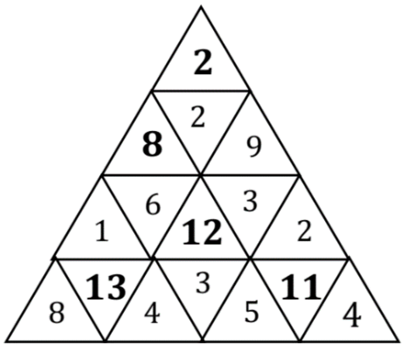
II тур III етапу Всеукраїнської олімпіади з математики, 2025 рік

7 клас

1. Михайло намалював трикутну сітку завбільшки n для $n \geq 2$. Вона утворюється з рівностороннього трикутника T зі стороною n розбиттям кожної сторони на n рівних частин. Після цього проводяться відповідні відрізки, що паралельні сторонам трикутника T, які його розбивають на n^2 рівносторонніх трикутників зі стороною 1, які ми назвемо *комірками*. Далі Олексій вписує в кожну комірку деяке натуральне число. Михайло отримує 1 цукерку за кожну комірку, число в якій дорівнює сумі усіх чисел в сусідніх по сторонах комірках. Олексій хоче записати числа таким чином, щоб Михайло отримав якомога більше цукерок. Скільки цукерок за таких умов отримає Михайло?

На малюнку справа показаний приклад для $n = 4$ з 16 комірками та розставленими там числами. При такій розстановці чисел Михайло б отримав 5 цукерок за числа 2 (верхня комірка), 8, 13, 12 та 11.



2. Михайло вибрав три попарно різні додатні дійсні числа a, b, c і записав на дошку такі числа: $a+b$, $b+c$, $c+a$, ab, bc, ca. Яка найменша кількість різних чисел може бути записана на дошці?

3. Петрик намагається відкрити сейф, захищений кодовим числом $\overline{abcde}$ з п'яти ненульових цифр. Йому відоме про код те, що число $\overline{abcde}$ не ділиться на 11, а числа $\overline{ae}$, $\overline{abe}$ та $\overline{abde}$ діляться на 11. Яку найменшу кількість спроб треба здійснити Петрику, щоб напевно відкрити сейф?

4. У трикутнику ABC проведена бісектриса CD. Серединний перпендикуляр до цієї бісектриси перетинає пряму AB у точці E, при цьому на прямій AB точки A, D, B та E розташовані у вказаному порядку. Доведіть, що $\angle BAC = \angle BCE$.

8 клас

1. Михайло вибрав три попарно різні дійсні числа a, b, c і записав на дошку такі числа: $a+b$, $b+c$, $c+a$, ab, bc, ca. Яка найменша кількість різних чисел може бути записана на дошці?

2. Знайдіть всі пари натуральних чисел a, b, для яких одне з двох чисел $2(a^2+b^2)$ та $(a+b)^2+4$ ділиться на інше.

3. У Петрика є 7 чорних та 7 білих куль. Він може робити таки дві дії: або поміняти свої 3 чорні кулі (якщо вони в нього є в наявності) на 2 білі кулі, або поміняти свої 4 білі кулі (якщо вони в нього є на цей момент) на 9 чорних куль. Чи зможе Петрик за скінченну кількість дій отримати набір, що складається з:

а) 10 чорних та 10 білих куль; *б)* 13 чорних та 7 білих куль?

4. Задача 4 за 7 клас.

9 клас

1. Знайдіть найбільше можливе значення виразу $y-x$, якщо дійсні невід'ємні числа x, y задовольняють рівність

$$x^4 = y(y-2025)^3.$$

2. Натуральне число n задовольняє такі умови:

- у числа n рівно 60 дільників: $1 = a_1 < a_2 < \cdots < a_{60} = n$;
- у числа $n+1$ також рівно 60 дільників:

$$1 = b_1 < b_2 < \cdots < b_{60} = n+1.$$

Нехай k – кількість індексів i, для яких $a_i < b_i$. Знайдіть всі можливі значення k. Зауважимо, що такі числа існують, наприклад, числа 4388175 та 4388176 мають по 60 дільників.

3. Петрик має 10 карток, що пронумеровані числами 1, 2, …, 10. Він хоче скласти їх в рядок зліва направо, при цьому має дотримуватися таких умов: якщо картка з номером k лежить на певній позиції, то праворуч від неї може бути розташована картка з номером, що більший від k, або картка з номером $k-1$. Скільки таких різних розташувань карток існує?

4. У трикутнику ABC проведена бісектриса CD. Серединний перпендикуляр до цієї бісектриси перетинає пряму AB у точці E, при цьому на прямій AB точки A, D, B та E розташовані у вказаному порядку. Відомо, що $BE = 4$ та $AB = 5$. Доведіть, що $2AD = DE$.

10 клас

1. Задача 2 за 7 клас.

2. Задача 2 за 9 клас.

3. Розглянемо розбиття прямокутника $m \times n$ на плитки 1×2. Ці плитки можуть бути розташованими з будь-якою орієнтацією, але не можуть накладатися одна на одну та виходити за межі прямокутника. Доведіть, що для кожного розбиття таким чином прямокутника 4×2010 існує пряма лінія, що проведена всередині цього прямокутника і при цьому не розрізає жодну плитку.

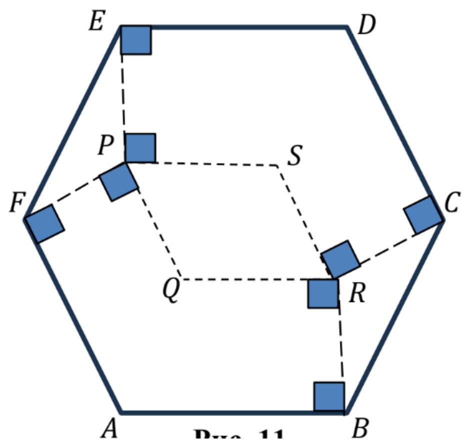
4. У вписаного в коло чотирикутника $ABCD$ сторони $AB = 7$, $BC = 18$. Бісектриса кута CDA перетинає сторону BC у точці E, точка F на відрізку DE задовольняє умову $\angle AED = \angle FCD$. Знайдіть довжину відрізка DF, якщо відомо, що $BE = 5$ та $EF = 3$.

11 клас

1. Задача 2 за 8 клас.

2. Для деякого натурального числа n Катя записала числа від 1 до 2^n у рядок у порядку зростання. Олексій переставив числа Каті та записав нову послідовність прямо під першим рядком. Далі, вони порахували суму двох чисел у кожному стовпчику. Катя порахувала число N, що дорівнює кількості степенів двійки серед отриманих результатів, а Олексій порахував число K, що дорівнює кількості різних степенів двійки серед отриманих результатів. Яке найбільше значення може мати $N + K$?

3. Всередині правильного шестикутника $ABCDEF$ з площею 6 проведені декілька відрізків, як це показане на малюнку справа. Квадратиками позначені прямі кути між відповідними відрізками. Знайдіть площу чотирикутника $PQRS$.



4. Розглянемо розбиття прямокутника $m \times n$ на плитки 1×2. Ці плитки можуть бути розташованими з будь-якою орієнтацією, але не можуть накладатися одна на одну та виходити за межі прямокутника. Доведіть, що існує таке розбиття прямокутника 5×2010, що будь-яка пряма лінія, що проведена всередині цього прямокутника, обов'язково розрізає принаймні одну плитку.

Розв'язання задач

7 клас

1. Розфарбуємо отримані трикутники зі сторонами 1 у синій та жовтий кольори у шаховому порядку так, щоб кожні два з них зі спільною стороною були різного кольору, причому всі трикутники, які прилягають сторонами до сторін великого трикутника, виявилися синього кольору. Тоді над кожним із $\frac{n(n-1)}{2}$ трикутників жовтого кольору опиниться відповідний трикутник синього кольору, який має з жовтим спільну сторону. Припустимо, що Олексій записав у жовтий трикутник число k, а синій трикутник над ним – число m. Якщо $m \geq k$, то сума чисел у сусідніх з жовтим трикутниках виявиться більшою за m, оскільки до неї, крім доданка m, входитимуть ще й два доданки із сусідніх з ним синіх трикутників зліва чта справа. Отже, вона не зможе дорівнювати k. А якщо $m < k$, то сума чисел навколо синього трикутника внаслідок доданка k перевищить m. Тому у кожній такій парі із синього та жовтого трикутників Михайло зможе отримати не більше однієї цукерки. Отже, всього він отримає щонайбільше $n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ цукерок. Саме така кількість цукерок опиниться у нього, якщо, наприклад, Олексій у всі жовті трикутники запише довільні натуральні числа, а у сині трикутники – числа, які дорівнюють сумам чисел, записаних у сусідніх з ними жовтих трикутниках.

2. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що $a < b < c$. Тоді з нерівностей $a + b < a + c < b + c$ та $ab < ac < bc$ випливає що записаних на дошці чисел було не менше трьох. Щоб їх було рівно три, повинні виконуватися рівності: $a + b = ab$, $a + c = ac$ та $b + c = bc$, які можна записати у вигляді: $(a-1)(b-1) = 1$, $(a-1)(c-1) = 1$ та $(b-1)(c-1) = 1$. Оскільки при цьому жоден з множників зліва не може дорівнювати нулю, то, наприклад, з першої та другої з них отримаємо $b - 1 = c - 1$, тобто $b = c$, що вже суперечить умові задачі. Залишилось довести, що всього чотири різні числа могли бути записані. Для цього виберемо числа $a < b < c$ так, щоб виконувалися рівності $a + b = ab$ та $b + c = ac$. Звідси маємо $a = b(a-1)$ та $b = c(a-1)$. Покладаючи $a = {}^{3}/_{2}$, послідовно знаходимо $b = 3$ та

$c = 6$. За цього вибору на дошці виявляться записаними такі чотири різні числа: ${}^{9}/_{2}$, ${}^{15}/_{2}$, 9 та 18.

Зауважимо, що при цьому у ролі a можна було би вибрати довільне число з інтервалу $(1; 2)$ та отримати шукану трійку чисел:

$$a < b = \frac{a}{a-1} < c = \frac{b}{a-1}.$$

3. Число $\overline{ae}$ ділиться на 11 лише за умови $a = e$. При цьому число $\overline{abe} = 11(9a + b) + a - b + e$ ділиться на 11 лише за умови, що $a - b + e = 2a - b$ ділиться на 11. І за виконання двох попередніх умов число $\overline{abde} = 11(91a + 9b + d) - a + b - d + e$ ділиться на 11 лише, якщо $a - b + d - e = d - b$ ділиться на 11, тобто $d = b$. Враховуючи всі три ці умови отримаємо

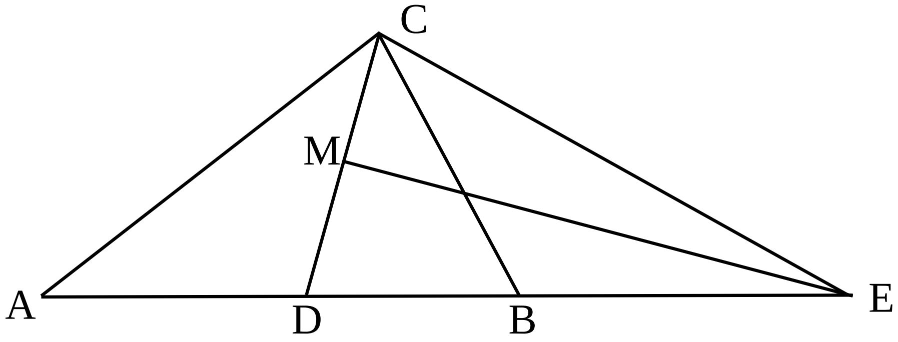
$$\overline{abcde} = \overline{abcba} = 11(909a + 92b + 9c) + 2a - 2b + c.$$

Таким чином, $2a - 2b + c$ не повинно ділитися на 11. Разом з подільністю $2a - b$ на 11 звідси випливає, що $2a - c$ не має ділитися націло на 11.

Далі зауважимо, що для всіх ненульових цифр a, крім $a = 5$, існує єдина цифра b така, що $2a - b$ ділиться на 11. Відповідно, для кожного такого a існує лише єдина ненульова цифра c така, що $2a - c$ ділиться на 11. Отже, кожному з восьми можливих виборів a відповідають єдині вибори цифр b, d, e та 8 варіантів вибору цифри c, необхідних для відкриття замка сейфу. Тому щонайбільше за $8 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 1 = 64$ спроби Петрик гарантовано відкриє замок.

До цього ж результату можна було прийти, виписуючи послідовно всі можливі варіанти для чисел $\overline{ae}$, $\overline{abe}$, $\overline{abde}$, як це було зроблено у наданих укладачами вказівках до розв'язування задач.

4. Нехай точка M — середина бісектриси CD (див. малюнок нижче).



Оскільки EM – одночасно і висота, і медіана трикутника CDE, то цей трикутник рівнобедрений з основою CD, і його кути при ній рівні. Враховуючи також, що бісектриса CD ділить кут ACB пополам, отримаємо $\angle BAC = \angle EDC - \angle ACD = \angle ECD - \angle BCD = \angle BCE$.

8 клас

1. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що $a < b < c$. Тоді з нерівностей $a + b < a + c < b + c$ випливає що різних записаних на дошці чисел було не менше трьох. Їх могло виявитися рівно три, а саме 1,–1 та 0, якщо, наприклад, $a = -1$, $b = 0$, $c = 1$.

Нелогічно тільки, що ця задача виявилася значно простішою за подібну до неї задачу 2 сьомого класу.

2. Враховуючи для натуральних чисел a та b нерівності $2(a^2 + b^2) < 2 \cdot ((a + b)^2 + 4)$ та $(a + b)^2 + 4 < 3 \cdot 2(a^2 + b^2)$, шукані пари чисел a та b знайдемо з такої сукупності рівностей:

$$2(a^2 + b^2) = (a + b)^2 + 4 \text{ та } (a + b)^2 + 4 = 2 \cdot 2(a^2 + b^2).$$

Перша з них рівносильна умові $(a - b)^2 = 4$, тобто $|a - b| = 2$, а другу можна записати у вигляді $2(a^2 + b^2) + (a - b)^2 = 4$. Для натуральних чисел a та b вона правильна лише за умови $a = b = 1$, а для всіх інших пар натуральних чисел її ліва частина більша за 4.

3. а). Не зможе, бо після кожної такої операції кількість білих куль залишатиметься непарною.

б). Зможе. Щоб вкінці кількість білих куль знову дорівнювала 7, Петрику достатньо у кожному з двох кіл спочатку двічі застосовувати перший варіант обміну, а за ним один раз другий варіант:

$$(7; 7) \to (9; 4) \to (11; 1) \to (7; 10) \to (9; 7) \to (11; 4) \to (7; 13).$$

4. Див. розв'язання задачі 4 за 7 клас.

9 клас

1. Якщо $x = 0$, $y = 2025$, то $y - x = 2025$. Більшою така різниця бути не може, бо з нерівностей $y - 2025 > x \geq 0$ та $y > x \geq 0$ випливає, що $y(y - 2025)^3 > x^4$. А це суперечить умові задачі.

2. Числа n та $n + 1$ взаємно прості, тому вони мають лише один спільний дільник $a_1 = b_1 = 1$. Також $a_{60} = n < b_{60} = n + 1$. Решту 58 дільників кожного з цих чисел можна розбити на 29 пар вигляду $(a_i; a_{61-i})$ та $(b_i; b_{61-i})$, де $2 \leq i \leq 30$. Оскільки $a_i a_{61-i} = n$ та

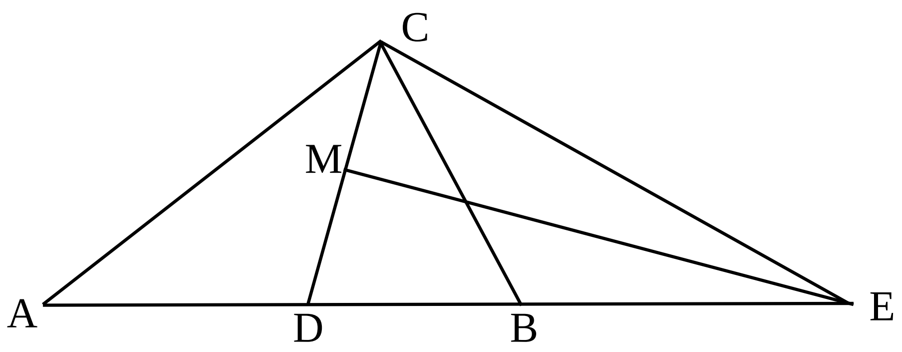
$b_i b_{61-i} = n + 1 > n$, то одночасно не можуть виконуватися нерівності $a_i > b_i$ та $a_{61-i} > b_{61-i}$. Так само неможливе і одночасне виконання нерівностей $a_i < b_i$ та $a_{61-i} < b_{61-i}$, бо матимемо суперечність

$$b_i b_{61-i} \geq (a_i + 1)(a_{61-i} + 1) = n + 1 + a_i + a_{61-i} > n + 1.$$

Тому $a_i < b_i$ рівно у половині випадків, тобто $k = 30$.

3. Доведемо, що для довільного натурального числа $n \geq 2$ таких карток, занумерованих від 1 до n, потрібних їх різних розташувань буде 2^{n-1}. Для $n = 2$ маємо $2 = 2^1$ такі розташування: $(1; 2)$ та $(2; 1)$. Припустимо, що для деякого $n = k \geq 2$ їх буде 2^{k-1}. Тоді, дотримуючись умов задачі, для кожного з них картку з номером $k + 1$ можна буде розташувати рівно двома способами: або перед карткою з номером k, або лише у самому кінці. Тому для $n = k + 1$ отримаємо 2^k розташувань, звідки внаслідок принципу математичної індукції випливає справедливість висунутої гіпотези для всіх натуральних чисел $n \geq 2$. У випадку $n = 10$ отримаємо 512 розташувань.

4. Міркуючи аналогічно розв'язуванню задачі 4 за 7 клас, доведемо, що $\angle BAC = \angle EDC - \angle ACD = \angle ECD - \angle BCD = \angle BCE$ (див. малюнок нижче).



Оскільки, крім того, у трикутниках ACE та CBE кут при вершині E спільний, то ці два трикутники подібні, а їх відповідні сторони пропорційні. З рівності $\frac{BE}{CE} = \frac{CE}{AE}$ маємо $CE = \sqrt{BE \cdot AE} = \sqrt{4 \cdot 9} = 6$. А оскільки EM є одночасно і висотою, і медіаною трикутника DCE, то

$$DE = CE = 6 = 2 \cdot 3 = 2(9 - 6) = 2(AE - DE) = 2AD.$$

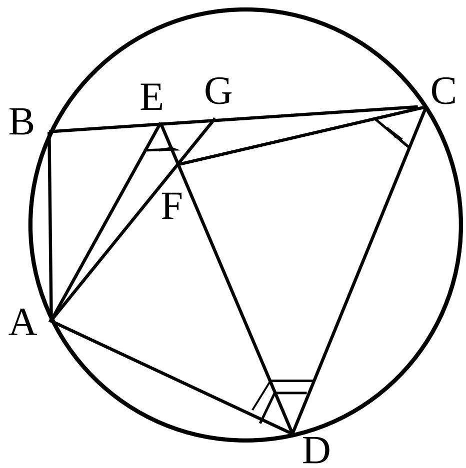
10 клас

1. Див. розв'язання задачі 2 за 7 клас.

2. Див. розв'язання задачі 2 за 9 клас.

3. Припустимо, що кожна горизонтальна чи вертикальна пряма, проведена по лініях одиничної сітки такого прямокутника, перетинає принаймні одну з поставлених плиток. Тоді вона перетинатиме парну їх кількість, бо інакше, розрізавши прямокутник по цій прямій, ми отримали би у кожній з двох частинок з парною площею непарну кількість клітинок, чого не може бути. Тому кожна з таких трьох горизонтальних та 2009 вертикальних прямих перетне принаймні дві плитки, причому жодні дві такі прямі не можуть перетнути одну й ту ж плитку. Разом отримаємо не менше за $2 \cdot 2012 = 4024$ різні плитки, яких перетнули ці 2012 прямих. Проте у прямокутнику розмірами 4×2010 плиток 1×2 може поміститися лише 4020. Отримана суперечність доводить, що для довільного розташування плиток принаймні одна з таких ліній не перетне жодної з них.

4. Трикутники ADE та FDC подібні внаслідок рівностей кутів AED та FCD і кутів ADE та CDF (див. малюнок справа), Тому для їхніх сторін виконується рівність $\frac{AD}{FD} = \frac{ED}{CD}$. Записавши її у вигляді $\frac{AD}{ED} = \frac{FD}{CD}$, з врахуванням рівності кутів ADF та EDC отримаємо також подібність трикутників ADF та EDC. Отже, кути DAF та DEC також рівні. Продовжимо AF до перетину зі стороною AB у точці G. Звідси, внаслідок рівності вертикальних кутів зі спільною вершиною F, отримаємо, що трикутник GEF подібний до трикутника DAF, отже, й до трикутника DEC. Тому $\frac{ED}{EG} = \frac{EC}{EF}$. Далі врахуємо рівність кутів BGA та ADE і те, що у вписаному чотирикутнику $ABCD$ сума кутів при вершинах B та D дорівнює $180°$, як і сума кутів трикутника ABG. Звідси отримуємо, що



$$\angle BAG + \angle AGB = \angle ADC = 2\angle ADE = 2\angle AGB,$$

тобто $\angle BAG = \angle AGB$. Тому трикутник BAG рівнобедрений, і у ньому $BG = BA = 7$. Відповідно, $EG = BG - BE = 2$, $EC = BC - BE = 13$. Отже, $ED = EG \cdot \frac{EC}{EF} = 2 \cdot \frac{13}{3} = \frac{26}{3}$. Тоді $DF = ED - EF = \frac{26}{3} - 3 = \frac{17}{3}$.

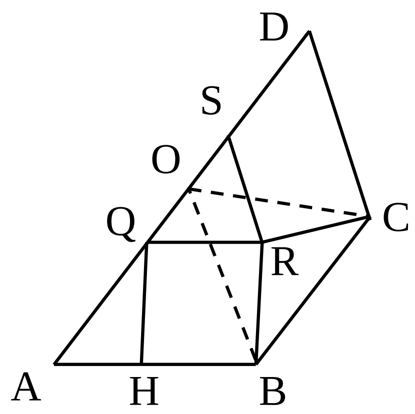
11 клас

1. Див. розв’язання задачі 2 за 8 клас.

2. Нескладно отримати суму $N + K = 2^n + 2$, якщо Олексій запише числа у такому порядку: $2^n - 1, 2^n - 2, \dots, 2, 1, 2^n$. При цьому у таких попарних сумах отримаємо 2^n степенів двійки, але лише два з них, 2^n та 2^{n+1}, будуть різними. Залишилось довести, що більшою сума $N + K$ бути не може.

Припустимо, що під деяким числом k Олексій записав число a_k таке, що сума $k + a_k \leq 2^{n-1}$ також є степенем двійки. Зрозуміло, що $k < 2^{n-1}$ та $a_k < 2^{n-1}$. Розглянемо тепер число m, під яким Олексій записав число $a_m = 2^n - k$. Оскільки $a_m > 2^{n-1} > a_k$, то $m \neq k$. При цьому $2^{n-1} < m + a_m < 2^{n+1}$. Але $m + a_m = 2^n + m - k \neq 2^n$, тому така сума не може бути степенем двійки. Таким чином, доданок N зменшиться принаймні на 1, а доданок K збільшиться на 1, від чого сума не збільшиться.

Міркуючи аналогічно стосовно інших можливих таких k, кожного разу будемо мати, що число N зменшується принаймні на 1, а число K збільшується не більше, ніж на 1. Тому $2^n + 2$ – найбільше з можливих значень для $N + K$.



3. Діагональ AD ділить пополам як шестикутник $ABCDEF$, так і чотирикутник $PQRS$. Тому зобразимо на малюнку справа лише половину поданої в умові задачі конструкції. Оскільки $RS = RQ$ внаслідок симетрії та $\angle QRS = 60°$, то трикутник QRS рівносторонній. Довжину його сторони позначимо через x, а сторони шестикутника $ABCDEF$ – через a. Тоді $DS = AQ = \frac{2a-x}{2}$. Опустивши з точки Q перпендикуляр QH на сторону AB, з прямокутного трикутника QAH, в якому $\angle QAH = 60°$, знайдемо $AH = \frac{AQ}{2} = \frac{2a-x}{4}$. Враховуючи, що $a = BH + AH = x + \frac{2a-x}{4}$, звідси отримаємо $x = \frac{2a}{3}$. Тому $S_{\Delta SQR} : S_{\Delta ABO} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$, де $O -$ середина AD. А оскільки шестикутник $ABCDEF$ складається з шести однакових правильних трикутників зі стороною a та спільною вершиною O, то $S_{\Delta ABO} = 1$. Тоді $S_{\Delta SQR} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$, а площа чотирикутника $PQRS$ дорівнює $2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$.

4. На малюнку нижче показаний фрагмент з розташуванням таких плиток по лівому та правому краях прямокутника.

Якщо решту плиток між ними поставити горизонтально, що вдасться зробити, бо у кожному з рядків залишилася парна кількість клітинок, то кожна проведена пряма перетинатиме принаймні одну з плиток. Щодо похило проведених прямих це очевидно. Кожна горизонтальна пряма перетне принаймні одну з плиток 1, 2, 3, 4. А кожна вертикальна пряма перетне або принаймні одну з плиток 5, 6, 7, 8, або принаймні одну з горизонтальних плиток, розміщених у незаповнених прямокутниках поданої вище таблиці внаслідок зсувів на одну клітинку по горизонталі країв плиток з номерами 1, 2, 3, 8.