ні.

б). $z + 2^n = 7^y$, $z - 2^n = 3^y$. Тоді $2^{n+1} = 7^y - 3^y$, що також неможливо для парних y, бо знову права частина ділиться на 10, а ліва – ні. Тому $y -$ непарне число. Якщо при цьому $y = 1$, то звідси знайдемо $n = 1$, $x = 2$, $z = 5$. А якщо $y > 1$, то у розкладі

$$7^y - 3^y = (7 - 3)(7^{y-1} + 7^{y-2} \times 3 + 7^{y-3} \times 3^2 + \cdots + 7 \times 3^{y-2} + 3^{y-1})$$

другий множник є непарним числом, більшим за 1. Тому рівність також буде неможливою. Отже, набір $x = 2$, $y = 1$, $z = 5$ – єдиний.

5. Знайдіть усі натуральні числа $n \geq 2$, для яких справджується таке твердження: якщо сума чисел у послідовності натуральних чисел $(a_1, a_1, \dots, a_n)$ дорівнює $2n - 1$, то існує блок послідовних членів цієї послідовності, що містить щонайменше два її члени, числа якого мають середнє арифметичне, що є цілим числом.

Розв'язання. Для $n = 2$ та $n = 3$ контрприкладами є такі послідовності: (1,2) та (2,1,2). Розглянемо тепер $n \geq 4$ та множину цілих чисел $b_k = a_k - 2 \geq -1$, де $1 \leq k \leq n$. Нехай

$$S_0 = 0, S_1 = b_1, \dots, S_k = b_1 + b_2 + \cdots + b_k.$$

Оскільки $S_n = b_1 + \ b_2 + \cdots + b_n = -1 < 0$, то знайдеться таке найменше k, за якого сума S_k вперше стала від'ємною. Враховуючи, що всі числа $b_i \geq -1$, таке можливе лише за умов: $b_k = -1$, $S_{k-1} = 0$. Відповідно, і сума доданків b_i, правіших від b_k, якщо такі є, також дорівнює нулю. При $n \geq 4$ принаймні з одного боку від b_k таких доданків із сумою нуль не менше двох. Їх середнє арифметичне дорівнює нулю. Тоді цілим буде і середнє арифметичне відповідних доданків послідовності $(a_1, a_1, \dots, a_n)$, і воно дорівнює 2.