

**Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника**

**Завдання першого туру дистанційного етапу
Всеукраїнської олімпіади з математики
для професійної орієнтації вступників
на базі повної загальної середньої освіти**

www: katg.pnu.edu.ua

mailto: katg@pnu.edu.ua

1. Знайко запропонував Незнайкові гру: Знайко пише на дошці число 11, а Незнайко щодня дописує між одиницями додатковий нуль, отримуючи 101, 1001, 10001 і т.д. Якщо отримане число ділиться на 7, то Незнайко отримує від Знайка 5 золотих монет, а якщо не ділиться, то сплачує одну. Чи варто Незнайкові грати у цю гру?

2. Розв'яжіть нерівність

$$\sqrt{x(1-x)} \geq \sqrt{x-1}.$$

3. Єдиною парою натуральних чисел a, b , для яких сума $a + b$ дорівнює добутку ab , є 2, 2. Скільки існує *різних* (тобто таких, що відрізняються не тільки порядком чисел) *трижок* натуральних чисел a, b, c , для яких $a + b + c = abc$?

4. Фермер кам'яного віку вирішив запустити у свій ставок 20 динозаврів м'ясної породи. Щомісяця кожна самка динозавра народжує ще трьох динозаврів, а самець з'їдає п'ятьох (байдуже, якої статі і віку). Відрізнити за виглядом самця від самки неможливо. За місяць фермер виявив у ставку 37 динозаврів. Чому він звинувачує сусіда у крадіжці худоби? Яку найменшу кількість динозаврів поцупив сусід?

5. Незнайко протягом тижня повинен був щодня виконувати по три вправи з математики, але дуже не любив одноманітності, тому домовився з вчителем, що кожного з семи днів він виконуватиме іншу кількість вправ. Полегшив чи ускладнив Незнайко свою загальну роботу цього тижня?

6. Знайдіть всі додатні x, y , що є розв'язками системи рівнянь

$$\begin{cases} x + x^2 = 1 + y^3; \\ y + y^2 = 1 + x^3. \end{cases}$$

7. Два прямокутні трикутники мають однакову гіпотенузу, але сторони одного з них утворюють арифметичну прогресію, а сторони іншого — геометричну прогресію. Який з них має більшу площу?

8. Незнайко розповідає, що вирізав з картону трикутник площі 12 см^2 , але він був завеликий, тому Незнайко обрізав з трьох боків смужки ширини по 1 см , і площа трикутника зменшилась вдвічі. Доведіть, що Незнайко не знає геометрії.

9. Життя мешканців країни Шоуландії регулюють 1000 законів. Новобраний президент країни разом зі своїм урядом вирішив звільнити народ від всіх обмежень, призупинивши їх дію. Президент та уряд можуть видавати укази і постанови (кожен не більш, ніж по одному документу за день), що змінюють статус законів — дію одних призупиняють, а інших, можливо, відновлюють. Кожен указ президента змінює статус 17 законів, а постанова уряду — 13 законів. За який найкоротший час влада зможе зробити свій народ щасливим?

10. Знайдіть всі пари цілих чисел a і b , для яких $a^2 + a$ більше на 2 за $b^2 + b$.

Примітка. Цю задачу можна розв'язати з допомогою програми на C/C++, Python чи Java, якщо разом з програмою буде надіслано її пояснення.

“Затверджую”



Голова предметно-методичної комісії

Дата оприлюднення : 24 жовтня 2024 року

Розв'язання та їх можливі доповнення або виправлення надіслати до :

15 грудня 2024 року

Поштова адреса: Факультет математики та інформатики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника, вул. Шевченка 57/317, Івано-Франківськ, 76018

Електронна адреса: katg@pnu.edu.ua, тема листа “Олімпіада”