

### III етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2023/2024 н. р.

Івано-Франківськ, 28 січня 2024 року

#### 7 клас. Завдання 1

1. У класі більше двадцяти, але менше тридцяти учнів, і дні народження у всіх із них різні. Миколка сказав: «У нашому класі вдвічі більше старших за мене учнів, ніж молодших». Катруся сказала: «У нашому класі втричі більше старших за мене учнів, ніж молодших». Скільки учнів у цьому класі, якщо слова обох були правдою?

2. Натуральні числа  $x$  та  $y$  задовольняють рівність

$$(x - y)(x - 2y)(x + 3y) = 2024.$$

Знайдіть хоч одну пару таких чисел.

На виконання завдання відводиться 40 + 40 хвилин.

#### 7 клас. Завдання 2

3. Зла чаклунка погрожує спелити всю планету своїм новим грізним закляттям «ВУЛКАНИ ТА ЖАРА». Воно активується, якщо різні його букви замінити різними цифрами так, щоб отримане при цьому 13-цифрове число стало простим числом. Чи треба боятися такого закляття злої чаклунки? Відповідь обґрунтуйте.

4. Точка  $M$  – середина сторони  $CD$  прямокутника  $ABCD$ , а точка  $K$  лежить на його стороні  $AD$ . Знайдіть величину кута  $BKM$ , якщо кути  $CBM$  та  $KBM$  дорівнюють по  $25^\circ$ .

На виконання завдання відводиться 40 + 40 хвилин.

#### 7 клас. Завдання 3

5. У коробці є 7 синіх та 7 жовтих кульок. Петрик навмання виймає їх з коробки, доки вперше не настане момент, що витягнута однакова кількість кульок обох кольорів. Виявилось, що для цього Петрику довелося вийняти усі кульки, причому жодного разу ним не були вийняті підряд 3 кульки одного кольору. Доведіть, що кульки, які виймалися одинадцятю та дванадцятю, були різного кольору.

6. Знайдіть усі пари невід'ємних цілих чисел  $a$  та  $b$  таких, що  $(a! + 1)(b! + 1) = (a + b)!$  Нагадаємо, що  $0! = 1$ ,  $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$ .

На виконання завдання відводиться 40 + 40 хвилин.

**III етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2023/2024 н. р.**

**Івано-Франківськ, 28 січня 2024 року**

**8 клас. Завдання 1**

1. Цілі числа  $x$  та  $y$  задовольняють рівність

$$(x + y)(x + 2y)(x - 3y) = 2024.$$

Знайдіть хоч одну пару таких чисел.

2. Додатні числа  $x, y$  задовольняють рівність  $x^3 - y^3 = 4x$ . Доведіть, що  $x^2 > 2y$ .

На виконання завдання відводиться 40 + 40 хвилин.

**8 клас. Завдання 2**

3. Марійка розрізала квадрат  $8 \times 8$  вздовж ліній сітки на частини з однаковим периметром. Яку найбільшу кількість частин вона могла отримати, якщо відомо, що не всі вони були рівними?

4. На сторонах  $BC$  та  $CD$  квадрата  $ABCD$  відклали точки  $M$  та  $K$  відповідно такі, що кути  $BAM$  та  $CKM$  дорівнюють по  $30^\circ$ . Знайдіть величини кутів трикутника  $AMK$ .

На виконання завдання відводиться 40 + 40 хвилин.

**8 клас. Завдання 3**

5. Юний математик, опинився на острові, всі жителі якого дуже добре знали математику, але лише деякі з них завжди говорили правду, а інші – завжди брехали. Запитавши одного із жителів острова «Чи можна записати по колу числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 так, щоб кожне записане число ділилося націло на різницю двох сусідніх з ним чисел?», він за почутою відповіддю зразу визначив, хто стояв перед ним: брехун чи правдолюб. А чи могли б це зробити ви?

6. Обчисліть добуток  $abcd$ , якщо  $4^a = 5$ ,  $5^b = 6$ ,  $6^c = 7$ ,  $7^d = 8$ .

На виконання завдання відводиться 40 + 40 хвилин.

### III етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2023/2024 н. р.

Івано-Франківськ, 28 січня 2024 року

#### 9 клас. Завдання 1

1. Миколка хоче подати кожне натуральне як суму двох складених натуральних чисел. Для скількох натуральних чисел йому це не вдасться зробити?

2. Числа  $a$  та  $b$  задовольняють рівність  $a^2 + b^2 + ab = a + b$ . Знайдіть найбільше можливе значення виразу  $a^2 + b^2$ .

На виконання завдання відводиться 40 + 40 хвилин.

#### 9 клас. Завдання 2

3. Розв'яжіть рівняння  $(x - 1)(4x^2 - 8x + 1) = 2024$ .

4. Знайдіть відстань між серединами сторін  $BC$  та  $AD$  опуклого чотирикутника  $ABCD$ , якщо його сторони  $AB$  та  $CD$  лежать на двох перпендикулярних прямих і дорівнюють 8 та 6 сантиметрів відповідно.

На виконання завдання відводиться 40 + 40 хвилин.

#### 9 клас. Завдання 3

5. На дошці записані числа 2022 та 2024. Миколка і Петрусь ходять по черзі, розпочинає Петрусь. За один хід можна зменшити одне з чисел на його ненульову цифру чи на ненульову цифру іншого числа, або поділити одне з чисел на 2, якщо воно парне. Виграє той, хто першим напише одноцифрове число. У котрого з гравців є виграшна стратегія?

6. Миколка приніс до школи скриньку з квадратним дном розмірами  $9 \times 9$ , в якій у 9 рядів було укладено 81 однакових кульок так, що жодна з них не могла навіть повернутися. Михайлик, початкуючий фокусник, переклав кульки Миколки до своєї чарівної прямокутної скриньки з таким же периметром дна, але площею на 1 меншою, і легенько підштовхнув її з одного боку. Всі кульки спочатку зарухалися, а коли вони зупинилися, то жодні дві з них не торкалися одна одної. Миколка засумнівався, чи не заховав Михайлик принаймні дві з його кульок у своєму рукаві, і перерахував кульки у чарівній скриньці. Він дуже здивувався, коли у ній виявилось навіть на 5 таких кульок більше. Як Михайликові міг вдатися цей фокус?

На виконання завдання відводиться 40 + 40 хвилин.

### III етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2023/2024 н. р.

Івано-Франківськ, 28 січня 2024 року

#### 10 клас. Завдання 1

1. Миколка намалював на дошці чотирикутник і стверджує, що тангенси всіх чотирьох його внутрішніх кутів рівні. Чи можуть слова Миколки бути правдою?

2. З нагоди свята багато жителів містечка вирішили провести день на лоні природи. Для цього вони замовили всі наявні у місті фургони, у кожному з яких мала їхати однакова кількість осіб. Але 10 фургонів виявилися несправними. Тому всі інші фургони змушені були взяти на одну людину більше. Коли ж всі вирішили повертатися додому, то ще 15 фургонів вийшли з ладу. Тому решті фургонів довелося взяти ще по дві людини додатково. Скільки всього осіб взяли участь у такому масовому відпочинку?

На виконання завдання відводиться 40 + 40 хвилин.

#### 10 клас. Завдання 2

3. Натуральні числа  $a, b, c$  такі, що їхня сума дорівнює 2024. Доведіть, що  $4a^2c^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2$  ділиться націло на 23.

4. У трикутнику  $ABC$  з кутами  $A$  та  $C$ , рівними 15 та 30 градусів відповідно, проведена медіана  $BM$ . Знайдіть величину кута  $BMC$ .

На виконання завдання відводиться 40 + 40 хвилин.

#### 10 клас. Завдання 3

5. Квадрат  $10 \times 10$  розбитий на 100 одиничних квадратиків  $1 \times 1$ , кожний з яких пофарбований у синій чи жовтий колір. При цьому при повороті на  $90^\circ$  за рухом годинникової стрілки кожний квадратик  $1 \times 1$  потрапляє на місце квадратика, що був пофарбований у протилежний колір. Розфарбування вважаються різними, якщо при їхньому накладанні колір принаймні одного одиничного квадратика не співпадає. Скільки існує різних таких розфарбувань?

6. Доведіть, що: а)  $S < 0,008$ ; б)  $S < 0,004$ , якщо

$$S = \sum_{n=0}^{24} \frac{1}{2^n + 2^{12}}.$$

На виконання завдання відводиться 40 + 40 хвилин.

**III етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2023/2024 н. р.**

**Івано-Франківськ, 28 січня 2024 року**

**11 клас. Завдання 1**

1. На дошці записані числа  $1, 2, 3, \dots, 2024$ . З'ясуйте, яких чисел серед них більше – таких, що кратні принаймні одному з чисел 3 або 4, чи усіх інших.

2. Знайдіть усі натуральні числа  $n$ , для яких число  $n^{\frac{1}{n-7}}$  також є натуральним числом.

На виконання завдання відводиться 40 + 40 хвилин.

**11 клас. Завдання 2**

3. У магічному квадраті  $4 \times 4$  всі суми чисел по рядках, стовпчиках та діагоналях дорівнюють одному і тому ж числу  $S$ . Доведіть, що й сума чисел центрального квадратика  $2 \times 2$  також дорівнює  $S$ .

4. У трикутнику  $ABC$  з кутами  $A$  та  $C$ , рівними 15 та 30 градусів відповідно, проведена медіана  $BM$ . Доведіть, що пряма  $AB$  дотикається до кола, описаного навколо трикутника  $BMC$ .

На виконання завдання відводиться 40 + 40 хвилин.

**11 клас. Завдання 3**

5. Знайдіть усі цілочислові розв'язки рівняння

$$\frac{8^x - 2^x}{6^x - 3^x} = 2.$$

6. Доведіть нерівності  $S < 2^{-1001}$  та  $S < 2^{-1002}$ , якщо

$$S = \sum_{n=0}^{2024} \frac{1}{2^n + 2^{1012}}.$$

На виконання завдання відводиться 40 + 40 хвилин.