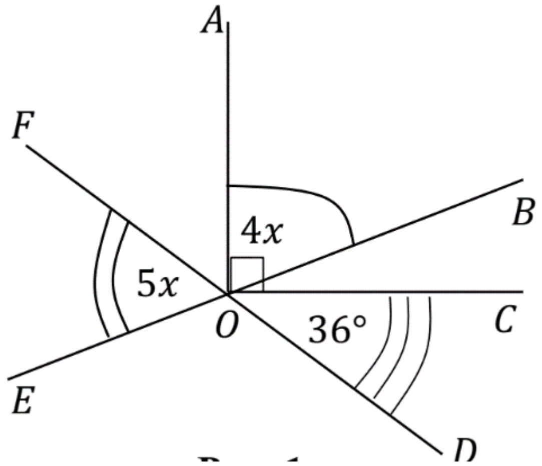
III етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 2025 рік, І тур

7 клас

1. Прямі FD та BE перетинаються в точці O. З точки O проведені також промені OA та OC, при цьому про кути, що утворилися, відомі такі умови: $\angle DOC = 36°$, $\angle AOC = 90°$, $\angle AOB = 4x$ та $\angle FOE = 5x$, як це показане на малюнку справа. Чому дорівнює градусна міра величини x?



2. Доведіть, що число $3\underbrace{99\ldots9}_{2025}6\underbrace{00\ldots0}_{2025}1$ є квадратом натурального числа.

3. У чемпіонаті факультету кібернетики з футболу взяли участь $n \geq 3$ команд. Змагання пройшли в одне коло, тобто кожна команда зіграла проти кожної іншої рівно 1 раз. За перемогу в матчі нараховується 3 очки, за поразку очок не нараховується, за нічию команди отримують по 1 очку. Виявилося, що переможцем стала команда, яка набрала очок більше ніж будь-яка інша команда, та в якої перемог було не більше ніж поразок. При якому найменшому n таке могло відбутися?

4. Знайдіть усі натуральні числа a, b, c, що задовольняють такі умови: $a + b + c = 16$, $abc = 120$, $a < b < c$.

8 клас

1. Знайдіть усі натуральні числа a, b, c, які задовольняють рівність

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}} = 20{,}25.$$

2. Чи можна записати в кожну комірку таблиці 45×45 натуральні числа від 1 до 2025 так, щоб кожне число було використане рівно один раз, і при цьому, щоб кожне записане число було або більшим за усі числа, що розташовані у сусідніх по стороні комірках, або меншим за усі числа, що розташовані в сусідніх по стороні комірках?

3. Для якого найменшого натурального числа $n > 3$ не існує (не обов'язково опуклий) n-кутник, у якого всі діагоналі рівні?

Діагоналлю довільного многокутника називають відрізок, який з'єднує будь-які дві не сусідні вершини цього многокутника.

4. Петрик, Василь та Грицько їздили на велосипедах по одному кільцевому треку водному напрямі. Відомо, що швидкість Петрика 30 км/год, а Василя – 20 км/год. Яка швидкість Грицька, якщо відомо, що вони одночасно стартували з однієї точки і в тій самій точці одночасно фінішували, при цьому за цей час Петрик 8 разів випередив Грицька, а Василь – двічі випередив Грицька?

5. Знайдіть принаймні одну таку четвірку натуральних чисел (a, b, c, d), що задовольняє умову

$$a^{2021} + b^{2023} = 11(c^{2022} + d^{2024}).$$

9 клас

1. Скільки існує трицифрових чисел із сумою цифр 7, які не мають у записі нуля.

2. Чи можна числа від 1 до 2025 розставити по колу таким чином, щоб різниця між кожними двома сусідніми числами мала вигляд $2k$ для деяких цілих невід'ємних чисел k? Для різних сусідніх пар чисел числа k можуть бути різними.

3. Точка H - точка перетину висот гострокутного трикутника ABC, AD - його висота. До кола з центром у точці A та радіусом AD проведено дотичні з точок B і C, які не співпадають з прямою BC. Ці дотичні перетинаються в точці P. Доведіть, що радіус вписаного кола ΔBCP дорівнює HD.

4. На яке найбільше просте число ділиться натуральне число

$$\frac{2 + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + 4 \cdot 4! + \cdots + 2023 \cdot 2023!}{2022!}?$$

Символом $n!$ позначено добуток усіх натуральних чисел від 1 до n.

5. На скільки нулів закінчується найменше число, що ділиться і на 2, і на 5, та має рівно 2021 дільник?

10 клас

1. Задані 11 чисел, середнє арифметичне яких дорівнює 10. До кожного з перших чотирьох чисел додали 20, а від кожного з семи останніх відняли 24. Чому дорівнює середнє арифметичне нових 11 чисел?

2. Див. задачу 2 за 9 клас.

3. Діаметр AD описаного кола трикутника ABC перетинає пряму BC у точці K. Точку D симетрично відобразили відносно точки K і отримали точку L. На прямій AB обрана така точка F, що $FL \perp AC$. Доведіть, що $FK \perp AD$.

4. Послідовність (a_n) будуємо таким чином: $a_1 = \frac{10}{11}$; якщо дріб $a_n = \frac{p}{q}$ нескоротний, то $a_n = \frac{p+2}{q+3}$ після того, як він стане нескоротним. Тобто ми маємо, що $a_2 = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$, $a_3 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$, … . Визначте, чи існує найбільший індекс n, для якого член послідовності a_n будується скороченням відповідного дробу $\frac{p+2}{q+3}$.

5. Додатні числа x, y, z задовольняють умову $x + 3y + 5z = 72$. Яке найменше значення може набувати вираз $\frac{1}{x} + \frac{3}{y} + \frac{5}{z}$?

11 клас

1. Знайдіть усі трицифрові числа, які у 5 разів більші за добуток своїх цифр.

2. На дошці виписані усі натуральні числа від 1 до 2025. Михайло та Олексій грають у таку гру. Вони по черзі, починає Михайло, стирають з дошки одне з записаних на ній чисел. Гра закінчується, коли на дошці залишаються рівно два числа. Якщо їх сума є точним квадратом цілого числа, виграє Михайло, інакше – виграє Олексій. Хто виграє при правильній грі обох гравців?

3. Див. задачу 3 за 10 клас.

4. Див. задачу 5 за 9 клас.

5. Знайдіть усі трійки дійсних чисел (a, b, c), які задовольняють умови:

$$(2a + 1)^2 - 4b = (2b + 1)^2 - 4c = (2c + 1)^2 - 4a = 5.$$

Розв'язання задач

7 клас

1. Кут AOC прямий, а кути FOE та BOD вертикальні. Тому

$$4x + 5x = \angle AOB + \angle FOE = \angle AOB + \angle BOD =$$
$$= \angle AOC + \angle COD = 90° + 36° = 126°.$$

Отже, $x = 126°/9 = 14°$.

2. Розв'яжемо загальнішу задачу. Нехай число 399…9600…01 містить у записі n дев'яток та n нулів. Його можна записати у вигляді

$$3 \cdot 10^{2n+2} + (10^n - 1) \cdot 10^{n+2} + 6 \cdot 10^{n+1} + 1 =$$
$$= 4 \cdot 10^{2n+2} - 4 \cdot 10^{n+1} + 1 = (2 \cdot 10^{n+1} - 1)^2.$$

3. $n \neq 3$, бо якщо команда-переможець двічі зіграла внічию, то принаймні ще одна з решти двох команд матиме не менше двох очок незалежно від того, як вони зіграють між собою. А якщо команда-переможець раз виграла, а раз програла, то принаймні ще одна команда матиме не менше трьох очок.

$n \neq 4$, бо якщо команда-переможець тричі зіграла внічию, то решта 3 команди у матчах між собою разом наберуть ще не менше 6 очок, отже, принаймні одна з них у сумі також матиме не менше трьох очок. А якщо переможець раз виграла, раз зіграла внічию і раз програла, то команда, якій вона програла, має програти обидва свої матчі решті двом командам. Але, якби ці команди не зіграли між собою, принаймні одна з них також матиме не менше чотирьох очок.

Зрозуміло також, що як для $n = 3$, так і для $n = 4$ у разі більшої кількості поразок, ніж перемог, то команда тим більше не зможе набрати найбільше очок.

Тому залишається довести, що для $n = 5$ всі умови задачі можуть бути виконані. Для цього достатньо навести приклад відповідної турнірної таблиці:

Команда	I	II	III	I	V	М'ячі	Очки
I	-----	0 : 2	0 : 1	2 : 0	3 : 0	5 : 3	6
II	2 : 0	-----	0 : 0	0 : 1	0 : 0	2 : 1	5
III	1 : 0	0 : 0	-----	0 : 0	0 : 1	1 : 1	5
IV	0 : 2	1 : 0	0 : 0	-----	0 : 0	1 : 2	5
V	0 : 3	0 : 0	1 : 0	0 : 0	-----	1 : 3	5

Отже, $n = 5$ і є найменшою можливою кількістю команд турніру.

4. Зрозуміло, що найменше з цих чисел $a < 5$, бо інакше $a + b + c \geq 5 + 6 + 7 > 16$.

Якщо $a = 4$, то $b + c = 12$, $bc = 30$, причому $5 \leq b < c$. Тоді перша з цих рівностей можлива лише при $b = 5$, $c = 7$, а друга – лише при $b = 5$, $c = 6$.

Якщо $a = 3$, то $b + c = 13$, $bc = 40$, причому $4 \leq b < c$. Усі ці умови задовольняють лише числа $b = 5$, $c = 8$. А пари $b = 4$, $c = 9$ та $b = 6$, $c = 7$ задовольняють першу та третю з цих умов, але не задовольняють другу.

Якщо $a = 2$, то $b + c = 14$, $bc = 60$, причому $3 \leq b < c$. Але кожен з добутків $3 \cdot 11$, $4 \cdot 10$, $5 \cdot 9$, $6 \cdot 8$ менший за 60.

Якщо $a = 1$, то $b + c = 15$, $bc = 120$, причому $2 \leq b < c$. Але кожен з добутків bc від $2 \cdot 13$, $3 \cdot 12$ до $7 \cdot 8$ менший за 120.

Таким чином, існує лише єдина шукана трійка натуральних чисел: $a = 3$, $b = 5$, $c = 8$.

8 клас

1. Оскільки $\frac{1}{b+\frac{1}{c}} < 1$ для довільних натуральних чисел b, c, то

$$a = 20, \qquad \frac{1}{b + \frac{1}{c}} = 0{,}25 = \frac{1}{4}, \qquad b + \frac{1}{c} = 4.$$

Але $b + \frac{1}{c}$ може бути цілим числом лише при $c = 1$. При цьому $b = 3$. Таким чином, маємо єдиний розв'язок: $a = 20$, $b = 3$, $c = 1$.

2. Можна. Для цього, наприклад, достатньо розфарбувати клітинки такої таблиці у шаховому порядку з чорними кутовими клітинками, і у чорні клітинки довільним чином записати числа від 1 до 1013, а у білі – також довільним чином решту чисел від 1014 до 2025. Тоді кожне число у чорній клітинці буде меншим за всіх своїх сусідів, а кожне число у білій клітинці – більшим за всіх своїх сусідів.

3. $n \neq 4$, бо діагоналі кожного прямокутника рівні. Також $n \neq 5$, бо вершини п'ятикутника можна розташувати по колу так, щоб усі 5 дуг кола між сусідніми вершинами були рівними. Діагоналі такого п'ятикутника також рівні як хорди, які стягують рівні дуги.

Нехай тепер $n = 6$, і у деякому шестикутнику $ABCDEF$ усі діагоналі рівні. Тоді ABD та ABE – рівні рівнобедрені трикутники зі спільною основою AB. Тому вони або збігаються, або симетричні відносно AB. В обох цих випадках отримуємо суперечність, бо ні вершини D та E шестикутника $ABCDEF$ не можуть збігатися, ні його сторони AB та DE перетинатися. Тому $n = 6$ є шуканим.

4. Нехай швидкість Грицька становила v км/год. Оскільки всі велосипедисти розпочинали і закінчували рух одночасно в одній і тій же точці, то, не зменшуючи загальності, можна вважати, що Грицько весь час залишався на місці, а Петрик та Василь рухалися стосовно нього зі швидкостями $30 - v$ та $20 - v$ відповідно. Петрик обігнав Грицька 8 разів, тому відносно нього він проїхав ще 9 повних кіл. Відповідно, Василь, обігнавши Грицька двічі, проїхав ще 3 такі кола. Отже, для їхніх відносних швидкостей виконується рівність $\frac{30-v}{20-v} = \frac{9}{3}$, з якої находимо $v = 15$ км/год.

5. Будемо шукати ці числа такими, що задовольняють рівності:

$$a^{2021} = 11c^{2022},\ b^{2023} = 11d^{2024}.$$

Покладаючи $a = 11c$, $b = 11d$, звідси послідовно знайдемо:

$$c = 11^{2020},\ d = 11^{2022},\ a = 11^{2021},\ b = 11^{2023}.$$

9 клас

1. Найменша цифра такого числа не може бути більшою за 2, бо інакше сума його цифр буде більшою за 7. Якщо така цифра дорівнює 2, то маємо лише такі 3 шукані трицифрові числа: 223, 232 та 322. Якщо ж вона дорівнює 1, то отримаємо ще 12 потрібних чисел: 115, 151, 511, 124, 142, 214, 241, 412, 421, 133, 313, 331. Всього – 15 чисел.

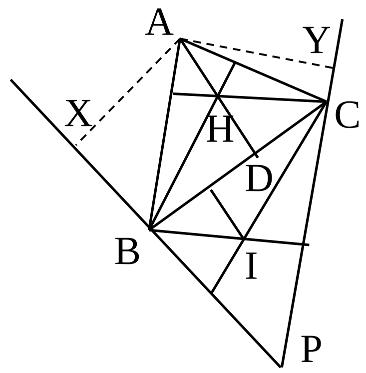
2. Можна. Для цього, наприклад, достатньо спочатку записати по колу у порядку зростання всі непарні числа від 1 до 2025, а за ними у порядку спадання всі парні числа від 2024 до 2. При цьому різниці між кожними двома сусідніми числами дорівнюватимуть або 2^1, або 2^0.

3. Нехай дотичні, проведені з вершин B та C до кола з центром A та радіусом AD, дотикаються до цього кола у точках X та Y відповідно (див. малюнок справа). Тоді точка A лежить на перетині бісектрис кутів CBX та BCY. Отже, сума цих кутів

$$\angle CBX + \angle BCY = 2(\angle CBA + \angle BCA) = 2(180° - \angle ABC) > 180°.$$

Тому точки A та P знаходяться по різні сторони прямої BC, а центр I кола, вписаного у трикутник PBC, лежить на перетині його бісектрис.

Враховуючи, що кути між бісектрисами кутів трикутника PBC і бісектрисами відповідних його зовнішніх кутів є прямими, отримаємо, що BI та CI паралельні до відповідних висот трикутника ABC. Тому чотирикутник $BHCI$ є паралелограмом. Отже, трикутники BCH та CBI рівні за трьома сторонами. Тому й висоти, проведені у них до сторони BC, також рівні. А це означає, що радіус кола, вписаного у трикутник PBC, дорівнює HD, що й вимагалось довести.



4. Враховуючи для кожного натурального числа n рівність

$$n \cdot n! = \big((n+1)-1\big)n! = (n+1)! - n!,$$

отримаємо

$$2 + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + 4 \cdot 4! + \cdots + 2023 \cdot 2023! =$$

$$= 2! + (3! - 2!) + (4! - 3!) + \cdots + (2024! - 2023!) = 2024!$$

Тому поданий дріб дорівнює

$$\frac{2024!}{2022!} = 2023 \cdot 2024 = (7 \cdot 17^2) \cdot (2^3 \cdot 11 \cdot 23).$$

Отже, найбільшим простим дільником цього числа є 23.

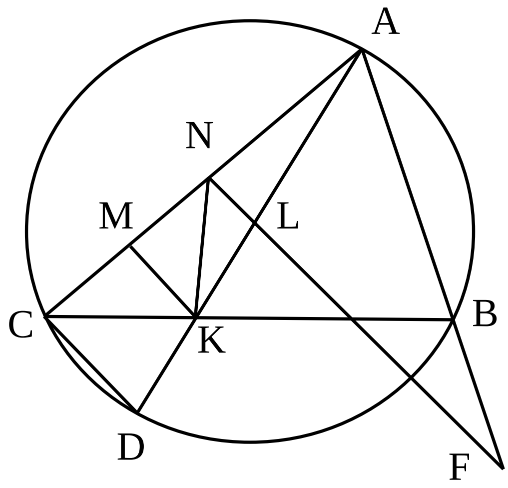
5. Щоб натуральне число мало непарну кількість різних дільників, необхідно і достатньо, щоб воно було квадратом натурального числа. Справді, дільники натурального числа A можна розбити на пари вигляду $\left(a, \frac{A}{a}\right)$. І лише для числа $A = a^2$ дільник $a = \frac{A}{a}$ не матиме пари. Тому, з врахуванням умови про його подільність на 2 і на 5, це число має вигляд $2^{2m} \cdot 5^{2n} \cdot k^2$, де m, n, k – деякі натуральні числа. Кількість таких дільників визначається за формулою $(2m+1)\,(2n+1)l$, де – натуральне число, яке дорівнює кількості різних дільників числа k^2. Оскільки $2021 = 43 \cdot 47$, і числа 43 та 47 є простими, то $l = 1$. Відповідно, й k^2. Таким чином, залишається зробити вибір лише між двома числами: $2^{42} \cdot 5^{46}$ та $2^{46} \cdot 5^{42}$. Обидва вони закінчуються на 42 нулі, але, поділивши перше з них на друге, переконуємося, що меншим з них є друге число.

10 клас

1. Спочатку сума таких чисел дорівнювала $11 \cdot 10 = 110$. Після виконаних дій вона стала рівною $110 + 4 \cdot 20 - 7 \cdot 24 = 22$.

Тому середнє арифметичне отриманих чисел дорівнює $\frac{22}{11} = 2$.

2. Див. розв'язання задачі 2 за 9 клас.



3. Позначимо через N точку перетину прямої FL зі стороною AC (див. малюнок справа). Оскільки кут ACD, який спирається на діаметр AD, є прямим, то $CNLD$ – прямокутна трапеція. Її середня лінія KM є одночасно медіаною та висотою трикутника CKN. Отже, цей трикутник рівнобедрений, і його кути при основі CN рівні. Тому також $\angle KNF = \angle DCB$. Але $\angle DCB = \angle DAB$ внаслідок рівності вписаних кутів, які спираються на дугу BD. Отже, $\angle KAF = \angle KAB = \angle DCB = \angle KNF$, тобто навколо чотирикутника можна описати коло. Тоді також $\angle AKF = \angle ANF = 90°$, що й доводить перпендикулярність FK та AD.

4. Знайдемо четвертий елемент цієї послідовності $a_4 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ і доведемо, що всі наступні її елементи будуються без скорочення відповідних дробів. Для цього достатньо довести, що для кожного натурального числа k дріб $\frac{3+2k}{4+3k}$ нескоротний. А це випливає з рівності $3(3+2k) - 2(4+3k) = 1$. Таким чином, найбільшим індексом n, для якого відповідний член послідовності будується скороченнм вказаного дробу, є $n = 4$.

5. Розглянемо вектори $\vec{a} = \left(\sqrt{x}, \sqrt{3y}, \sqrt{5z}\right)$ та $\vec{b} = \left(\sqrt{\frac{1}{x}}, \sqrt{\frac{3}{y}}, \sqrt{\frac{5}{z}}\right)$.

Добуток довжин векторів не менший за модуль їх скалярного добутку, тому

$$(x + 3y + 5z)\left(\frac{1}{x} + \frac{3}{y} + \frac{5}{z}\right) \geq \left(\sqrt{x} \cdot \sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{3y} \cdot \sqrt{\frac{3}{y}} + \sqrt{5z} \cdot \sqrt{\frac{5}{z}}\right)^2 = 81.$$

З врахуванням умови задачі звідси маємо $\frac{1}{x} + \frac{3}{y} + \frac{5}{z} \geq \frac{81}{72} = \frac{9}{8}$. Далі, враховуючи рівності $8 + 3 \cdot 8 + 5 \cdot 8 = 72$ та $\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{5}{8} = \frac{9}{8}$, робимо висновок, що шуканим найменшим значенням є $\frac{9}{8}$ і воно досягається при $x = y = z = 8$.

11 клас

1. Якщо шуканим трицифровим числом є число $\overline{abc}$, то з умови задачі маємо рівність $100a + 10b + c = 5abc$, з якої випливає, що цифра c кратна 5. При цьому $c \neq 0$, бо $100a + 10b > 0$. Отже, $c = 5$, і $100a + 10b + 5 = 25ab$, тобто $20a + 2b + 1 = 5ab$. Звідси маємо, що цифра b повинна бути непарною, а $2b + 1$ ділитися на 5. Обидві ці вимоги задовольняє лише $b = 7$. Тоді з рівняння $20a + 15 = 35a$ знаходимо $a = 1$. Тому єдиним шуканим трицифровим числом є 175.

2. Переможе Михайло, якщо, наприклад, дотримуватиметься такої стратегії. Першим своїм ходом від витре число 2025, а далі кожного разу на витирання Олексієм числа k відповідатиме витиранням числа $2025 - k$. Це йому вдасться, оскільки числа від 1 до 2024 можна розбити 1012 пар, у кожній з яких сума чисел дорівнює 2025. Коли залишаться 2 числа, це будуть числа однієї з цих пар, і їх сума дорівнюватиме квадрату числа 45.

3. Див. розв'язання задачі 3 за 9 клас.

4. Див. розв'язання задачі 5 за 9 клас.

5. Рівності з умови задачі можна записати у вигляді системи таких трьох рівнянь:

$$a(a+1) = b+1,\ \ b(b+1) = c+1,\ \ c(c+1) = a+1.$$

Якщо у ній деяке з чисел a, b, c дорівнює -1, то два інші також дорівнюватимуть -1. Якщо ж жодне з них не дорівнює -1, то перемножимо ці рівності і скоротимо обидві частини добутку на $(a+1)(b+1)(c+1)$. У результаті знайдемо $abc = 1$. А додавши ці рівності, будемо мати, що $a^2 + b^2 + c^2 = 3$.

З іншого боку, при цьому за нерівністю між середнім арифметичним та середнім геометричним отримуємо, що

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 3,$$

причому рівність можлива лише за умови $a^2 = b^2 = c^2 = 1$. Якщо жодне з чисел a, b, c не дорівнює -1, то всі вони дорівнюють 1.

Таким чином, умову задачі задовольняють лише такі дві трійки чисел: $a = b = c = 1$ та $a = b = c = -1$.