**ІІІ етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2023/2024 н. р.**

***7 клас***

**1.** У класі більше двадцяти, але менше тридцяти учнів, і дні народження у всіх із них різні. Миколка сказав: «У нашому класі вдвічі більше старших за мене учнів, ніж молодших». Катруся сказала: «У нашому класі втричі більше старших за мене учнів, ніж молодших». Скільки учнів у цьому класі, якщо слова обох були правдою?

**2.** Натуральні числа $x$ та $y$ задовольняють рівність

$$(x-y)(x-2y)(x+3y)=2024.$$

Знайдіть хоч одну пару таких чисел.

**3.** Зла чаклунка погрожує спопелити всю планету своїм новим грізним закляттям «ВУЛКАНИ ТА ЖАРА». Воно активується, якщо різні його букви замінити різними цифрами так, щоб отримане при цьому 13-цифрове число стало простим числом. Чи треба боятися такого закляття злої чаклунки? Відповідь обґрунтуйте.

**4.** Точка $M$ – середина сторони $CD$ прямокутника $ABCD$, а точка $K$ лежить на його стороні $AD$. Знайдіть величину кута $BKM$, якщо кути $CBM$ та $KBM$ дорівнюють по $25^o$.

**5.** У коробці є 7 синіх та 7 жовтих кульок. Петрик навмання виймає їх з коробки, доки вперше не настане момент, що витягнута однакова кількість кульок обох кольорів. Виявилося, що для цього Петрику довелося вийняти усі кульки, причому жодного разу ним не були вийняті підряд 3 кульки одного кольору. Доведіть, що кульки, які виймалися одинадцятою та дванадцятою, були різного кольору.

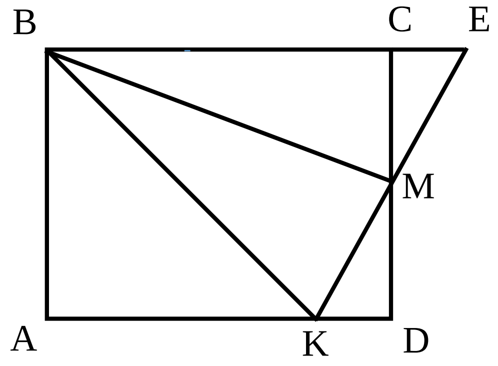
**6.** Знайдіть усі пари невід'ємних цілих чисел $a$ та $b$ таких, що $(a!+1)(b!+1)=(a+b)!$ Нагадуємо, що $0!=1$, $n!=1\times 2\times \ldots \times n$.

***<u>Розв'язання задач</u>***

**1.** Зі слів Миколки випливає, що без нього кількість інших учнів класу ділиться на 3, а зі слів Катрусі без неї кількість інших учнів класу має ділитися на 4. Для чисел від 20 до 28 обидві ці умови задовольняє лише число 24. Тому у класі Миколки та Катрусі 25 учнів.

**2.** Оскільки $2024=8\cdot 11\cdot 23$, то попробуємо підібрати множники у лівій частині рівності так, щоб вони послідовно дорівнювали 11, 8 та 23. З рівнянь $x-y=11$, $x-2y=8$, $x+3y=23$ знаходимо $x=14$, $y=3$.

**3.** Зауважимо, що у закляття злої чаклунки 9 літер зустрічаються по одному разові, а буква А – чотири рази. Оскільки сума всіх цифр від 0 до 9 дорівнює 45, то при кожній зміні різних букв закляття різними цифрами, взявши кожну з 10 букв по одному разові і ще тричі букву А, будемо отримувати 13-цифрове число, кратне 3. Тому таке число не буде простим. Отже, боятися погроз злої чаклунки не треба.




**4.** Продовжимо відрізок $KM$ до перетину з прямою $BC$ у точці $E$. Оскільки точка $M$ – середина сторони $CD$, а у прямокутних трикутниках $CME$ та $DMK$ вертикальні кути при вершині $M$ рівні, то $KM = ME$. Отже, відрізок $BM$ одночасно є бісектрисою та медіаною трикутника $KBE$. Тому він є і його висотою. З прямокутного трикутника $KBM$ знаходимо, що кут $BKM$ дорівнює $65^o$.

**5.** Не зменшуючи загальності, можна вважати, що чотирнадцята вийнята кулька була синього кольору. Тоді тринадцята кулька також була синьою, бо в іншому разі однакова кількість кульок обох кольорів стала би уже після дванадцятого кроку. Оскільки тричі підряд кульки одного кольору не виймалися, то при цьому дванадцята кулька була жовтого кольору. Якщо б одинадцята вийнята кулька також була жовтою, то однакова кількість кульок обох кольорів появилась би уже після десятого кроку. Тому одинадцята кулька була синього кольору, що й доводить твердження задачі.

Зауважимо, що описана ситуація можлива, якщо, наприклад, кульки виймалися у такій послідовності: ЖЖСЖСЖСЖСЖСЖСС.

**6.** Якщо кожне з чисел $a$ та $b$ більше за 1, то добуток множників у лівій частині рівності є непарним, а число справа – парне. Якщо одне з чисел, наприклад $a$, дорівнює нулю, то рівність також неможлива, бо $2(b!+1) > b!$. Так само $b \neq 0$. Якщо ж $a = 1$, то $2(b!+1) = (b+1)!$ і цю рівність можна записати у вигляді $\big((b+1)-2\big)b! = 2$. Число$b = 1$ її не задовольняє, при $b > 2$ значення лівої частини більші за 2, а при $b = 2$ отримуємо правильну рівність. Отже, маємо шукану пару чисел $a = 1, b = 2$. З міркувань симетрії іншою такою парою буде пара $a = 2, b = 1$.

## *8 клас*

**1.** Цілі числа $x$ та $y$ задовольняють рівність

$$(x+y)(x+2y)(x-3y)=2024.$$

Знайдіть хоч одну пару таких чисел.

**2.** Додатні числа $x, y$ задовольняють рівність $x^3-y^3=4x$. Доведіть, що $x^2>2y$.

**3.** Марійка розрізала квадрат $8\times 8$ вздовж ліній сітки на частини з однаковим периметром. Яку найбільшу кількість частин вона могла отримати, якщо відомо, що не всі вони були рівними?

**4.** На сторонах $BC$ та $CD$ квадрата $ABCD$ відклали точки $M$ та $K$ відповідно такі, що кути $BAM$ та $CKM$ дорівнюють по $30^o$. Знайдіть величини кутів трикутника $AMK$.

**5.** Юний математик, опинився на острові, всі жителі якого дуже добре знали математику, але лише деякі з них завжди говорили правду, а інші – завжди брехали. Запитавши одного із жителів острова «Чи можна записати по колу числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 так, щоб кожне записане число ділилося націло на різницю двох сусідніх з ним чисел?», він за почутою відповіддю зразу визначив, хто стояв перед ним: брехун чи правдолюб. А чи могли б це зробити ви?

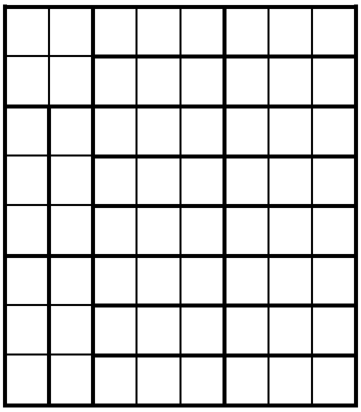
**6.** Обчисліть добуток $abcd$, якщо $4^a=5,\ 5^b=6,\ 6^c=7,\ 7^d=8$.

## ***Розв'язання задач***

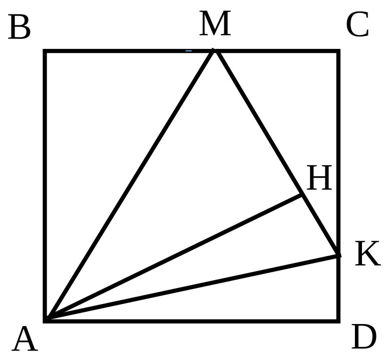
**1.** Оскільки $2024=8\cdot 11\cdot 23$, то попробуємо підібрати множники у лівій частині рівності так, щоб вони послідовно дорівнювали 11, 8 та 23. З рівнянь $x+y=11$, $x+2y=8$, $x-3y=23$ знаходимо $x=14$, $y=-3$.

**2.** З додатності $x, y$ та рівності $x^3-y^3=4x$ отримуємо, що $x>y$. Записавши цю рівність у вигляді $y^3=x^3-4x=x(x+2)(x-2)$, будемо мати, що $x>2$. Тому $x^2-2y=x(x-2)+2(x-y)>0$, або ж зразу $x^2=x\cdot x>2\cdot y=2y$, що й треба було довести.

**3.** Найменшою з таких частин міг би бути одиничний квадратик з периметром 4. Але у такому разі всі інші частинки також мали би бути одиничними квадратиками, що суперечить умові задачі. Наступний можливий периметр 6 мають лише прямокутники розмірами $1\times 2$. Тому вони також не могли бути використані для розрізання. А оскільки периметр 7 неможливий, то перейдемо до частинок з периметром 8. Ними можуть бути або прямокутники розмірами $1\times 3$, або кутики, в яких одиничні квадратики прилягають до сусідніх сторін іншого одиничного квадратика, або квадрати $2\times 2$. Перші два з них мають площу 3, а третій – площу 4. Площі ж фігурок з більшими периметрами також не менші за 4. Оскільки $21\cdot 3<8\cdot 8<22\cdot 3$, то при розрізанні більше як 21 частину отримати не вдасться. Приклад із отриманням двадцять однієї частини наведений на малюнку нижче. Зрозуміло, що він не єдиний з усіх можливих.

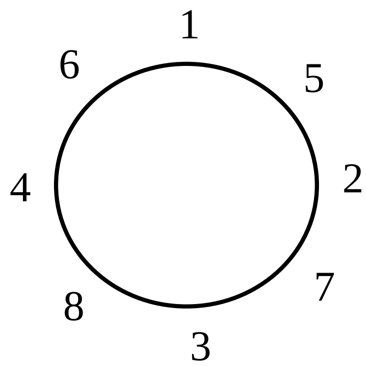


**4.** З прямокутних трикутників $BAM$ та $CKM$ знайдемо, що кути $BMA$ та $CMK$ дорівнюють по $60^o$. Тому кут $AMK$ також дорівнює $60^o$. Проведемо у трикутнику $AMK$ висоту $AH$. Оскільки прямокутні трикутники $ABM$ та $AHM$ рівні за спільною гіпотенузою $AM$ та рівними кутами при вершині $M$, то $AH = AB$. Тоді й прямокутні трикутники $ADK$ та $AHK$ також рівні за спільною гіпотенузою $AK$ та рівними катетами $AD$ та $AH$. Тому їхні кути при вершині $K$ є рівними. Але кут $MKD$ дорівнює $150^o$, тому кут $AKM$ дорівнює $75^o$. Тоді на кут $MAK$ залишається $45^o$.




Зауважимо, що з рівності пар прямокутних трикутників $ABM$ та $AHM$, $ADK$ та $AHK$ можна було також зробити висновок, що у них відповідні кути при вершині $A$ рівні, і отримати, що кут $MAK$ дорівнює половині прямого кута $BAD$.

**5.** Записати таким чином по колу числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 можна. Наприклад, як на малюнку справа. Оскільки за умовою задачі зустрічний дуже добре знав математику, то він легко отримав би правильну відповідь на поставлене питання. Тому відповісти «Можна» міг тільки правдолюб, а «Не можна» – тільки брехун.




**6.** З умови задачі випливає, що

$$(((4^a)^b)^c)^d = ((5^b)^c)^d = (6^c)^d = 7^d = 8.$$

Звідси $4^{abcd} = 8$, або ж $2^{2abcd} = 2^3$. Тому $2abcd = 3$, $abcd = 3/2$.

## *9 клас*

**1.** Миколка хоче подати кожне натуральне як суму двох складених натуральних чисел. Для скількох натуральних чисел йому це не вдасться зробити?

**2.** Числа $a$ та $b$ задовольняють рівність $a^2 + b^2 + ab = a + b$. Знайдіть найбільше можливе значення виразу $a^2 + b^2$.

**3.** Розв'яжіть рівняння $(x-1)(4x^2 - 8x + 1) = 2024$.

**4.** Знайдіть відстань між серединами сторін $BC$ та $AD$ опуклого чотирикутника $ABCD$, якщо його сторони $AB$ та $CD$ лежать на двох перпендикулярних прямих і дорівнюють 8 та 6 сантиметрів відповідно.

**5.** На дошці записані числа 2022 та 2024. Миколка і Петрусь ходять по черзі, розпочинає Петрусь. За один хід можна зменшити одне з чисел на його ненульову цифру чи на ненульову цифру іншого числа, або поділити одне з чисел на 2, якщо воно парне. Виграє той, хто першим напише одноцифрове число. У котрого з гравців є виграшна стратегія?

**6.** Миколка приніс до школи скриньку з квадратним дном розмірами $9 \times 9$, в якій у 9 рядів було укладено 81 однакових кульок так, що жодна з них не могла навіть поворухнутися. Михайлик, початкуючий фокусник, переклав кульки Миколки до своєї чарівної прямокутної скриньки з таким же периметром дна, але площею на 1 меншою, і легенько підштовхнув її з одного боку. Всі кульки спочатку зарухалися, а коли вони зупинилися, то жодні дві з них не торкалися одна одної. Миколка засумнівався, чи не заховав Михайлик принаймні дві з його кульок у своєму рукаві, і перерахував кульки у чарівній скриньці. Він дуже здивувався, коли у ній виявилося навіть на 5 таких кульок більше. Як Михайликові міг вдатися цей фокус?

## ***<u>Розв'язання задач</u>***

**1.** Оскільки найменшим парним складеним числом є число 4, то, починаючи з 8, усі парні числа $n$ можна подати у вигляді суми двох складених чисел $n-4$ та 4. Так само, починаючи з 13, кожне непарне число $n$ можна подати у вигляді суми двох складених чисел $n-9$ та 9. Безпосередньою перевіркою переконуємося, що жодне з інших натуральних чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11 у вказаному вигляді подати не можна. Отже, Миколці не вдасться отримати бажане представлення всього для дев'яти натуральних чисел.

**2.** Помножимо обидві частини поданої рівності на 2 і запишемо її у вигляді $a^2 + b^2 = -(a+b)^2 + 2(a+b)$. Тепер віднімемо 1 від обох частин отриманої рівності. Тоді з нерівності

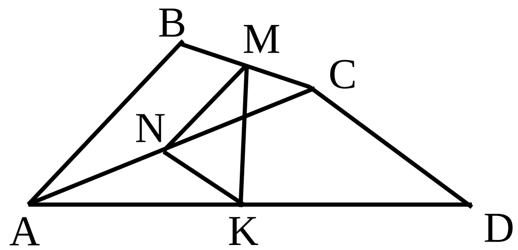
$$a^2 + b^2 - 1 = -\big((a+b) - 1\big)^2 \leq 0$$

будемо мати, що $a^2 + b^2 \leq 1$. А оскільки рівність тут досягається, наприклад, при $a = 1$, $b = 0$, то за поданої умови найбільше значення виразу $a^2 + b^2$ дорівнює 1.

**3.** Спробуємо шукати значення множника $(x - 1)$ серед дільників числа $2024 = 8 \cdot 11 \cdot 23$. Числа 1, 2 та 4 для цього явно замалі. А для $x - 1 = 8$ знайдемо $4x^2 - 8x + 1 = 4 \cdot 9^2 - 8 \cdot 9 + 1 = 253 = 11 \cdot 23$. Тому $x = 9$ – один з коренів поданого рівняння. Розкривши дужки, запишемо це рівняння у вигляді $4x^3 - 12x^2 + 9x - 2025 = 0$ та розкладемо ліву частину на множники:

$$4x^3 - 12x^2 + 9x - 2025 = (x - 9)(4x^2 + ax + 225).$$

Прирівнюючи коефіцієнти біля $x^2$, отримаємо $a = 24$. Оскільки дискримінант квадратного рівняння $4x^2 + 24x + 225 = 0$ від'ємний, то інших дійсних коренів немає.




**4.** Позначимо середини відрізків $BC$, $AC$ та $AD$ точками $M$, $N$ та $K$ відповідно. Оскільки при цьому $MN -$ середня лінія трикутника $ABC$, а $NK -$ середня лінія трикутника $ADC$, то $MN$ паралельна до $AB$ і дорівнює 4, а $NK$ паралельна до $CD$ і дорівнює 3. Крім того, $MN$ та $NK$ перпендикулярні між собою. Тому за теоремою Піфагора шукана відстань $MK$ дорівнює 5 сантиметрів.

**5.** Виграшна стратегія є у Петруся. Першим своїм ходом він може замість числа 2024 записати число 2022. Очевидно, що після цього Миколка своїм першим ходом перемогти не зможе. Далі Петрусеві для перемоги достатньо поступати таким чином. Якщо після чергового ходу Миколки Петрусь може записати одноцифрове число, то він записує його і виграє. В іншому разі Петрусь замість більшого наявного у даний момент часу числа записує число, яке перед цим записав Миколка, зрівнюючи обидва числа на дошці. Такий хід він зможе зробити, бо тільки що саме таке число Миколка зумів записати. Оскільки перед цим Петрусь ще не міг виграти, то і Миколка після такого ходу Петруся своїм наступним ходом також не виграє. Але з кожним зробленим ходом сума записаних чисел зменшується, залишаючись натуральним числом. Тому на якомусь скінченному кроці хтось із цих гравців отримає одноцифрове число і переможе. Зі сказаного вище випливає, що ним буде Петрусь.

**6.** Щоб таким чином 81 кульку розмістити щільно на квадратному дні розмірами $9 \times 9$, необхідно, щоб кульки мали діаметр 1. При цьому периметр дна Миколчиної скриньки дорівнюватиме 36, а його площа – 81. Відповідно, прямокутне дно чарівної скриньки Михайлика матиме розміри $10 \times 8$. Припустимо, що Михайлик спочатку виклав 10 кульок вздовж більшої сторони своєї скриньки, за ними – 9 кульок так, щоб кожна з них торкалася двох кульок з попереднього ряду. Далі знову виклав ряд із 10 кульок, потім – із 9, і продовжив таке чергування до отримання 9 рядів, після чого у чарівній скриньці опинилися $5 \times 10 + 4 \times 9 = 86$ кульок, які й виявив Миколка після підрахунку. Доведемо, що ці 9 рядів Михайликові вдасться викласти. Для цього розглянемо систему із трьох кульок діаметра 1, кожна з яких торкається двох інших. Їх центри є вершинами рівностороннього трикутника зі стороною 1 та висотою, рівною $\sqrt{3}/2$. Цій висоті якраз і дорівнює відстань між серединами сусідніх викладених Михайликом рядів. Якщо додати до таких 8 відстаней з кожного боку ще по пів діаметра кульок, то отримаємо відстань від більшого краю скриньки до верхнього краю дев'ятого ряду $d = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = 4\sqrt{3} + 1 < 8$, бо $\left(4\sqrt{3}\right)^2 = 48 < 49 = 7^2$. Якщо після такого викладання скриньку легенько штовхнути від більшої сторони, то рядки із 10 кульок втратять свою щільність. Відповідно розлетяться й інші кульки. А скринька Михайлика на те і є чарівною, щоб після зупинки жодні дві кульки не торкалися одна одної. Для цього внаслідок строгої нерівності $4\sqrt{3} + 1 < 8$ запасу відстаней між ними вистачить.

## *10 клас*

**1.** Миколка намалював на дошці чотирикутник і стверджує, що тангенси всіх чотирьох його внутрішніх кутів рівні. Чи можуть слова Миколки бути правдою?

**2.** З нагоди свята багато жителів містечка вирішили провести день на лоні природи. Для цього вони замовили всі наявні у місті фургони, у кожному з яких мала їхати однакова кількість осіб. Але 10 фургонів виявилися несправними. Тому всі інші фургони змушені були взяти на одну людину більше. Коли ж всі вирішили повертатися додому, то ще 15 фургонів вийшли з ладу. Тому решті фургонів довелося взяти ще по дві людини додатково. Скільки всього осіб взяли участь у такому масовому відпочинку?

**3.** Натуральні числа $a, b, c$ такі, що їхня сума дорівнює 2024. Доведіть, що $4a^2c^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2$ ділиться націло на 23.

**4.** У трикутнику $ABC$ з кутами $A$ та $C$, рівними 15 та 30 градусів відповідно, проведена медіана $BM$. Знайдіть величину кута $BMC$.

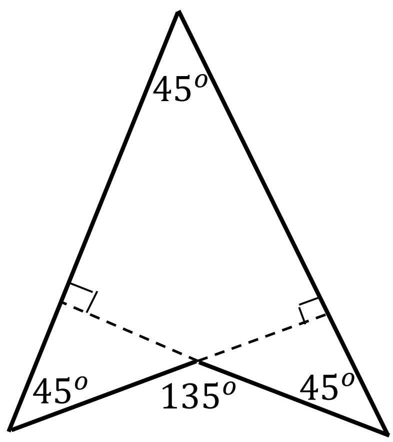
**5.** Квадрат $10 \times 10$ розбитий на 100 одиничних квадратиків $1 \times 1$, кожний з яких пофарбований у синій чи жовтий колір. При цьому при повороті на $90^o$ за рухом годинникової стрілки кожний квадратик $1 \times 1$ потрапляє на місце квадратика, що був пофарбований у протилежний колір. Розфарбування вважаються різними, якщо при їхньому накладанні колір принаймні одного одиничного квадратика не співпадає. Скільки існує різних таких розфарбувань?

**6.** Доведіть, що: а) $S < 0{,}008$; б) $S < 0{,}004$, якщо

$$S = \sum_{n=0}^{24} \frac{1}{2^n + 2^{12}}.$$

## ***<u>Розв'язання задач</u>***

**1.** На перший погляд може здатися, що такого бути не може, бо тангенси прямих кутів не визначені. І для опуклих чотирикутників це справді так. Але для неопуклого чотирикутника, зображеного на малюнку справа, тангенси усіх його чотирьох внутрішніх кутів дорівнюють 1, у тому числі і тангенс найбільшого внутрішнього кута, рівного $360^o - 135^o = 225^o$.




**2.** Нехай усіх наявних у містечку фургонів було $n$, і у кожному з них мало їхати по $x$ осіб. З умов задачі отримуємо систему таких двох рівнянь: $(n-10)(x+1) = nx$ та $(n-25)(x+3) = nx$. Після очевидних спрощень отримуємо $n = 10(x+1)$ та $3n = 25(x+3)$. З рівняння $30(x+1) = 25(x+3)$

знаходимо $x = 9$. Тоді $n = 100$. Це означає, що у такому масовому відпочинку взяли участь 900 осіб.

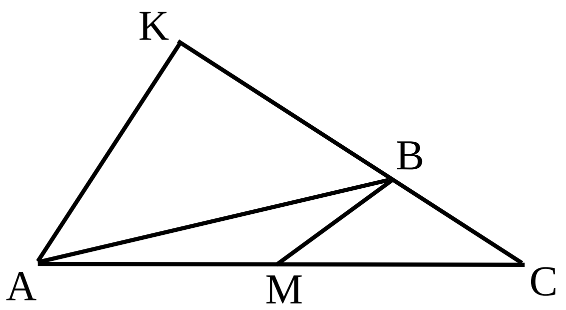
**3.** Розклавши спочатку поданий вираз на множники як різницю квадратів, отримаємо добуток

$$\big(2ac - (a^2 - b^2 + c^2)\big)\big(2ac + (a^2 - b^2 + c^2)\big) =$$
$$= (2ac - a^2 + b^2 - c^2)(2ac + a^2 - b^2 + c^2).$$

Кожен з його множників також як різниці квадратів розкладемо на два лінійні множники:

$$2ac - a^2 + b^2 - c^2 = \big(b - (a - c)\big)\big(b + (a - c)\big),$$
$$2ac + a^2 - b^2 + c^2 = \big((a + c) - b\big)\big((a + c) + b\big).$$

Оскільки для довільних натуральних $a, b, c$ всі 4 отримані лінійні множники набувають цілих значень, і значення виразу $a + b + c$ не дорівнює нулю, то значення виразу $4a^2c^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2$ націло ділиться на $a + b + c = 2024 = 88 \cdot 23$. Отже, ділиться націло і на 23.




**4.** Нехай $AKC -$ прямокутний трикутник з гіпотенузою $AC$, в якому точка $B$ лежить на катеті $KC$ (див. малюнок справа). Його катет $AK = AM$ і дорівнює половині $AC$. Але прямокутний трикутник $AKB$ ще й рівнобедрений, бо його кут $KBA$ дорівнює $45^o$. Тому $AB^2 = 2AK^2 = AM \times AC$ та $AB{:}AM = AC{:}AB$. Отже, трикутники $ABM$ та $ACB$ зі спільним гострим кутом $A$ подібні. Значить, кут $ABM$, як і кут $ACB$, також дорівнює $30^o$, а кут $BMC$ як зовнішній кут трикутника $ABM$ дорівнює $30^o + 15^o = 45^o$.

**5.** Розіб'ємо поданий квадрат на 4 менші квадрати $5 \times 5$ і розглянемо довільну клітинку лівого верхнього з них. Нехай для конкретності вона синього кольору. При повороті на $90^o$ за рухом годинникової стрілки вона перейде у відповідну клітинку правого верхнього квадрата $5 \times 5$, яка внаслідок умови задачі мала би бути жовтого кольору. При наступному такому повороті знову опинимося у клітинці синього кольору з правого нижнього квадрата $5 \times 5$. Третій поворот приведе нас до відповідної клітинки жовтого кольору з лівого нижнього квадрата $5 \times 5$. І, зрозуміло, після наступного повороту клітинка повернеться у своє початкове положення. Таким чином, кольори 25 клітинок лівого верхнього квадрата $5 \times 5$ однозначно визначають кольори клітинок всього квадрата $10 \times 10$. А оскільки кожна з таких клітинок могла бути пофарбована в один із двох кольорів, то різних розфарбувань існує $2^{25}$.

**6.** а). Справді,

$$S=\sum_{n=0}^{24}\frac{1}{2^n+2^{12}}<\sum_{n=0}^{24}\frac{1}{2^{12}}=\frac{25}{2^{12}}<\frac{32}{2^{12}}=\frac{1}{2^7}=\frac{1}{128}<\frac{1}{125}=0{,}008.$$

б). Розглянемо такий ланцюжок рівностей:

$$2S=S+S=\sum_{n=0}^{24}\frac{1}{2^n+2^{12}}+\sum_{n=0}^{24}\frac{1}{2^{24-n}+2^{12}}=$$

$$=\sum_{n=0}^{24}\left(\frac{1}{2^n+2^{12}}+\frac{1}{2^{24-n}+2^{12}}\right)=\frac{1}{2^{12}}\sum_{n=0}^{24}\left(\frac{1}{2^{n-12}+1}+\frac{1}{2^{12-n}+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2^{12}}\sum_{n=0}^{24}\left(\frac{1}{2^{n-12}+1}+\frac{2^{n-12}}{1+2^{n-12}}\right)=\frac{1}{2^{12}}\sum_{n=0}^{24}\frac{1+2^{n-12}}{2^{n-12}+1}=\frac{25}{2^{12}}<0{,}008.$$

Звідси випливає, що $S<0{,}004$. Тим більше $S<0{,}008$, як у пункті а).

## *11 клас*

**1.** На дошці записані числа 1, 2, 3, …, 2024. З’ясуйте, яких чисел серед них більше – таких, що кратні принаймні одному з чисел 3 або 4, чи усіх інших.

**2.** Знайдіть усі натуральні числа $n$, для яких число $n^{\frac{1}{n-7}}$ також є натуральним числом.

**3.** У магічному квадраті $4 \times 4$ всі суми чисел по рядках, стовпчиках та діагоналях дорівнюють одному і тому ж числу $S$. Доведіть, що й сума чисел центрального квадратика $2 \times 2$ також дорівнює $S$.

**4.** У трикутнику $ABC$ з кутами $A$ та $C$, рівними 15 та 30 градусів відповідно, проведена медіана $BM$. Доведіть, що пряма $AB$ дотикається до кола, описаного навколо трикутника $BMC$.

**5.** Знайдіть усі цілочислові розв’язки рівняння

$$\frac{8^x - 2^x}{6^x - 3^x} = 2.$$

**6.** Доведіть нерівності $S < 2^{-1001}$ та $S < 2^{-1002}$ , якщо

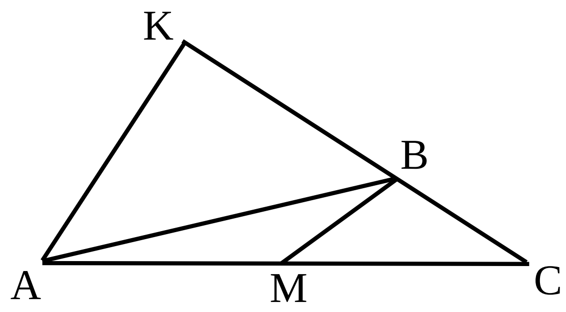
$$S = \sum_{n=0}^{2024} \frac{1}{2^n + 2^{1012}}.$$

## ***Розв’язання задач***

**1.** Серед кожних дванадцяти послідовних чисел є порівну чисел, кратних принаймні одному з чисел 3 або 4, та усіх інших. Наприклад, серед чисел від 1 до 12 першій множині належатимуть числа 3, 4, 6, 8, 9 та 12, а другій – усі решта. Оскільки 2024 при діленні на 12 дає остачу 8, то досить порівняти кількості чисел з такими властивостями серед перших восьми. З них кратних 3 або 4 є чотири числа, а інших – також чотири. Тому серед чисел 1, 2, 3, …, 2024 як одних, так й інших чисел порівну.

**2.** Безпосередньою перевіркою переконуємося, що серед чисел $n \leq 10$ умову задачі задовольняють лише 1, 8, 9. Інших розв’язків немає, бо $1 < n^{\frac{1}{n-7}} < 2$ для $n \geq 11$. Така подвійна нерівність рівносильна нерівності $1 < n < 2^{n-7}$. Отже, достатньо довести лише нерівність $2^{n-7} > n$ для $n \geq 11$. Якщо $n = 11$, то вона правильна, бо $2^4 > 11$. А з припущення її правильності для $n = k \geq 11$ випливає для $n = k + 1$, що $2^{k+1-7} = 2 \cdot 2^{k-7} > 2k > k + 1$. Тому внаслідок принципу математичної індукції така нерівність правильна для всіх натуральних $n \geq 11$.

**3.** Нехай усі 10 вказаних в умові задачі сум дорівнюють $S$, а сума чисел центрального квадратика $2 \times 2$ дорівнює $P$. Додамо до цих десяти сум ще й 4 суми по двох рядках та двох стовпчиках цього квадрата, які проходять через центральний квадратик $2 \times 2$. При цьому кожне число центрального квадратика буде пораховано 5 разів, а решта чисел магічного квадрата – тричі. Таким чином, отримуємо рівняння $14S = 3 \cdot 4S + 2P$, з якого знаходимо $P = S$, що й треба було довести.




**4.** Будемо міркувати аналогічно, як при розв’язуванні задачі 3 за 10 клас. Нехай $AKC -$ прямокутний трикутник з гіпотенузою $AC$, в якому точка $B$ лежить на катеті $KC$ (див. малюнок справа). Його катет $AK = AM$ і дорівнює половині $AC$. Але прямокутний трикутник $AKB$ ще й рівнобедрений, бо його кут $KBA$ дорівнює $45^o$. Тому $AB^2 = 2AK^2 = AM \cdot AC$.

Отримана рівність характеризує властивість відрізків $AM$ та $AC$ січної і відрізка $AB$ дотичної до кола, описаного навколо трикутника $BMC$. Для жодної іншої точки $P$ на цьому колі такої, що пряма $AP$ перетинає його ще й у точці $Q$, рівність $AP^2 = AM \cdot AC$ виконуватися не може, бо тоді $AP \cdot AQ = AM \cdot AC$, але $AQ \neq AP$.

**5.** Зрозуміло, що $x$ не може дорівнювати нулю. Для всіх інших значень спростимо ліву частину рівняння:

$$\frac{8^x - 2^x}{6^x - 3^x} = \frac{2^x(2^{2x} - 1)}{3^x(2^x - 1)} = \frac{2^x(2^x + 1)}{3^x}.$$

Внаслідок цього рівняння можна буде записати у вигляді:

$$2^{x-1}(2^x + 1) = 3^x.$$

Його очевидним розв’язком є $x = 1$, а для натуральних $x \geq 2$ така рівність виконуватися не може, бо при цьому її ліва частина буде парним числом, а права – непарним.

Якщо ж ціле число $x$ є від’ємним, то покладемо $x = -n$ і запишемо цю рівність у вигляді $2^{-n-1}(2^{-n} + 1) = 3^{-n}$. Помноживши обидві її частини на $2^{2n+1}3^n$, будемо мати $3^n(1 + 2^n) = 2^{2n+1}$. І знову суперечність, бо добуток зліва непарне число, а число справа – парне.

Таким чином, $x = 1$ є єдиним шуканим розв’язком.

**6.** Справді,

$$S = \sum_{n=0}^{2024} \frac{1}{2^n + 2^{1012}} < \sum_{n=0}^{2024} \frac{1}{2^{1012}} = \frac{2025}{2^{1012}} < \frac{2048}{2^{1012}} = \frac{2^{11}}{2^{1012}} = 2^{-1001}.$$

А для доведення другої нерівності розглянемо такий ланцюжок рівностей:

$$2S = S + S = \sum_{n=0}^{2024} \frac{1}{2^n + 2^{1012}} + \sum_{n=0}^{2024} \frac{1}{2^{2024-n} + 2^{1012}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{2024} \left( \frac{1}{2^n + 2^{1012}} + \frac{1}{2^{2024-n} + 2^{1012}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2^{1012}} \sum_{n=0}^{2024} \left( \frac{1}{2^{n-1012} + 1} + \frac{1}{2^{1012-n} + 1} \right) =$$

$$= \frac{1}{2^{1012}} \sum_{n=0}^{2024} \left( \frac{1}{2^{n-1012} + 1} + \frac{2^{n-1012}}{1 + 2^{n-1012}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2^{1012}} \sum_{n=0}^{2024} \frac{1 + 2^{n-1012}}{2^{n-1012} + 1} = \frac{2025}{2^{1012}} < 2^{-1001}.$$

Звідси випливає, що $S < 2^{-1002}$. А, як наслідок, також $S < 2^{-1001}$.