

Математичний занзібар

Старша ліга (10 клас)

1. Петрик та Василь грають у таку гру. На дошці записане деяке натуральне число n . Гравці по черзі можуть замість числа n написати інше натуральне число – або $n - 1$, або будь-який власний дільник числа n . Програє той, хто не може зробити хід. Перший хід робить Петрик. Яке найбільше число від 1 до 100 може написати на дошці Василь, щоб гарантовано перемогти?

2. Знайдіть усі четвірки чисел x_1, x_2, x_3 та x_4 , що задовольняють систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3^2 + 6x_3x_4 + x_4^2, \\ x_1 + x_3 = x_2^2 + 6x_2x_4 + x_4^2, \\ x_1 + x_4 = x_2^2 + 6x_2x_3 + x_3^2, \\ x_2 + x_3 = x_1^2 + 6x_1x_4 + x_4^2, \\ x_2 + x_4 = x_1^2 + 6x_1x_3 + x_3^2, \\ x_3 + x_4 = x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2. \end{cases}$$

3. Шість команд провели турнір в одне коло у «дробовий футбол». Вони набрали відповідно таку кількість очок: 10, 7, 6, 6, 3 та 3 очки. Скільки очок нараховувалося за перемогу в зустрічах, якщо відомо, що це не обов'язково ціле число, при цьому за нічию давали 1 очко, а за поразку – 0 очок?

4. Наведіть приклад опуклого шестикутника, у якого відстані між кожними двома вершинами є цілим числом.

5. По колу записані $n \geq 3$ цілих чисел, сума яких дорівнює 94. Відомо, що будь-яке число дорівнює модулю різниці двох наступних за ним чисел. Які значення може приймати число n ? Наведіть всі можливі варіанти.

6. Знайдіть усі такі функції $f: R \rightarrow R$, які для довільних дійсних x, y задовольняють рівності:

$$f(x^2y) + 2f(y^2) = (x^2 + f(y))f(y).$$

7. Розставте числа 1, 2, ..., 12 по одному у кожену клітинку дошки, що зображена на рис. 22 таким чином, щоб справджувалися такі дві умови:

- сума 4-х чисел у кожному рядку чи стовпчику, що містять по 4 клітинки, а також сума чисел у 4-х центральних квадратиків, рівні між собою;
- числа, що розташовані у середніх клітинках відрізняються не менше ніж на 2.

8. У квадраті $ABCD$ із довжиною сторони 2 проводимо лінії від кожної вершини до середин двох протилежних сторін. Наприклад, ми з'єднуємо A з серединою BC та з серединою CD . Вісім отриманих прямих разом утворюють восьмикутник всередині квадрата (рис. 16). Знайдіть площу цього восьмикутника.

9. Задані натуральні числа $M, N > 10$, що мають однакову кількість цифр. При цьому виявилось, що $M = 3N$ та щоб одержати число M з числа N треба до однієї з цифр числа N треба додати 2, а до усіх інших цифр додати деяку непарну цифру. Якою цифрою може закінчуватися число N ? Вкажіть усі можливі відповіді.

10. Кубічний корінь з натурального числа дорівнює кількості його тисяч (не цифрі тисяч). Знайдіть усі такі числа.

11. На кожному з 12 ребер куба пишемо число 1 або -1 . Для кожної з 6 граней куба ми множимо чотири числа на ребрах цієї грані і записуємо результат на цій грані. Нарешті додаємо 18 чисел, які ми записали. Яке мінімальне число ми можемо отримати?

- 12.** Точка I – центр вписаного кола трикутника ABC . Точки A_1, B_1 та C_1 – симетричні точки I відносно сторін BC, CA та AB відповідно. Коло, що описане навколо $\Delta A_1 B_1 C_1$ проходить через точку A . Знайдіть радіус описаного кола ΔABC , якщо $BC = \sqrt{3}$.
- 13.** Знайдіть найбільше трицифрове число n , про яке відомо, що у числа $2n$ кількість простих дільників 30, а у числа $3n$ їх 32.
- 14.** Функція $f: Z \rightarrow Z$ для довільних цілих a, b задовольняє умову: $f(a + b) = f(f(a)) + f(f(b))$. Які значення може приймати $f(2020)$?
- 15.** Прямокутник 3×2024 (3 рядки та 2024 стовпчиків) заповнений числами $1, 2, \dots, 6072$ таким чином, що сусідні числа розташовані в сусідніх по стороні клітинках, а також числа 1 та $3n$ так само в сусідніх клітинках. Скільки існує варіантів такого заповнення?
- 16.** Заданий правильний 2024-кутник $A_1 A_2 \dots A_{2024}$ з площею 2024. Знайдіть площу чотирикутника $A_1 A_{506} A_{507} A_{508}$.
- 17.** Знайти усі розв'язки в цілих числах рівняння: $(x^2 + y^2)(x + y - 3) = 2xy$.
- 18.** Позначимо через Z^+ множину усіх цілих невід'ємних чисел. Відомо, що функція $f: Z^+ \rightarrow Z^+$ для довільних $a, b \in Z^+$ задовольняє умову:
$$f(a + b^2) = f(a) + f(b^2) + ab^2.$$
 Знайдіть значення $f(1)$, якщо відомо, що $f(40) = 2020$.
- 19.** На круглому столі розкладені пиріжки, що занумеровані числами від 1 до n . Петрик стоїть біля пиріжка з номером 1 та йде навколо стола в напрямку зростання номерів пиріжків та з'їдає кожний третій ще не з'їдений пиріжок. Тобто першим він з'їсть пиріжок з номером 3. Останнім Петрик з'їв пиріжок за номером 1 при цьому зробив повних обходів столу 7 разів. Які значення може приймати число n ?
- 20.** Розріжте квадрат на непарну кількість прямокутників та в кожному з яких проведіть рівно одну діагональ таким чином, щоб з проведених діагоналей утворилася замкнена ламана.