Математичний занзібар

<u>Середня ліга</u> *(9 клас)*

1. Петрик та Василь грають у таку гру. На дошці записане деяке натуральне число n. Гравці по черзі можуть замість числа n написати інше натуральне число – або $n-1$, або будь-який власний дільник числа n. Програє той, хто не може зробити хід. Перший хід робить Петрик. Яке найбільше число від 1 до 100 може написати на дошці Василь, щоб гарантовано перемогти?

2. Знайдіть усі четвірки чисел x_1, x_2, x_3 та x_4, що задовольняють систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1+x_2=x_3^2+6x_3x_4+x_4^2, \\ x_1+x_3=x_2^2+6x_2x_4+x_4^2, \\ x_1+x_4=x_2^2+6x_2x_3+x_3^2, \\ x_2+x_3=x_1^2+6x_1x_4+x_4^2, \\ x_2+x_4=x_1^2+6x_1x_3+x_3^2, \\ x_3+x_4=x_1^2+6x_1x_2+x_2^2. \end{cases}$$

3. Шість команд провели турнір в одне коло у «дробовий футбол». Вони набрали відповідно таку кількість очок: $10, 7, 6, 6, 3$ та 3 очки. Скільки очок нараховувалося за перемогу в зустрічах, якщо відомо, що це не обов’язково ціле число, при цьому за нічию давали 1 очко, а за поразку – 0 очок?

4. Трикутник ABC має таку властивість $AB+AC=3BC$. Нехай T така точка на відрізку AC, для якої $AC=4AT$. K та L – точки всередині відрізків AB та AC відповідно, для яких справджується умови $KL||BC$ та відрізок KL дотикається до вписаного кола ΔABC. Нехай $S=BT\cap KL$. Знайдіть відношення $SL:KL$.

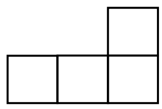

Рис. 1

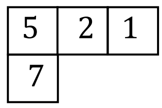

Рис. 2

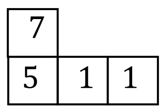

Рис. 3

5. На дошці записані такі три числа a, b, c, що остання цифра суми $a+b$ – це остання цифра числа c, остання цифра суми $b+c$ – це остання цифра числа a та остання цифра суми $c+a$ – це остання цифра числа b. На дошку записали останні 3 цифри добутку abc. Які це можуть бути цифри?

6. Два зведених квадратних тричлени мають один спільний корінь $x=2024$, при цьому дискримінант суми цих тричленів дорівнює сумі дискримінантів. Чому може дорівнювати добуток дискримінантів цих тричленів? Вкажіть усі можливі відповіді.

7. Клітинки дошки 10×10 заповнені числами. Чотириклітинний куточок (рис. 1) називається *гарним*, якщо у кожній з двох його клітинок, що має рівно двох сусідів по стороні, записані такі числа, що більше одного з сісідніх та менше іншого. Наприклад, куточок на рис. 2 є гарним, а на рис. 3 – ні. Яка найбільша кількість гарних куточків може утворитися? Гарні куточки різні – якщо в них відмінні принаймні одна клітинка, що її утворює.

8. У квадраті $ABCD$ із довжиною сторони 2 проводимо лінії від кожної вершини до середин двох протилежних сторін. Наприклад, ми з'єднуємо A з серединою BC та з серединою CD. Вісім отриманих прямих разом утворюють восьмикутник всередині квадрата (рис. 16). Знайдіть площу цього восьмикутника.

9. Задані натуральні числа $M, N>10$, що мають однакову кількість цифр. При цьому виявилося, що $M=3N$ та щоб одержати число M з числа N треба до однієї з цифр числа N треба додати 2, а до усіх інших цифр додати деяку непарну цифру. Якою цифрою може закінчуватися число N? Вкажіть усі моджливі відповіді.

10. Знайти звичайний дріб з найменшим додатним знаменником, який лежить між дробами $\frac{101}{48}$ та $\frac{100}{47}$.

11. У високому капелюсі є 100 карток з написаними на них числами від 1 до 100 (кожне число зустрічається рівно один раз). Ми навмання витягаємо з капелюха картки доти, доки не виявиться серед витягнутих 3 таких, що є сторонами деякого трикутника, тобто сума чисел на двох картках з меншими числами більше за число на третій картці. Наприклад, три картки з числами $10, 15, 20$ підійдуть, а картки з числами $3, 4, 7$ – ні. Яку найменшу кількість карток потрібно задля цього витягнути?

12. Точка I – центр вписаного кола трикутника ABC. Точки A_1, B_1 та C_1 – симетричні точці I відносно сторін BC, CA та AB відповідно. Коло, що описане навколо $\Delta A_1B_1C_1$ проходить через точку A. Знайдіть радіус описаного кола ΔABC, якщо $BC = \sqrt{3}$.

13. Ми говоримо, що ціле число n є *дев'ятичним*, якщо $n \geq 90$ та передостання цифра n дорівнює 9. Наприклад, 10798, 1999 та 90 є дев'ятичним, тоді як 9900, 2009 та 9 не є. Для якого найменшого k існують дев'ятичні числа $n_1, n_2, \ldots, n_k$, для яких справджується рівність: $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = 2020$.

14. На дошці записані три попарно різних натуральних числа a, b, c. Після цього застосовується процедура заміни цих чисел на такі: $\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}$. Після застосування цієї процедури 10 разів, усі три числа, що записані на дошці є натуральними. Яке найменше можливе значення може приймати сума $a + b + c$?

15. Прямокутник 3×2024 (3 рядки та 2024 стовпчиків) заповнений числами $1, 2, \ldots, 6072$ таким чином, що сусідні числа розташовані в сусідніх по стороні клітинках, число 1 розташоване в найлівішому стовпчику, а число $3n$ – у найправішому. Скільки існує варіантів такого заповнення?

16. Всередині рівнобедренного трикутника ABC з $AB = AC$ вибрана точка P, з якої опущені перпендикуляри PD, PF та PE на сторони BC, AB та AC відповідно. Знайдіть довжину AB, якщо $BD = 9, CD = 5, PE = 2$ та $PF = 5$.

17. Знайдіть таку трійку натуральних чисел (a, b, c), для яких справджуються такі умови: $a \geq b \geq c$, добуток будь-яких двох чисел з трійки збільшений на 1 ділиться націло на третє число та значення c набуває найбільшого можливого значення.

18. Розв'яжіть систему рівнянь: $\begin{cases} (x+y)^2 = z^2 - 21, \\ (y+z)^2 = x^2 + 7, \\ (z+x)^2 = y^2 + 63. \end{cases}$

19. Є 11 гир, усі різної маси, що вимірюється цілим число грамів. Відомо, що якщо на ваги покласти два набори з цих гир (не обов'язково усі гирі мають бути використані), то завжди переважить той набір, в якому гир більше. Яку найменшу вагу може мати найлегша гиря цього набору?

20. Розріжте квадрат на непарну кількість прямокутників та в кожному з яких проведіть рівно одну діагональ таким чином, щоб з проведених діагоналей утворилася замкнена ламана.