Завдання XVIII обласного турніру юних математиків 2024-2025 н. р.

1. На участь в турнірі юних математиків подали заявки 16 команд. Оргкомітет планує провести турнір так, щоб у кожному турі у чотирьох групах змагалися по чотири команди, причому жодні дві команди-учасниці не зустрічалися між собою більше одного разу. Чи вдасться йому реалізувати свій задум у випадку: а) чотирьох, б) п’яти турів?

2. а) Доведіть, що $8sin10^o sin50^o sin70^o = 1$.

б) Обґрунтуйте цю ж рівність, використовуючи з курсу тригонометрії лише означення синуса гострого кута прямокутного трикутника як відношення протилежного катета до гіпотенузи.

3. а) Доведіть, що з чотирьох прямокутних трикутників з меншими гострими кутами $10^o,\ 20^o,\ 30^o,\ 40^o$ відповідно можна скласти опуклий чотирикутник з перпендикулярними діагоналями.

б) Як можна використати цей факт для доведення рівності

$$tg10^o tg50^o tg60^o tg70^o = 1\ ?$$

4. Елементи послідовності (U_n) визначаються умовами: $U_0 = 0,\ \ U_1 = 1,$ $U_{n+2} = pU_{n+1} + qU_n$, де p та q − цілі числа, $n \geq 0$. Доведіть, що число $U_{5^{2024}}$ ділиться націло на 5^{2024}, але не ділиться націло на 5^{2025}, якщо:

а) $p = 1, q = 1$; б) $p = 3, q = -1$.

5. Площина розбита горизонтальними та вертикальними прямими на одиничні квадратики. Миколка стверджує, що у кожен з них можна вписати по одному натуральному числу від 1 до 16 включно так, щоб у довільному квадраті 4×4 цієї площини було по одному разові записане кожне з цих чисел, і всі 10 сум по рядках, стовпчиках та діагоналях такого квадрата дорівнювали 34.

а) Доведіть, що слова Миколки можуть бути правдою.

б) Чи обов’язково при цьому у довільному квадраті 2×2 сума чотирьох записаних у ньому чисел також дорівнює 34?

6. Напередодні XVIII обласного турніру з математики 24 члени комісії МАН, кожен з яких був або лицарем, або брехуном, сиділи за круглим столом і вирішували питання щодо проведення XXIV Всеукраїнського турніру юних математиків. Після засідання всі вони висловили такі дві фрази: 1) «серед шести найближчих сусідів ліворуч від мене було порівну лицарів та брехунів», 2) «я проголосував за проведення турніру».

а) Скільки членів комісії насправді підтримали проведення турніру, якщо відомо, що лицар завжди каже правду, а брехун завжди бреше?

б) Якою могла би бути доля турніру, якщо б за нього голосувала аналогічна інша комісія у складі 28 осіб, висловивши ці ж дві фрази?

7. Розв'яжіть рівняння:

а) $4x(2x^2 - 1) = 1$,

б) $8x(2x^2 - 1)(8x^4 - 8x^2 + 1) = 1$.

8. Три рівносторонні трикутники з площами 9, 1 та 4 розташовані послідовно один за одним так, що їхні основи лежать на одній прямій l, дотикаючись вершинами трикутників. Знайдіть площу трикутника, утвореного вершинами таких трикутників, які не лежать на цій прямій, якщо:

а) всі вони знаходяться по одну сторону від прямої l;

б) одна з вершин знаходиться по іншу сторону від l.

9. Знайдіть усі значення параметра p, за яких сума дійсних коренів рівняння $sin\sqrt{px - x^2} = 0$ дорівнює: а) рівно 100; б) рівно 2024.

10. З двох наступних тверджень про пряму, яка ділить навпіл як периметр, так і площу довільного трикутника, виберіть правильне (якщо на вашу думку таке існує) та обґрунтуйте свій вибір:

а) Ця пряма обов'язково проходить через точку перетину медіан трикутника.

б) Вона проходить через точку перетину бісектрис трикутника.

11. Розв'яжіть рівняння

$$(a - x^2)(b - x)^2 = b^2x^2$$

а) при $a = 24,\ b = 1$;

б) при довільних дійсних значеннях параметрів a, b.

12. Дослідіть, при яких значеннях параметра a для всіх $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

справджується нерівність

а) $tgx > sin\,x + a \cdot sin^3x$;

б) $tgx > sin\,x + a \cdot sin^2x$.

13. Після першого кола чемпіонату з футболу, у якому беруть участь n команд, чотири команди з перших п'яти у турнірній таблиці набрали по 38 очок. Яку найбільшу можливу кількість очок могла набрати п'ята команда (у колі чемпіонату кожна команда грає з кожною один раз, за перемогу команда отримує 3 очки, за нічию – 1 очко, за поразку – 0 очок):

а) при $n = 16$?

б) при довільному натуральному $n \geq 13$?

14. Для деяких цілих чисел a, b система рівнянь

$$\begin{cases} x + ay + 2z = k \\ bx + 3y + 4z = l \\ 2x + y + 3z = m \end{cases}$$

при всіх цілих значеннях параметрів k, l, m має лише цілі розв'язки x, y, z.

а) Знайдіть хоча б одну таку пару цілих чисел (a, b);

б) Знайдіть усі такі пари цілих чисел (a, b).

15. а) Залежно від значення параметра n знайдіть максимальну можливу кількість розв'язків рівняння

$$\left(\frac{1000}{n}\right)^{x} = log_{\frac{1000}{n}}(x).$$

б) Знайдіть максимальне натуральне значення параметра n, при якому рівняння з пункту а) має максимально можливу кількість розв'язків?

16. З набору десяти перших натуральних чисел вибрали чотири попарно різних числа, які можуть бути довжинами сторін для деякої трапеції і тільки для неї.

а) Скількома способами це можна зробити?

б) Якого найбільшого значення може набувати площа трапеції у такому випадку?

17. На земельній ділянці у вигляді ромба $ABCD$ з діагоналями 80 і 60 метрів, Петрик проклав доріжки загальної довжини l метрів таким чином, що з кожної вершини ромба можна пройти по цих доріжках у будь-яку іншу вершину ромба.

а) Чи зміг Петрик задовольнити оцінку $l < 135{,}5$?

б) Знайдіть найменше можливе значення l.

18. Знайдіть найменший період у послідовності $a_n = n^{n-1}\ (mod\ k)$

а) при $k = 10$;

б) при кожному значенні $k = 2,3 \ldots ,9$.

19. Нехай задані натуральні числа $k < m,\ l < n$. Миколка пропонує Петрику зіграти у таку гру. З колоди, що містить m карт червоної масті і n карт чорної масті, Петрик випадковим чином вибирає $k + l$ карт. Петрик виграє, якщо виявиться рівно k карт червоної масті.

а) При якому найменшому значенні $m + n$ ймовірність його перемоги у такій грі дорівнює рівно ½?

б) Знайдіть усі натуральні значення m, n, при яких Петрик також вигроватиме з ймовірністю ½.

20. Опуклий n-кутник М розрізали на 2024 трикутники з вершинами у вершинах многокутника М і в m точках, які розташовані всередині многокутника М.

а) Знайдіть найменше значення $m + n$;

б) Знайдіть усі можливі значення $m + n$.

Примітка. При підготовці доповідей врахувати можливі відключення електроенергії підчас проведення турніру і бути готовими доповідати без електронних засобів.