І.В.ФЕДАК

ГОТУЄМОСЯ ДО ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ

Ч.ІІ.

Геометрія та нестандартні конструкції

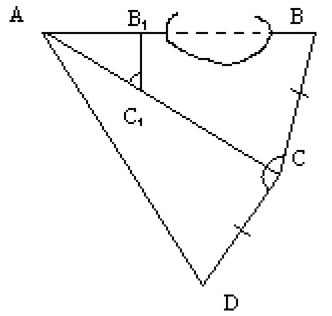
Схвалено комісією з математики Науково-методичної ради
з питань освіти Міністерства освіти і науки України
як посібник для загальноосвітніх навчальних закладів
(протокол № 4 від 19 червня 2003 року)

§ 14. Вимірювання відрізків та кутів

Вже найперші практичні потреби людей привели їх до необхідності робити певні вимірювання довжин відрізків та величин кутів, встановлювати деякі співвідношення між ними. Напевно, найвизначнішими із цих співвідношень слід визнати твердження про суму кутів трикутника та знамениту теорему Піфагора.

Говорячи тут про вимірювання відрізків та кутів, ми не маємо на увазі використання вимірювальних приладів. Хоч, правда, у деяких випадках і це не завадить.

Задача 14.1. (8-9). Визначити відстань між точками A і B (див. мал. 21), між якими знаходиться нездоланна перешкода.



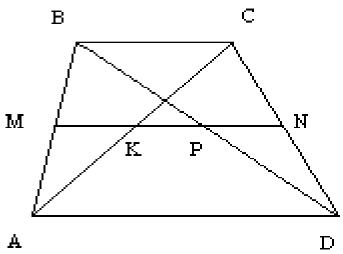
Мал.21

Розв'язання. Виберемо точку C так, щоб на відрізках AC та BC перешкоди не було. Побудуємо кут ACD, рівний куту ACB, і відкладемо $CD = CB$. Тоді матимемо, що $\Delta ACD = \Delta ACB$. Звідки $AD = AB$. Тому, якщо між A і D перешкоди немає, то задача розв'язана.

Хоч ми і скористалися тут безпосередніми вимірюваннями відрізків, проте ці вимірювання супроводжувало використання певних властивостей геометричних фігур, а саме – ознаки рівності трикутників.

Далі основною метою буде не безпосереднє вимірювання довжин відрізків чи величин кутів, а встановлення принципової можливості знаходження лінійних чи кутових величин за відомими значеннями окремих із них, а також доведення заданих співвідношень між цими величинами.

Задача 14.2. (8-9). Основи AD та BC трапеції $ABCD$ дорівнюють a та b $(a > b)$. Знайти довжину відрізка, який відрізається діагоналями трапеції на її середній лінії.

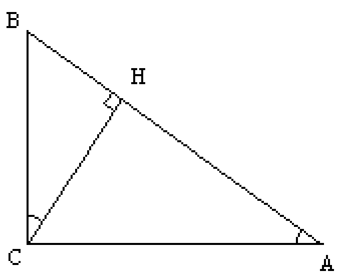


Мал.22

Розв'язання. Нехай MN – середня лінія заданої трапеції $ABCD$, K та P – точки її перетину з діагоналями AD та BC відповідно (див. мал. 22). Тоді MK та PN – середні лінії трикутників ABC ти DBC, паралельні їх спільній основі BC. Звідси одержуємо:

$$KP = MN - MK - PN = \frac{a+b}{2} - \frac{b}{2} - \frac{b}{2} = \frac{a-b}{2}.$$

В задачах метричного характеру часто доводиться мати справу із властивостями подібних фігур. Зокрема, повертаючись до задачі 14.1, відзначимо, що якби вдалося лівіше від перешкоди побудувати відрізок $B_1C_1 \| BC$, то мали б, що $\frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC}$ (див. мал. 21). Звідси $AB = \frac{AB_1}{AC_1} \cdot AC$. Оскільки довжини AB_1, AC_1 та AC можна виміряти безпосередньо, то й відстань AB теж виявиться відомою.



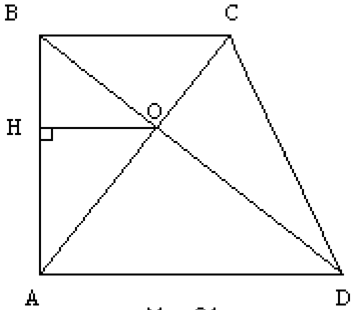
Мал.23

Задача 14.3. (8-9). Висота CH прямокутного трикутника ABC ділить його гіпотенузу на відрізки AH та BH. Довести, що $AH \cdot BH = CH^2$.

Розв'язання. $\angle BCH = 90° - \angle CBA = \angle CAH$. $\angle BHC = \angle CHA = 90°$ (див. мал. 23). Тому $\Delta CBH \sim \Delta ACH$. Отже, $\frac{BH}{CH} = \frac{CH}{AH}$, звідки $AH \cdot BH = CH^2$.

Задача 14.4. (8-9). Основи прямокутної трапеції дорівнюють a і b, а відстань між ними – c. Знайти відстань від точки перетину діагоналей до меншої бічної сторони трапеції.

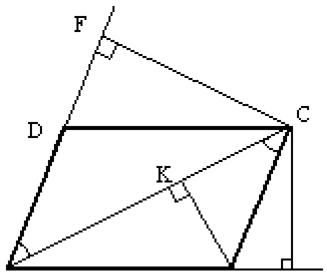
Розв'язання. Нехай $AD = a$, $BC = b$, $AB \perp AD$, O – точка перетину діагоналей AC та BD, $OH \perp AB$ (див. мал. 24). Зрозуміло, що OH – шукана відстань, бо $AB < CD$. Врахуємо, що $\Delta AOH \sim \Delta ACB$, $\Delta BOH \sim \Delta BDA$, звідки $\frac{HO}{BC} = \frac{AH}{AB}$, $\frac{HO}{AD} = \frac{BH}{AB}$. Додавши ці рівності, одержимо $\frac{OH}{BC} + \frac{OH}{AD} = \frac{AH + BH}{AB}$, тобто $OH\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 1$. Звідси $OH = \frac{ab}{a+b}$.



Мал.24

Цікаво відзначити, що відстань OH тут не залежить від висоти трапеції. Звертаємо увагу читачів також на прийом, з допомогою якого вдалося вилучити з розгляду невідомі довжини AH, BH та AB – додаванням двох співвідношень. Цей же прийом застосуємо і при розв'язуванні наступної задачі.

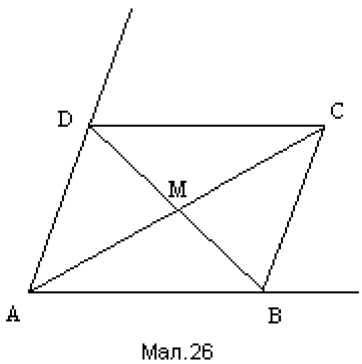
Задача 14.5. (8-9). Нехай AC – більша з діагоналей паралелограма $ABCD$. Із точки C на продовження сторін AB та AD опущені перпендикуляри CF та CE відповідно. Довести, що $AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2$.



Розв'язання. Опустимо із вершини B перпендикуляр BK на діагональ AC. (див. мал. 25) $\Delta ABK \sim \Delta ACE$. $\Rightarrow$ $AK : AE = AB : AC$, тобто $AB \cdot AE = AK \cdot AC$. Оскільки $AD \| BC$, то $\angle FAC = \angle KCB$ і $\Rightarrow$ $\Delta AFC \sim \Delta CKB$. Тоді: $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $AF : KC = AC : BC$. $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $AD \cdot AF = BC \cdot AF = KC \cdot AC$. А отже, $AB \cdot AE + AD \cdot AF = AK \cdot AC + KC \cdot AC = \; = (AK + KC) \cdot AC = AC^2$.

Задача 14.6. (8-9). Дано кут і точку M всередині кута. Побудувати пряму, відрізок якої між сторонами кута ділиться точкою M пополам.

Розв'язання. Нехай A – вершина кута. Побудуємо на прямій AM точку C так, що $AM = MC$, і проведемо через неї прямі CD та CB, паралельні сторонам кута (див. мал.26). Тоді $ABCD$ – паралелограм.



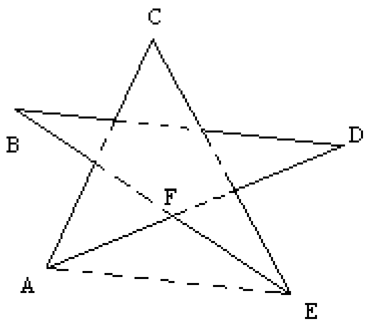
Мал.26

А отже, його діагональ BD пройде через точку M – середину діагоналі AC, причому $BM = DM$. Тому пряма BD є шуканою.

Як бачимо, при розв'язуванні цієї задачі ми використали властивість діагоналей паралелограма.

Перейдемо до задач, пов'язаних із визначенням величин кутів.

Задача 14.7. (8-9). Знайти суму кутів у вершинах A, B, C, D, E фігури "зірочка" (див. мал. 27).

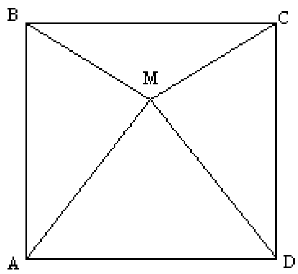


Мал.27

Розв'язання. Зрозуміло, що можна було б просто виміряти величину кожного із кутів і додати одержані значення. Але таким чином потрібну суму ми зможемо одержати лише наближено, що не може вважатися розв'язанням.

Тому поступимо інакше. З'єднаємо точки A та E і позначимо через F точку перетину відрізків AD та BE. Оскільки $\angle B + \angle D + \angle BFD = 180°$, $\angle FAE + \angle FEA + \angle AFE = 180°$, $\angle AFE = \angle BFD$, то $\angle B + \angle D = \angle FAE + \angle FEA$. А отже, $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = \angle C + CAE + \angle CEA = 180°$.

Для розв'язування задачі нам вистачило знання суми кутів трикутника та рівності вертикальних кутів. Але не всі задачі є такими простими, як це може здатися на перший погляд при читанні їх умов.



Мал.28

Задача 14.8. (8-9). Точку M всередині квадрата з'єднали із його вершинами. При цьому одержали чотири трикутники, один з яких рівнобедрений із кутом 150°. Визначити кути інших трьох трикутників.

Нехай $\angle CMB = 150°$. (див. мал. 28) Тоді $\angle CBM = \angle BCM = 15°$. Припустимо, що $\angle CDM = x$. Тоді $\angle BAM = x$, $\angle MDA = \angle MAD = 90° - x$. Отже, $\angle AMD = 180° - \angle MAD - \angle MDA = 2x$. $\angle CMD = 180° - 75° - x = 105° - x$. Аналогічно $\angle AMB = 105° - x$. Оскільки $\angle AMB + \angle BMC + \angle CMD + \angle DMA = 360°$, то із цієї рівності спробуємо визначити x. Матимемо:

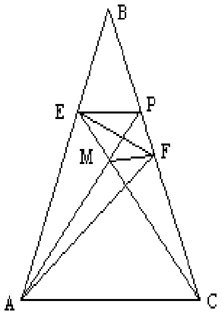
$$150° + (105° - x) + 2x + (105° - x) = 360°.$$

Та, на жаль, очікуваного результату одержати не вдається, оскільки ми прийшли до тотожності, справедливої для довільних x. Точніше, для $x < 90°$, бо $\angle CDM < 90°$. Таким чином, "очевидний" шлях до успіху не приводить.

Розв'язання. Побудуємо на стороні AD рівносторонній трикутник AKD із вершиною K всередині квадрата. Зрозуміло, що $\angle KAB = \angle KDC = 30°$. А оскільки $AK = DK = AD = AB = CD$, то трикутники KABта KDC рівнобедрені. Тому легко знаходимо, що $\angle KBA = \angle KCD = 75°$. А отже, $\angle KBC = \angle KCB = 15°$. Але, як ми встановили раніше, також $\angle CBM = \angle BCM = 15°$. Отже, точка K лежить на прямих MB та MC, а тому співпадає з точкою M. Звідси випливає, що кути трьох інших трикутників є такими: 60°, 60°, 60°; 75°, 75°, 30°; 75°, 75°, 30°.

Відзначимо, що знання самих кутових величин виявилося недостатнім для розв'язання задачі. Тут суттєвим було те, що $ABCD$- не довільний прямокутник, а саме квадрат. Це було використано у рівностях $AK = DK = AD = AB = CD$.

При розв'язуванні задач 14.1, 14.5, 14.7 виконувались допоміжні побудови. Такий підхід особливо характерний для олімпіадних задач. А ось ще три цікаві приклади із застосуванням цього прийому.



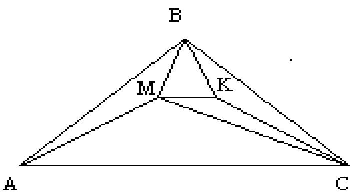
Мал.29

Задача 14.9. (8-9). У рівнобедреному трикутнику ABC $(AB = BC)$ кут при вершині B дорівнює $20°$. На сторонах AB та BC вибрали відповідно точки E та F так, що $\angle ACE = 60°$, $\angle CAF = 50°$. Визначити величину кута CEF.

Розв'язання. Проведемо відрізок $EP \| AC$ (див. мал. 29). Нехай M – точка перетину відрізків AP та CE. Тоді трикутники EPM та AMC є рівносторонніми. Отже, $EP = EM$, а $MC = AC$. Але $\angle CAF = 50°$, $\angle ACF = 80°$, тому $\angle AFC = 50°$. Отже, $FC = AC = MC$. Оскільки $\angle MCF = 20°$, то $\angle CFM = \angle CMF = 80°$. А значить, $\angle PFM = 100°$. Але $\angle PAC = 60°$, $\angle PCA = 80°$, тому $\angle MPF = 50°$. А тому також $\angle PMF = 50°$. Звідси випливає, що $PF = MF$. У такому випадку $\Delta EPF = \Delta EMF$ на основі рівності трьох відповідних сторін. Отже, $\angle MEF = \angle PEF = \frac{1}{2}\angle MEP = \frac{1}{2} \cdot 60° = 30°$.

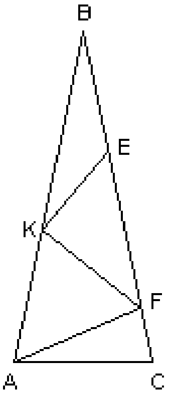
Відзначимо, що спроба скористатися лише властивістю суми кутів трикутника знову не привела б до успіху. Пропонуємо читачам переконатися в цьому самостійно.

Задача 14.10. (8-9). У рівнобедреному трикутнику ABC $\angle ABC = 100°$. Всередині трикутника взяли таку точку M, що $\angle MAB = 10°$, $\angle MBA = 20°$. Визначити величину кута BMC.



Мал.30

Розв'язання. Побудуємо рівносторонній трикутник BMK (див. мал. 30). Оскільки $\angle ABM = 20°$, $\angle MBK = 60°$, $\angle ABC = 100°$, то $\angle CBK = 20°$. Тоді $\Delta ABM = \Delta CBK$ (за двома сторонами $AB = BC$ та $BM = BK$ і кутом між ними). Отже, $AM = CK$, $\angle BCK = \angle BAM = 10°$, $\angle MAC = \angle KCA = 30°$. А значить $\angle AMK = \angle CKM = 150°$. Крім того, також $\angle CKB = 150°$. Отже, $\Delta CKM = \Delta CKB$ (бо CK – спільна, $BK = MK$, $\angle BKC = \angle MKC$). Тому $BC = MC$, $\angle BMC = \angle MBC = \angle ABC - \angle ABM = 80°$.



Мал.31

Задача 14.11. (8-9). На бічних сторонах AB та BC рівнобедреного трикутника ABC із кутом $20°$ при вершині вибрали відповідно точки K та M так, що $BM = AK = AC$. Знайдіть величину кута BKM.

Розв'язання. Відкладемо на стороні BC точки E та F так, щоб $\angle BKE = \angle CAF = 20°$ (див. мал. 31). Тоді $\angle KEF = 40°$, $\angle AFC = \angle ACF = 80°$, $AC = AF$. Також, $\angle KAF = 60°$, отже ΔAKF – рівносторонній. Оскільки тепер легко знайти $\angle KFE = 40°$, то $KE = KF$. Отже, встановимо, що $BE = KE = KF = KA = AC$, тобто $BE = BM$. А тому $\angle BKM = \angle BKE = 20°$.

Звертаємо увагу читачів, що у задачах 14.7 – 14.11 шукані кути доцільно було спершу поміряти транспортиром, а вже потім під відому відповідь здійснювати потрібні добудови. Це більш надійно, ніж намагатися просто вгадати, що добудовувати. Наголосимо також про роль рівносторонніх трикутників при розв'язуванні цих задач.

Вправи до § 14

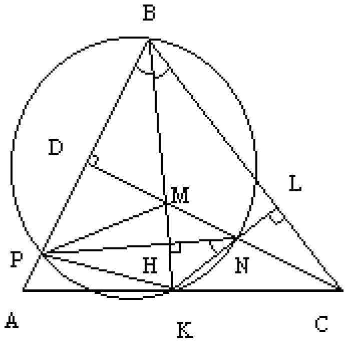
1. **(**8-9). Запропонуйте метод вимірювання висоти дерева у сонячну погоду.
2. **(**8-9). Знайдіть кути трикутника ABC, якщо $\angle C = 2\angle A$, $b=2a$.
3. **(**8-9). Точки M та N лежать по один бік від прямої AB. Знайдіть на цій прямій таку точку O, що $\angle NOB = 2\angle MOA$.
4. **(**8-9). Бісектриса кута при основі рівнобедреного трикутника ABC відтинає від нього рівнобедрений трикутник. Визначити кути трикутника ABC.
5. **(**8-9). Знайдіть кути рівнобічної трапеції, яка своєю діагоналлю ділиться на два рівнобедрені трикутники.
6. **(**8-9). а) Знайдіть всі рівнобедрені трикутники, які можна розрізати на: 1) 2, 2) 3, 3) 4 рівнобедрені трикутники. б) Розріжте рівнобедрений трикутник із кутом 20^o при вершині на 4 різні рівнобедрені трикутники.
7. **(**8-9). Доведіть, що квадрат не можна розрізати на скінченне число рівнобедрених трикутників (не обов'язково однакових) із кутами 75^o при основі .
8. **(**8-9). У трикутнику ABC $\angle A = 30°$, $\angle B = 50°$. Доведіть, що сторони такого трикутника задовольняють співвідношення $a = (c^2 - b^2) / b$.
9. **(**8-9). У трикутнику ABC $\angle C = 90°$, $AC=BC$. На промені AC взяли точку D так, що $CD=AB$. Знайдіть величину кута ABD.
10. **(**8-9). Всередині рівнобедреного трикутника ABC ($AC=BC$, $\angle ACB = 80°$) взяли точку M так, що $\angle MBA = 30°$, $\angle MAB = 10°$. Знайдіть величину кута AMC.
11. **(**8-9). Сума кутів при основі трапеції дорівнює 90^o. Знайдіть довжину відрізка, який з'єднує середини основ трапеції, довжини яких дорівнюють a та b.
12. **(**8-9). Про опуклий чотирикутник $ABCD$ відомо, що $AC=BD$, $\angle ABD = 2\angle ACD$, $\angle ACD + \angle ADB = 90°$. Знайдіть $\angle B$ та $\angle D$.
13. **(**8-9). Доведіть, що у всякому чотирикутнику сума квадратів діагоналей вдвічі більша суми квадратів відрізків, які з'єднують середини протилежних сторін.
14. **(**8-9). На сторонах паралелограма зовні від нього побудовані квадрати. Доведіть, що центри цих квадратів також є вершинами деякого квадрата.
15. **(**8-9). Доведіть, що різниця між найбільшою і найменшою діагоналями правильного дев'ятикутника дорівнює його стороні.

§ 15. Коло та зв'язані з ним співвідношення

Нові можливості для встановлення метричних співвідношень відкривають властивості відрізків та кутів, пов'язаних з колом. Основною з цих властивостей є рівність вписаних кутів, що спираються на одну і ту ж дугу чи на рівні дуги.

Задача 15.1. (9-10). Висота CD трикутника ABC перетинає бісектрису BK цього трикутника в точці M, а висоту KL трикутника BKC – в точці N. Коло, описане навколо трикутника BKN перетинає пряму AB в точках B та P. Довести, що трикутник KPM рівнобедрений.

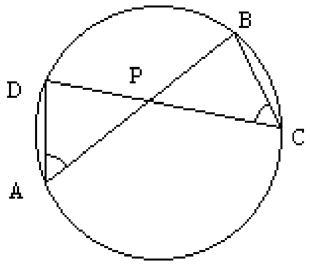
Розв'язання. $\angle KMN = \angle DMB = \ = 90^\circ - \angle DBM = 90^\circ - \angle KBL = \angle MKN$. $\Rightarrow$ $MN = KN$ (див. мал. 32). З'єднаємо точку P з N і позначимо через H точку перетину відрізків PN і MK.



Мал.32

Оскільки кути PBK та PNK спираються на одну дугу PK, то вони рівні. Але $\angle PBK + \angle DMB = 90^\circ$, $\angle DMB = \angle MKN$, тому $\angle PNK + \angle MKN = 90^\circ$. Отже, $PN \perp MK$, і з рівності $\angle KMN = \angle MKN$ випливає, що $\angle PNM = \angle PNK$. У такому разі $\Delta PNM = \Delta PNK$ (за двома сторонами і кутом між ними). А отже, $PM = PK$ і трикутник KPM є рівнобедреним.

Згадана властивість вписаних кутів дає змогу встановити і деякі метричні співвідношення для хорд кола.



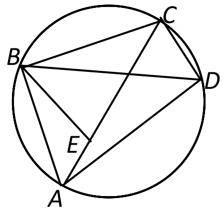
Мал.33

Задача 15.2. (9-10). Чи можуть довжини відрізків, одержані при перетині двох хорд, бути чотирма послідовними цілими числами?

Розв'язання. Оскільки кути DAB та DCB (див. мал. 33)спираються на одну дугу, то вони рівні. Крім того $\angle DPA = \angle BPC$ – як вертикальні. Отже, $\Delta ADP \sim \Delta CBP$, а тому $DP : BP = AP : CP$, звідси $AP \cdot BP = CP \cdot DP$. Таким чином, розв'язування задачі звелося до перевірки, чи має хоч одне з рівнянь

$$a(a+1) = (a+2)(a+3);\ a(a+2) = (a+1)(a+3);\ a(a+3) = (a+1)(a+2);$$

розв'язок у натуральних числах. Легко переконатися, що жодне з них таких коренів не має. Тому довжини відрізків, одержаних при перетині двох хорд, не можуть бути чотирма послідовними цілими числами.



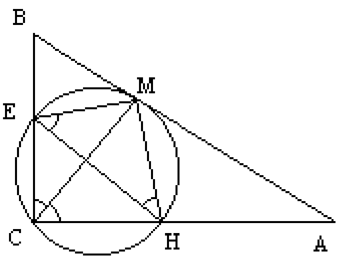
Мал.34

Рівність відповідних вписаних кутів може бути використана і при доведенні **теореми Птоломея:** сума добутків протилежних сторін вписаного чотирикутника дорівнює добутку його діагоналей.

Доведення. Виберемо на діагоналі AC таку точку E (див. мал. 34), щоб $\angle ABE = \angle CBD = \angle CAD$. Тоді $\Delta ABE \sim \Delta DBC$, $\Delta BEC \sim \Delta BAD$ (подумайте чому). Отже $\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AE}{CD}$, $\dfrac{BC}{BD} = \dfrac{EC}{AD}$. Звідси $AB \cdot CD + BC \cdot AD = BD \cdot AE + BD \cdot EC = BD \cdot AC$, що й треба було довести.

Безпосередньо із величинами вписаних кутів пов’язаний критерій належності чотирьох точок одному колу. А саме, для того, щоб чотирикутник *ABCD* був вписаним в коло, необхідно і достатньо, щоб суми величин його протилежних кутів дорівнювали по 180°.

Задача 15.3. (9-10). У прямокутному трикутнику *ABC* $(\angle C = 90^\circ)$ провели бісектрису *CM*. Відрізки *ME* та *MH* є відповідно бісектрисами трикутників *BMC* та *AMC*. Довести, що трикутник *EMH* рівнобедрений.



Мал.35

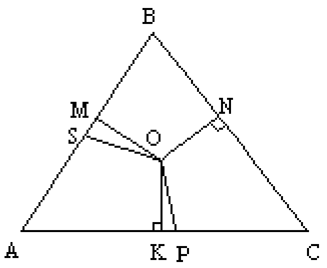
Розв’язання. $\angle EMC = \dfrac{1}{2}\angle CMB$, $\angle CMH = \dfrac{1}{2}\angle CMA$,

$$\angle EMH = \frac{1}{2}(\angle CMB + \angle CMA) = 90^\circ$$

(див. мал. 35).Оскільки також $\angle ECH = 90^\circ$, то чотирикутник *CEMH* вписаний в коло. Але тоді $\angle MEH = \angle MCH = 45^\circ$, $\angle MHE = \angle MCE = 45^\circ$, тобто $\angle MEH = \angle MHE$ і трикутник *EMH* рівнобедрений.

А ось дещо складніший приклад. Тут також використовуються властивості відрізків дотичних, проведених до кола.

Задача 15.4. (9-10). Довжини сторін трикутника утворюють арифметичну прогресію. Довести, що середина найбільшої та найменшої сторін, вершина кута між ними і центр кола, вписаного в трикутник, лежать на одному колі.



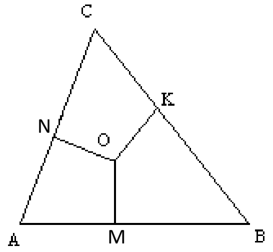
Мал.36

Розв’язання. Нехай *M, N, K* – точки дотику вписаного кола з центром *O* до сторін заданого трикутника *ABC*, $BC = a$, $AB = a - d$, $AC = a + d$, *S* і *P* – середини сторін *AB* і *AC* відповідно (див. мал. 36). Тоді $BM = BN$, $CK = CN$, $MS - KP = (BS - BM) - (KC - PC) = \left(\dfrac{a-d}{2} - BN\right) - \left(CN - \dfrac{a+d}{2}\right) = a - (BN + CN) = a - a = 0$. Отже, $MS = KP$. Оскільки також $MO = KO$ – як радіуси вписаного кола, і $\angle OMS = \angle OKP = 90^\circ$, то $\Delta OMS = \Delta OKP$, а значить, $\angle MOS = \angle KOP \;\Rightarrow\; \angle SOP = \angle MOK$.

Але тоді $\angle SOP + \angle SAP = \angle MOK + \angle MAK = 360^\circ - (\angle AMO + \angle AKO) = 180^\circ$. Тому точки *A, S, O, P* лежать на одному колі, що й треба було довести.

Рівність відрізків дотичних використовуємо і при розв’язуванні наступної задачі.

Задача 15.5. (9-10). Вершини *A* та *B* трикутника *ABC* зафіксовано, а вершина *C* рухається у площині так, що $BC - AC = const$. Довести, що центри кіл, вписаних у трикутники *ABC*, лежать на одній прямій.

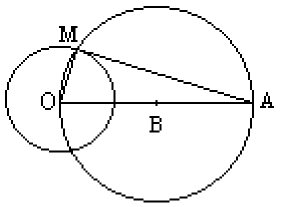


Мал.37

Розв’язання. Нехай $BC - AC = a > 0$, а *M, N, K* – точки дотику вписаного кола до сторін *AB, AC* та *BC* відповідно (див. мал. 37). Тоді $AM + BM = AB = const$, а

$AM - MB = AN - BK = (AC - CN) - (BC - CK) = \; = AC - BC = const$. Таким чином, точка M дотику вписаних кіл до сторони AB залишається незмінною. А оскільки $OM \perp AB$, то всі центри вписаних кіл лежатимуть на прямій $l \perp AB$, проведеній через точку M.

Перпендикулярністю дотичної до радіуса кола, проведеного у точку дотику, можна скористатись і для побудови спільної дотичної до двох кіл.

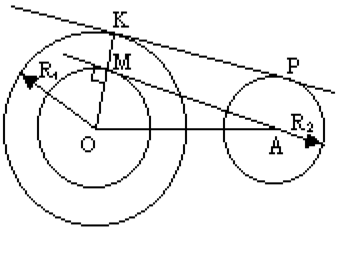


Мал.38

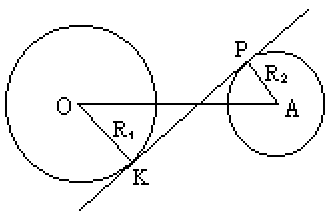
Задача 15.6. (9-10). На площині задано два кола різних радіусів, які не мають спільних внутрішніх точок. Побудувати спільну дотичну до цих кіл.

Розв'язання. Розв'яжемо спочатку простішу задачу, замінивши одне з кіл точкою A (див. мал. 38). Нехай O – центр заданого кола, B – середина відрізка OA. Побудуємо коло радіуса AB з центром в точці B. Якщо M – точка перетину цього кола із заданим колом, то $\angle OMA = 90°$. А отже, пряма AM – шукана дотична. Зрозуміло, що така задача має два розв'язки.

А тепер повернемося до основної задачі. Нехай радіуси кіл (див. мал. 39) відповідно дорівнюють R_1 та R_2 $(R_1 > R_2)$. Побудуємо коло радіуса $R_1 - R_2$ з центром у точці O і проведемо до нього дотичну AM із центра другого кола. Нехай OK – радіус, який проходить через точку M. Тоді пряма $KP \| MA$ і буде шуканою спільною дотичною. Зрозуміло, що аналогічно можна побудувати другу спільну дотичну, симетричну до KP відносно прямої OA.



Мал.39



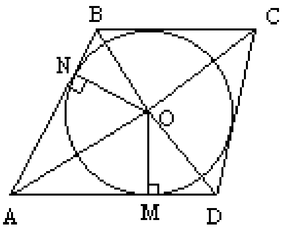
Мал.40

Але можливий також принципово інший варіант розташування спільної дотичної (див. мал. 40). Побудувати її можна на основі аналогічних міркувань. При цьому спочатку необхідно провести дотичну із точки A до кола з центром у точці O радіуса $R_1 + R_2$. Пропонуємо читачам завершити розв'язання самостійно.

А ми ще раз повернемося до властивостей відрізків дотичних, проведених з однієї точки, і розглянемо чотирикутник, описаний навколо кола. Як відомо, для нього суми довжин протилежних сторін рівні. Але для таких чотирикутників легко одержати також деякі співвідношення для кутів.

Задача 15.7. (9-10). Чотирикутник $ABCD$ описаний навколо кола з центром O. Довести, що $\angle AOB + \angle COD = 180°$.

Розв'язання. Нехай M та N – точки дотику вписаного кола до сторін AD та AB чотирикутника $ABCD$ (див. мал. 41). Тоді $\Delta AOM = \Delta AON$ (як прямокутні з рівними катетами



Мал.41

$OM = ON$ та спільною гіпотенузою OA). Тому $\angle OAN = \angle OAM$. Аналогічно доводиться, що точка O лежить на бісектрисах інших кутів чотирикутника $ABCD$. Отже,

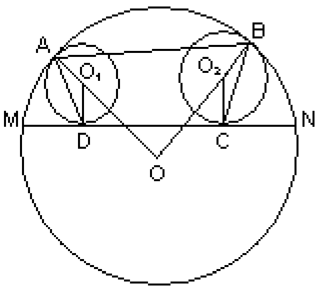
$$\angle AOB + \angle COD = (180^\circ - \angle BAO - \angle ABO) + (180^\circ - \angle CDO - \angle DCO) =$$

$$= 360^\circ - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D) = 180^\circ .$$

Пропонуємо читачам самостійно довести, що у випадку $BC \,||\, AD$, тобто коли $ABCD$ – трапеція, виконується рівність $\angle AOB = \angle COD = 90^\circ$. Цікаво, що якщо центр вписаного кола співпадає з точкою перетину діагоналей чотирикутника, то цей чотирикутник – ромб. А чи зможете ви це довести?

Зауважимо, що іноді рівність суми протилежних кутів чотирикутника вдається встановити досить своєрідним способом.

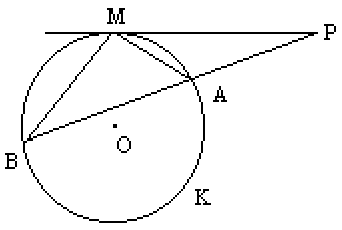
Задача 15.8. (9-10). У сегмент кола ω, що обмежений хордою MN, вписані два кола. Вони дотикаються до дуги кола ω у точках A та B, а до MN – у точках C та D. Доведіть, що точки A, B, C, D лежать на одному колі.



Мал.42

Розв'язання. Нехай O, O_1, O_2 – центри цих кіл. Зауважимо, що $\angle O_1AD = \angle O_1DA$, $\angle O_2BC = \angle O_2CB$, $\angle O_1DC = \angle O_1CD = 90^\circ$ (див. мал. 42). Тому досить довести, що $\angle O_1AB = \angle O_2BA$. Але оскільки у точці A дотична є спільною, то радіуси O_1A та OA перпендикулярні до цієї дотичної. Аналогічно O_2B та OB перпендикулярні до дотичної у точці B. Отже, $\angle O_1AB = \angle OAB = \angle OBA = \angle O_1BA$. Звідси одержуємо, що $\angle ABC + \angle ADC = \angle DAB + \angle DCB$, а тому точки A, B, C, D лежать на одному колі.

Нарешті розглянемо властивості прямих, які перетинають коло у двох точках.



Мал.43

Задача 15.9. (9-10). На площині задані коло K і точка P поза ним. Січна, проведена через точку P, перетинає коло у точках A і B. Довести, що добуток $PA \cdot PB$ не залежить від вибору січної.

Розв'язання. Нехай PM – дотична до кола K (див. мал. 43). У трикутниках AMP та MBP кут P спільний, а $\angle PMA = \angle MBA$, бо кут PMA можна розглядати як граничне положення вписаного кута, який спирається на дугу MA. Тому $\Delta AMP \sim \Delta MBP$. А отже, $PA : PM = PM : PB$. Звідси одержимо $PA \cdot PB = PM^2 = const$.

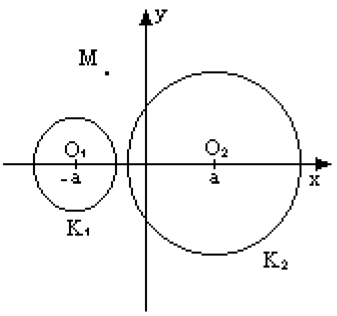
Зауважимо, що твердження задачі 15.9 залишається справедливим і для точок P всередині кола (див. розв'язання задачі 15.2). Зрозуміло також, що для точок P на колі K вказаний добуток дорівнює нулю.

Нехай d – відстань від точки P до центра кола K, а R – радіус цього кола. Тоді (див. мал. 43) $MP^2 = OP^2 - OM^2 = d^2 - R^2$. А отже, $PA \cdot PB = |d^2 - R^2|$. Остання рівність справедлива і для точок P всередині кола K. Справді, тоді $PA \cdot PB = (R-d)(R+d) = R^2 - d^2$.

Зрозуміло, що рівність залишиться справедливою і для точок P на колі K.

Величину $d^2 - R^2$ прийнято називати *степенем точки* P відносно кола K.

Задача 15.10. (9-10). На площині задано два неконцентричні кола K_1 та K_2. Довести, що геометричним місцем точок, степені яких відносно обох кіл рівні, є пряма.



Мал.44

Розв'язання. Нехай R_1 та R_2 – радіуси кіл з центрами в точках $O_1(-a;0)$ та $O_2(a;0)$ відповідно (див. мал. 44). Якщо степені точки $M(x;y)$ відносно кіл K_1 та K_2 рівні, то $MO_1^2 - R_1^2 = MO_2^2 - R_2^2$, або $(x+a)^2 + y^2 - R_1^2 = (x-a)^2 + y^2 - R_2^2$. Звідси $x = \dfrac{R_1^2 - R_2^2}{4a}$. Це рівняння і задає пряму, перпендикулярну до відрізка, який з'єднує центри кіл.

Така пряма називається радикальною віссю кіл K_1 та K_2. Зрозуміло, що якщо кола перетинаються, то радикальна вісь проходить через їх точки перетину, адже кожна з них має відносно кожного з кіл степінь нуль.

Справедливе також таке твердження: якщо центри трьох кіл не лежать на одній прямій, та радикальні осі для кожної пари кіл перетинаються в одній точці. Справді, оскільки радикальні осі двох кіл перпендикулярні до лінії центрів цих кіл, а всі три центри не лежать на одній прямій, то дві із трьох таких осей перетинаються в деякій точці M. Але, якщо, наприклад, точка M одного степеня відносно кіл K_1 та K_2 і відносно кіл K_1 та K_3, то вона того ж степеня і відносно кіл K_2 та K_3. А тому третя радикальна вісь теж проходить через M. Таку точку називають радикальним центром трьох кіл.

Властивості радикальних осей можуть бути застосовані для розв'язування багатьох задач. Ось один приклад.

Задача 15.11. (9-10). На площині задані три кола, які попарно перетинаються. Через кожну пару точок перетину проведена пряма. Довести, що ці три прямі перетинаються в одній точці або паралельні.

Розв'язання. Дані прямі є радикальними осями для кожної пари із цих кіл. Якщо центри всіх кіл не лежать на одній прямій, то, згідно, доведеного вище такі осі перетинаються в одній точці. Якщо ж центри трьох кіл лежать на одній прямій, то кожна із радикальних осей перпендикулярна до лінії центрів. А отже, дані прямі паралельні.

І на завершення параграфа наведемо один цікавий приклад на побудову.

Задача 15.12. (9-10). У дане коло впишіть трикутник, подібний даному.

Розв’язання. Нехай кути заданого трикутника дорівнюють α, β, γ. Проведемо в довільній точці *A* кола дотичну MN і відкладемо по ту сторону від неї, що і коло, кути $\angle BAM = \gamma$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle CAN = \beta$. Якщо *B* та *C* – точки перетину сторін побудованих кутів з колом, то ΔABC – шуканий.

Подумайте, чому він справді подібний заданому. Скільки розв’язків має задача?

Вправи до § 15

1. (9-10). Доведіть, що з центра кола, вписаного у трикутник, кожну сторону цього трикутника видно під тупим кутом.
2. (9-10). Одна з діагоналей вписаного в коло чотирикутника є діаметром цього кола. Доведіть, що проекції протилежних сторін чотирикутника на іншу діагональ рівні між собою.
3. (9-10). Доведіть, що кола, побудовані на двох сторонах гострокутного трикутника як на діаметрах, перетинаються на третій стороні.
4. (9-10). Доведіть, що серединний перпендикуляр до відрізка, який з’єднує основи двох висот трикутника, проходить через середину однієї зі сторін цього трикутника.
5. (9-10). Два кола перетинаються в точках *A* та *B*; *MN* – спільна дотична цих кіл. Доведіть, що пряма *AB* ділить відрізок *MN* між точками дотику пополам.
6. (9-10). Три кола з радіусами 1 см., 2см., 3 см. попарно дотикаються зовнішнім чином. Знайдіть радіус кола, яке проходить через: а) їх точки дотику; б) їх центри.
7. (9-10). Побудуйте кола із заданими центрами, які попарно дотикаються одне одного зовнішнім чином.
8. (9-10). Дві взаємно перпендикулярні хорди поділяють коло на чотири дуги, найменші дві з яких мають 30^o та 45^o. Знайдіть величини інших двох дуг.
9. (9-10). Діагоналі вписаного в коло чотирикутника перпендикулярні між собою і перетинаються в точці *P*. Доведіть, що пряма *MP*, перпендикулярна до *BC*, ділить сторону *AD* пополам.
10. (9-10). *AB* – бічна сторона рівнобічної трапеції *ABCD*, діагоналі якої перетинаються в точці *P*. Доведіть, що центр описаного навколо неї кола, лежить на колі, описаному навколо трикутника *ABP*.
11. (9-10). Всередині чотирикутника *ABCD* вибрали точку *M* так, що *ABMD* – паралелограм. Доведіть, що якщо $\angle CBM = \angle CDM$, то $\angle ACD = \angle BCM$.
12. (9-10). Доведіть, що якщо в опуклому п’ятикутнику *ABCDE* $\angle ABC = \angle ADE$, $\angle AEC = \angle ADB$, то $\angle BAC = \angle DAE$.
13. (9-10). Точки *A, B, C* лежать на одній прямій, а точка *O* – поза нею. O_1, O_2, O_3 – центри кіл, описаних відповідно навколо трикутників *AOB, BOC, COA*. Доведіть, що точки O, O_1, O_2, O_3 лежать на одному колі.
14. (9-10). У колі проведено хорди *AB* і *AC*. Через точку *A* проведена дотична, а через *B* – пряма, паралельна цій дотичній, яка перетинає *AC* у точці *D*. Доведіть, що $AB^2 = AC \cdot AD$.
15. (9-10). *A* та *B* – дві діаметрально протилежні, *C* – довільна точка на колі. Дотична в точці *B* і пряма *AC* перетинаються в точці *M*. Доведіть, що дотична у точці *C* ділить відрізок *BM* пополам.

§ 16. Площа фігури. Перерозподіл площ

Поняття площі фігури відноситься до найдавніших понять, з якими довелося стикатися людям у своїх практичних потребах. Безумовно, найлегше вирішувалося питання про обчислення площ прямокутних ділянок. Але, як свідчить, наприклад, формула Герона, проблеми з обчисленням площ інших важливих фігур теж були розв'язані порівняно давно.

До основних формул, за якими обчислюють площу трикутника, відносяться:

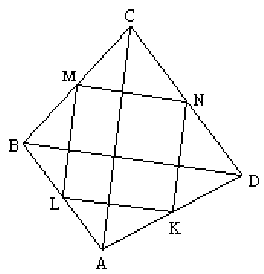
$$S = \frac{1}{2}ah_a,\ S = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin A,\ S = pr,$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$ – формула Герона.

Тут a, b, c – сторони трикутника, $p = \frac{a+b+c}{2}$ його півпериметр, r – радіус вписаного кола.

Зауважимо, що аналогічні формули можна одержати і для інших многокутників. Зокрема для опуклого чотирикутника. $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$, де d_1, d_2 – діагоналі, φ – кут між ними, $S = pr$. А для вписаного чотирикутника також $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$. Тут $p = \frac{a+b+c+d}{2}$.

Площі подібних фігур відносяться як квадрати відповідних лінійних елементів цих фігур. Останній факт використаємо при розв'язуванні наступної задачі.

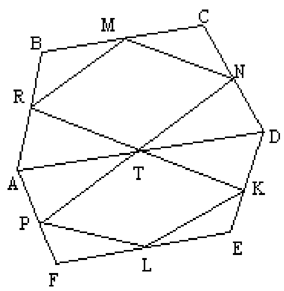


Мал.45

Задача 16.1. (9-10). Довести, що коли середини сторін двох опуклих чотирикутників співпадають, то площі цих чотирикутників рівні.

Розв'язання. Нехай чотирикутник $ABCD$ опуклий, M, N, K, L – середини його сторін (див. мал. 45). Тоді $\Delta MCN \sim \Delta BCD$, $MN : BD = 1:2$. Отже, $S_{\Delta MCN} = \frac{1}{4}S_{\Delta BCD}$. Аналогічно $S_{\Delta ALK} = \frac{1}{4}S_{\Delta ABD}$, $S_{\Delta KDN} = \frac{1}{4}S_{\Delta ACD}$. Тому $S_{ABCD} = 2 \cdot S_{MNKL}$. А отже, для будь-якого опуклого чотирикутника з серединами сторін M, N, K, L площа буде одна і та ж і дорівнюватиме $2 \cdot S_{MNKL}$.

Цікаво, що твердження задачі залишається справедливим також для опуклих шестикутників.

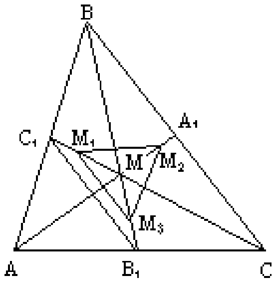


Мал.46

Справді (див. мал. 46), $S_{ABCDEF} = S_{ABCD} + S_{ADEF} = 2S_{MNTR} + 2S_{TKLP}$, де M, N, K, L, P, R – середини сторін шестикутника, T – середина діагоналі AD. Залишилося зауважити, що якщо середини сторін двох шестикутників співпадають, то і середина діагоналі AD – точка T – теж співпаде, бо $MNTR$ та $KLPT$ – паралелограми (доведіть!).

Пропонуємо читачам перевірити справедливість аналогічних тверджень для трикутників та інших многокутників.

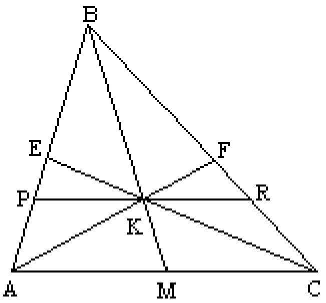
Задача 16.2. (9-10). Нехай M – точка перетину медіан трикутника ABC (див. мал. 47), M_1, M_2, M_3 – точки перетину медіан трикутників ABM, BCM та CAM відповідно. Обчислити площу трикутника $M_1M_2M_3$, якщо площа трикутника ABC дорівнює 1998.



Мал.47

Розв'язання. Нехай A_1, B_1, C_1 – середини сторін трикутника ABC. Тоді, зокрема, $B_1C_1 \| BC$, $B_1C_1 = \frac{1}{2}BC$. Оскільки медіани точкою перетину діляться у відношенні 2:1, рахуючи від вершин, то $M_1M_3 \| B_1C_1$, $M_1M_3 = \frac{2}{3}B_1C_1$. Таким чином, $M_1M_3 \| BC$, $M_1M_3 = \frac{1}{3}BC$. Аналогічно встановлюються співвідношення між іншими відповідними сторонами трикутників $M_1M_2M_3$ та ABC. А отже, $S_{M_1M_2M_3} = \frac{1}{9}S_{\Delta ABC} = \frac{1998}{9} = 222$.

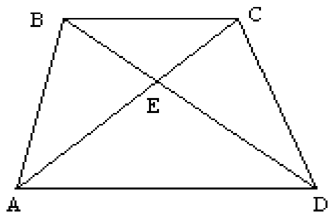
З медіаною трикутника пов'язана і наступна задача.



Мал.48

Задача 16.3. (9-10). На сторонах AB та BC трикутника ABC вибрали відповідно точки E та F так, що відрізки AF та CE перетинаються на медіані BM. Довести, що площі трикутників ACE та ACF рівні.

Розв'язання. Проведемо через точку K перетину відрізків AF та CE пряму $PR \| AC$ (див. мал. 48). Оскільки $AM = MC$, то $PK = KR$. Нехай h_1, h_2, H_1, H_2 – відповідно довжини висот трикутників PEK, RFK, AEC, AFC, опущених із вершин E та F. Тоді $\frac{h_1}{H_1} = \frac{PK}{AC} = \frac{KR}{AC} = \frac{h_2}{H_2}$. Якщо d – відстань між прямими PR та AC, то $h_1 = H_1 - d$, $h_2 = H_2 - d$ і тоді з останньої рівності одержимо $H_1(H_2 - d) = H_2(H_1 - d)$, тобто $H_1 d = H_2 d$, $H_1 = H_2$. Оскільки в трикутниках AEC та AFC основа AC спільна, то $S_{\Delta AEC} = S_{\Delta AFC}$.



Мал.49

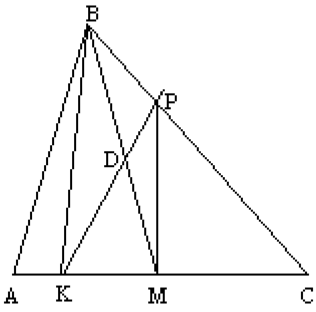
Задача 16.4. (9-10). Діагоналі трапеції $ABCD$ ($AD \| BC$) перетинаються в точці E. Довести, що площі трикутників ABE та CDE рівні.

Розв'язання. Нехай – h висота трапеції. Тоді (див. мал. 49) $S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2}AD \cdot h = S_{\Delta ACD}$.

Звідси маємо: $S_{\Delta ABE} = S_{\Delta ABD} - S_{\Delta AED} = S_{\Delta ACD} - S_{\Delta AED} = S_{\Delta CDE}$.

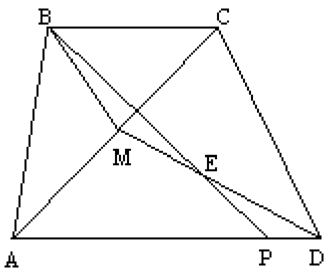
Використаємо одержані результати для розв'язування наступних двох задач.

Задача 16.5. (9-10). Дано трикутник і точку K на його стороні. Провести через K пряму, яка ділить площу трикутника пополам.



Мал.50

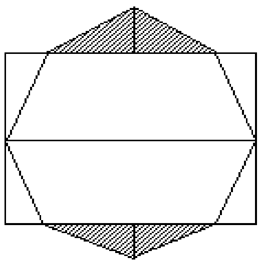
Розв'язання. Якщо, наприклад, *K* – середина сторони *AC* (див. мал. 50), то медіана *BK* ділить площу трикутника *ABC* пополам. Нехай тепер *K* не є серединою *AC*. Проведемо медіану *BM*. Тоді $S_{\Delta ABM} = S_{\Delta CBM}$. Припустимо, що пряма *KP* ділить площу трикутника *ABC* пополам і перетинає медіану *BM* в точці *D*. Тоді повинна виконуватись рівність $S_{\Delta KDM} = S_{\Delta BDP}$. Така рівність на основі задачі 16.4 неодмінно буде виконуватися, якщо $MP \parallel KB$, що й дає спосіб для побудови прямої *KP*. Зрозуміло, що така пряма єдина, бо якщо точки *P* та P_1 не співпадають, то не можуть площі фігур, які відрізняються одна від одної на $S_{\Delta KPP_1}$, одночасно дорівнювати половині площі трикутника *ABC*.



Мал.51

Задача 16.6. (9-10). Через вершину опуклого чотирикутника провести пряму, яка ділить його площу пополам.

Розв'язання. Нехай *M* – середина діагоналі *AC* (див. мал. 51). Тоді ламана *BMD* ділить площу чотирикутника *ABCD* пополам. Припустимо, що пряма *BP* теж ділить цю площу пополам і перетинає відрізок *MD* у точці *E*. Тоді $S_{\Delta MBE}$ та $S_{\Delta PDE}$ повинні бути рівними, що досягається при $MP \parallel BD$. Єдиність точки *P* для вершини
B доводиться аналогічно, як у задачі 16.5.

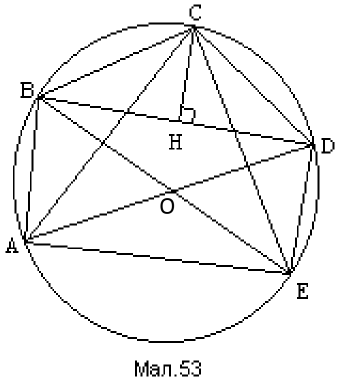

Мал.52

Аналізуючи розв'язання останніх двох задач, бачимо, що в обох випадках ми мали справу із перерозподілом площ рівновеликих фігур. Ось ще два приклади задач такого типу.

Задача 16.7. (8-9). Довести, що площа правильного восьмикутника дорівнює добутку його найбільшої та найменшої діагоналей.

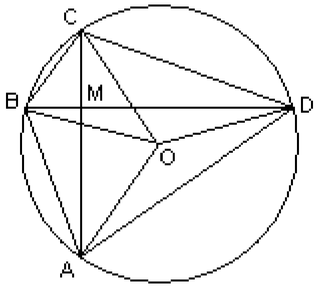
Розв'язання. Відріжемо від правильного восьмикутника 4 заштриховані на мал. 52 трикутники і приставимо їх так, як це показано на малюнку. Справедливість твердження задачі стає очевидною.

Задача 16.8. (9-10). Чотирикутник *ABCD* вписаний у півколо з діаметром *AD*. Вписати у коло з цим же діаметром трикутник, площа якого дорівнює площі даного чотирикутника.



Мал.53

Розв'язання. Нехай *BE* – діаметр даного кола, який проходить через точку *B* (див. мал. 53). Покажемо, що трикутник *ACE* – шуканий. Справді, маємо, що *ABDE* – прямокутник. І якщо $CH \perp BD$, то $S_{ABCD} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BD +$ $+ \frac{1}{2} \cdot CH \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot (AB + CM) \cdot BD$. Але $BD = AE$, а сума $AB + CH$ дорівнює висоті трикутника *ACE*. Отже, $S_{\Delta ACE} = S_{ABCD}$. Зрозуміло, що даний розв'язок не єдиний.



Мал.54

Пропонуємо читачам також проаналізувати таке доведення: $S_{\Delta AOE}=S_{\Delta AOB}$, $S_{\Delta COE}=S_{\Delta BOC}$, $S_{\Delta AOC}=S_{\Delta COD}$. Звідси випливає, що $S_{\Delta ACE}=S_{ABCE}$.

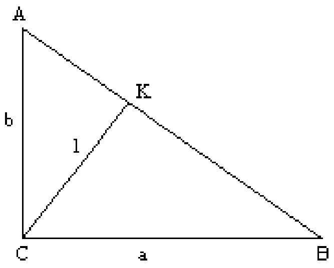
Аналогічну ідею можна використати для розв'язування такої задачі.

Задача 16.9. (9-10). Доведіть, що якщо діагоналі чотирикутника *ABCD*, вписаного в коло з центром *O*, перпендикулярні, то ламана *AOC* ділить його площу пополам.

Розв'язання. Оскільки вписані кути, які спираються на дуги *AB*, *BC*, *CD*, *DA* – гострі (див мал. 54), то *O* лежить всередині *ABCD*. $\angle BAM+\angle ABM=90°$, то

$$S_{\Delta BCO}=\frac{1}{2}R^2\sin\angle BOC=\frac{1}{2}R^2\sin 2\angle BAC==\frac{1}{2}R^2\sin 2\angle ABD=\frac{1}{2}R^2\sin\angle AOD=S_{\Delta ADO}.$$

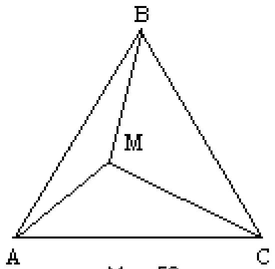
Аналогічно доводимо, що $S_{\Delta ABO}=S_{\Delta CDO}$.



Мал.55

Звертаємо увагу читачів на те, що поняття площі може використовуватись як допоміжний засіб під час розв'язування інших задач. Наприклад, для обчислення довжини висоти *h* прямокутного трикутника (див. мал. 55), проведеної до гіпотенузи *c*, достатньо скористатися рівностями $S=\frac{1}{2}\cdot c\cdot h$ та $S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b$, звідки $h=\frac{a\cdot b}{c}$. Подібним же чином поступаємо і при знаходженні довжини бісектриси *l* прямого кута *C* прямокутного трикутника *ABC*: $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ACK}+S_{\Delta BCK}\ \Rightarrow\ \frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}al\sin 45°+\frac{1}{2}bl\sin 45°\ \Rightarrow\ ab=(a+b)\cdot l\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\ \Rightarrow\ l=\frac{\sqrt{2}ab}{a+b}$.

Зрозуміло, що аналогічно можна обчислювати довжини бісектрис довільних трикутників. А ось ще два приклади розв'язування задач з використанням площі.



Мал.56

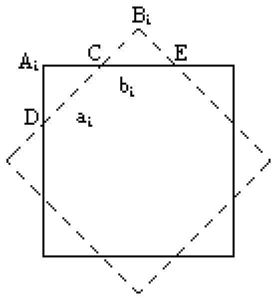
Задача 16.10. (9-10). Довести, що у правильному трикутнику сума відстаней від довільної внутрішньої точки до сторін трикутника є сталою.

Розв'язання. Нехай *M* – довільна внутрішня точка трикутника *ABC* зі стороною a; h_1, h_2, h_3 – відстані від точки *M* до сторін *AB*, *BC* та *CA* відповідно (див. мал. 56). Тоді

$$S_{\Delta ABM}+S_{\Delta BCM}+S_{\Delta CAM}=\frac{1}{2}ah_1+\frac{1}{2}ah_2+\frac{1}{2}ah_3=S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ah$$

де *h* – висота трикутника *ABC*. Звідси $h_1+h_2+h_3=h=const$.

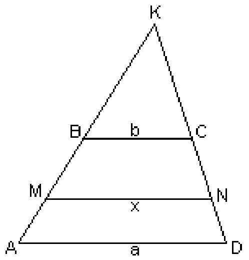
Задача 16.11. (9-10). На площині задано два рівні плоскі правильні *n*-кутники, які перетинаються так, що утворюється плоский 2*n*-кутник (взагалі кажучи, неправильний) (див. мал. 57 для перетину двох квадратів). Сторони одного із *n*-кутників пофарбовано в червоний колір, другого – в синій. Довести, що сума квадратів усіх синіх сторін утвореного $2n$-кутника дорівнює сумі квадратів усіх його червоних сторін.



Мал.57

Розв'язання. Зрозуміло, що в утвореному $2n$-кутнику чергуються червоні та сині сторони, довжини яких позначимо відповідно через a_i, та b_i, $i=1,2,...,n$. Розглянемо дві такі послідовні сторони $2n$-кутника разом із виступаючими поза нього відповідними частинами правильних n-кутників (на мал. 57 пунктиром позначено відрізки червоного кольору). Оскільки $\angle DA_iC=\angle DB_iE$, $\angle A_iCD=\angle B_iCE$, то $\Delta DA_iC\sim\Delta EB_iC$, і отже, $a_i^2:S_{\Delta DA_iC}=b_i^2:S_{\Delta CB_iE}=k$, причому число k не залежить від i. Тому і сума квадратів сторін a_i пропорційна з коефіцієнтом k сумі площ трикутників із вершинами A_i, а сума квадратів сторін b_i пропорційна із тим же коефіцієнтом k сумі площ трикутників із вершинами B_i. Але такі суми площ рівні, бо кожна з них дорівнює різниці площ n-кутника та утвореного в результаті перетину $2n$-кутника. Тому й сума квадратів довжин синіх сторін дорівнює сумі квадратів довжин червоних сторін утвореного $2n$-кутника.

Задача 16.12. (9-10). Знайдіть довжину відрізка, паралельного основам трапеції із довжинами a та b, якщо відомо, що він ділить площу цієї трапеції пополам, а його кінці знаходяться на бічних сторонах трапеції.

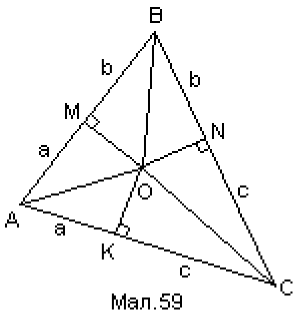


Мал.58

Розв'язання. Нехай MN ділить площу трапеції $ABCD$ пополам (див. мал. 58). Тоді $S_{\Delta BKC}=kb^2$, $S_{\Delta MKN}=kx^2$, $S_{\Delta AKD}=ka^2$ при деякому k.

Отже $kx^2-kb^2=ka^2-kx^2$. Звідси $x=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

Задача 16.13. (9-10). Знайти висоту дерева, якщо його з відстаней a, b, c, видно під кутами, сума яких дорівнює $90°$.



Мал.59

Розв'язання. Оскільки $\alpha+\beta+\gamma=90°$, то $2\alpha+2\beta+2\gamma=180°$. Отже, висоту цього дерева можна трактувати як радіус вписаного кола у трикутник зі сторонами $a+b$, $b+c$, $c+a$ (див. мал. 59). Отже, $h=r=\dfrac{S}{p}=\sqrt{\dfrac{abc}{a+b+c}}$. Тут площа S знайдена за формулою Герона.

Відзначимо, що поняття площі як допоміжний засіб уже використовувалися нами і для розв'язування алгебраїчних задач. А із використанням його в геометричних задачах ми ще зустрінемося у наступному параграфі.

Вправи до § 16

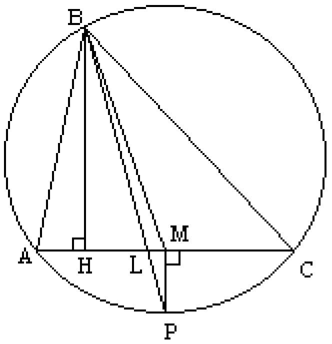
1. (9-10). У вписаному чотирикутнику $ABCD$ діагоналі перпендикулярні. Доведіть, що його площа дорівнює $(AB\cdot CD+BC\cdot AD)/2$.

2. (9-10). Доведіть, що площа опуклого чотирикутника дорівнює половині добутку його діагоналей, помноженій на синус кута між ними.
3. (9-10). Через точку на стороні трикутника проведіть дві прямі, які ділять площу цього трикутника на три рівні частини.
4. (8-9). Як розрізати прямокутник зі сторонами 8 см та 18 см на дві частини, з яких можна було би скласти квадрат. Розв'яжіть аналогічну задачу для прямокутника з довжинами сторін 9 см та 16 см.
5. (9-10). Десантник знаходиться в лісі з площею S. Форма лісу йому не відома, але він знає, що у лісі немає галявин. Доведіть, що він може вийти з лісу, пройшовши шлях не більше $2\sqrt{\pi S}$.
6. (9-10). Два поля знаходяться між двома паралельними прямими. Межею між ними служить ламана, яка складається з двох ланок. Як зробити межу коротшою, не змінюючи площ цих полів.
7. (9-10). Всередині трикутника *ABC* взяли точку *M*. Прямі *AM, BM* та *CM* перетинають сторони трикутника у точках A_1, B_1, та C_1. Доведіть, що $\frac{MA_1}{AA_1}+\frac{MB_1}{BB_1}+\frac{MC_1}{CC_1}=1$.
8. (9-10). Через точку *M* всередині трикутника *ABC* проведено прямі, паралельні сторонам трикутника. Вони розбивають трикутник на 6 частин, з яких 3 частини є трикутниками, площі яких дорівнюють S_1, S_2 та S_3. Знайдіть площу трикутника *ABC*.
9. (9-10). а) На продовженнях сторін трикутника *ABC* взяли точки A_1, B_1, C_1 так, що $\vec{AB_1}=2\vec{AB}, \vec{BC_1}=2\vec{BC}, \vec{CA_1}=2\vec{CA}.$ Знайдіть площу трикутника $A_1B_1C_1$, якщо площа трикутника *ABC* дорівнює *S*. б)Сформулюйте і розв'яжіть аналогічну задачу для опуклого чотирикутника *ABCD*.
10. (9-10). Кожна діагональ опуклого п'ятикутника відтинає від нього трикутник з площею 1. Знайдіть площу такого п'ятикутника.
11. (9-10). Протилежні сторони *AB* і *DE, BC* і *EF, CD* і *FA* опуклого шестикутника паралельні. Доведіть, що площі трикутників *ACE* та *BDF* рівні.
12. (9-10). Площі двох правильних трикутників, з яких один вписаний в інший, відносяться як 1:3. У якому відношенні вершини одного з цих трикутників ділять сторони іншого трикутника.
13. (9-10). З вершин трикутника *ABC* проведені відрізки AA_1, BB_1, CC_1, кінці яких ділять протилежні сторони у відношенні $\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{CB_1}{B_1A}=k>1$. Ці відрізки обмежують деякий трикутник. Знайдіть відношення його площі до площі трикутника *ABC*.
14. (9-10). Знайдіть величину кута *C* трикутника *ABC*, площа якого $S=\frac{a^2+b^2-c^2}{4}$.
15. (9-10). Дано трикутник *ABC*. Знайдіть всі такі точки *P*, що площі трикутників *ABP, BCP* та *ACP* рівні.

§ 17. Деякі цікаві точки та лінії в трикутнику

Із шкільного курсу геометрії відомі такі лінії в трикутнику як висоти, медіани та бісектриси. Характерна особливість їх взаємного розташування встановлюється у наступній задачі.

Задача 17.1. (9-10). Довести, що у всякому трикутнику бісектриса кожного з кутів знаходиться між висотою і медіаною, проведеними з тієї ж вершини.

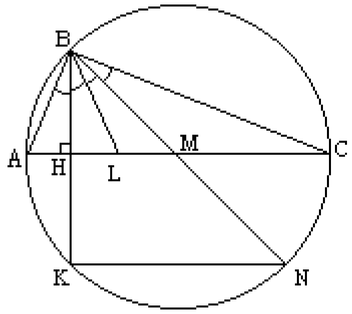


Мал.60

Розв'язання. Зрозуміло, що у випадку співпадання цих ліній, твердження очевидне. Нехай тепер маємо довільний трикутник *ABC*, у якому $\angle A$ не дорівнює $\angle C$ (див. мал. 60). Припустимо, що бісектриса *BL* знаходиться правіше від висоти *BH*. Проведемо *BL* до перетину з описаним навколо ΔABC колом у точці *P*. Оскільки $\cup AP = \cup PC$ то $PM \perp AC$, де *M* середина *AC*. Отже, точка *M* знаходиться правіше точки *L*, а значить, медіана *AM* – правіше бісектриси *AL*. Аналогічно розглядається випадок розташування *AL* лівіше від *AH*.

Взаємне розташування висот, бісектрис і медіан трикутника використаємо для розв'язування такої задачі.

Задача 17.2. (9-10). Визначити кути трикутника, у якому висота, бісектриса та медіана поділяють один із кутів на 4 рівні частини.



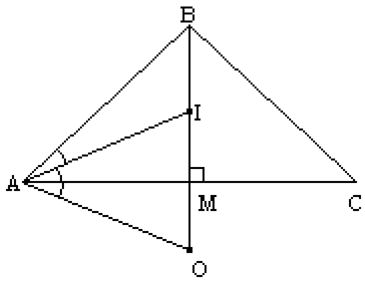
Мал.61

Розв'язання. Продовжимо висоту *BH* та медіану *BM* до перетину з описаним навколо ΔABC колом відповідно в точках *K* та *N* (див. мал. 61). Оскільки $\angle ABH = \angle CBM$, то $\cup AK = \cup CN$. Отже, $KN \| AC$, $KN \perp BK$. Тому *BN* – діаметр описаного кола, причому не перпендикулярний до *AC* і проходить через середину *AC*. А отже, *AC* також є діаметром. Звідси $\angle ABC = 90°$. Оскільки при цьому $\angle ABH = \frac{1}{4}\angle ABC = 22{,}5°$, то тепер легко знаходимо, що $\angle BAC = 67{,}5°$, $\angle ACB = 22{,}5°$.

Читач напевно вже звернув увагу на те, що при розв'язуванні обох останніх задач використовувалось описане навколо трикутника коло. Нагадаємо, що його центр лежить у точці перетину серединних перпендикулярів до сторін трикутника. Відповідно, точка перетину бісектрис є центром кола, вписаного у цей трикутник. На основі взаємного розташування цих точок можна робити певні висновки про деякі властивості трикутника. Наприклад.

Задача 17.3. (8-9). Довести, що якщо центри вписаного та описаного кіл трикутника співпадають, то цей трикутник правильний.

Розв'язання. Сторони такого трикутника є рівними хордами описаного кола, оскільки вони рівновіддалені від спільного центра на радіус вписаного кола.



Мал.62

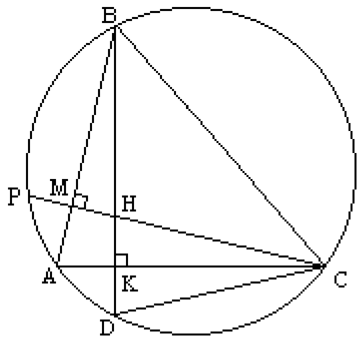
Задача 17.4. (8-9). Визначити кути рівнобедреного трикутника, в якого центри вписаного та описаного кіл симетричні відносно основи.

Розв'язання. Зрозуміло, що поза трикутником може бути лише центр описаного кола (на малюнку 62 – це точка O). Якщо I – центр вписаного кола, то маємо:

$\angle BAI = \angle MAI = \angle MAO = \alpha$. Але оскільки OA та OB радіуси описаного кола, то $\angle ABO = \angle BAO = 3\alpha$. Крім того, $BM \perp AC$. Отже, $\angle MBA + \angle BAM = 90°$, тобто $3\alpha + 2\alpha = 90°$, $\alpha = 18°$. Звідси знаходимо $\angle BAC = \angle BCA = 36°$, $\angle ABC = 108°$.

Наступні дві задачі теж будуть пов'язані із цікавими точками в трикутнику та з описаним колом.

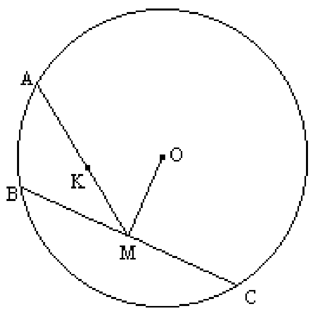
Задача 17.5. (9-10). Довести, що точки, симетричні до точки перетину висот трикутника відносно його сторін, лежать на описаному навколо трикутника колі.



Мал.63

Розв'язання. Нехай H – точка перетину висот трикутника ABC, $CM \perp AB$, $BK \perp AC$, P і D – точки перетину прямих CM і BD відповідно з описаним колом (див. мал. 63). Тоді $\Delta ABK \sim \Delta ACM$ (як прямокутні зі спільним кутом A). Отже, $\angle ABD = \angle ACP \Rightarrow \cup AP = \cup AD \Rightarrow \angle PCA = \angle DCA$. Тому CK є одночасно висотою і бісектрисою трикутника HCD, тобто точка D симетрична до H відносно сторони AC. Аналогічно доводиться, що точка P симетрична до H відносно AB.

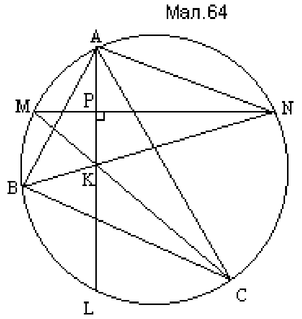
Задача 17.6. (9-10). Дано коло, точка A на колі і точка K всередині кола. Побудувати на колі такі точки B і C, щоб K була точкою перетину: а) медіан; б) бісектрис; в) висот трикутника ABC.



Мал.64

Розв'язання:

а) Побудуємо на прямій AK (див. мал. 64) точку M так, щоб $AK = 2 \cdot KM$. Якщо M не знаходиться всередині кола, то задача не має розв'язку. Якщо M – центр кола, то BC – довільний діаметр, який не проходить через A. В інших випадках проведемо хорду BC перпендикулярно до OM, де O – центр кола. Пропонуємо читачам зробити обґрунтування самостійно. Відзначимо, що саму точку O можна одержати як перетин серединних перпендикулярів до двох довільних непаралельних хорд;



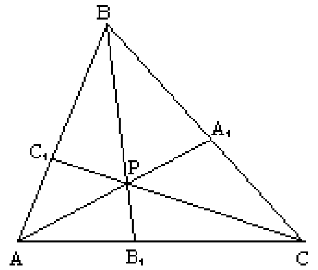
Мал.65

б) Нехай $MN \perp AK$, $AP = PK$ (див. мал. 65). Тоді NP – висота та медіана трикутника ANK. Тому $\angle ANM = \angle BNM \Rightarrow \cup AM = \cup BM \Rightarrow \angle ACM = \angle BCM$ де B, C – відповідно точки перетину прямих KN та KM із заданим колом. Отже, точка K лежить на бісектрисі кута ACB. Оскільки, крім того, $\angle MAP = \angle MKP$, а $\angle MKP = \angle KAC + \angle KCA$ як зовнішній кут ΔAKC, то

$\cup MB+\cup BL=\cup LC+\cup AM$. Звідси $\cup BL=\cup LC$ і отже, *АК* – бісектриса $\angle BAC$. Тому побудовані таким чином точки *B* та *C* – шукані;

в) Скористайтеся результатом задачі 17.5.

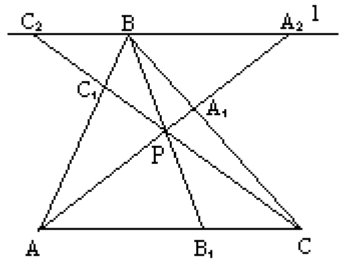
Зауважимо, що при розв’язуванні пункту б) цієї задачі можна було скористатися рівністю $LB=LK=LC$ (“теорема про тризуб”). Справді, (див. мал. 65), $\angle LKC=\angle LAC+\angle MCA=\angle LAB+\angle MCB=\angle KCL$. Отже, $LC=LK$. Також $LC=LB$ як хорди, які стягують рівні дуги.



Мал.66

При розв’язуванні задач часто використовують той факт, що відповідно медіани, висоти, бісектриси трикутника перетинаються в одній точці. Але в одній точці всередині трикутника можуть перетинатися також інші відрізки, які виходять з вершин цього трикутника.

Припустимо, що відрізки AA_1, BB_1, CC_1 перетинаються в точці *P* (див. мал. 66). Тоді $\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{S_{\Delta APB_1}}{S_{\Delta B_1PC}}=\frac{S_{\Delta ABB_1}}{S_{\Delta B_1BC}}=\frac{S_{\Delta APB}}{S_{\Delta BPC}}$. Аналогічно встановлюємо, що $\frac{CA_1}{A_1B}=\frac{S_{\Delta APC}}{S_{\Delta APB}}$, $\frac{BC_1}{C_1A}=\frac{S_{\Delta BPC}}{S_{\Delta APC}}$. Отже $\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1$. (*)



Мал.67

Відзначимо, що цю рівність можна було встановити й інакше. Проведемо через *B* пряму $l \parallel AC$ (див. мал. 67). Нехай A_1 та C_1 відповідно точки перетину з *l* прямих AA_1 та CC_1. Тоді $\Delta APB_1 \sim \Delta A_2PB$, $\Delta B_1PC \sim \Delta BPC_2$, $\Delta AA_1C \sim \Delta A_2A_1B$, $\Delta AC_1C \sim \Delta BC_1C_2$. З подібності цих трикутників одержимо:

$$\frac{AB_1}{BA_2}=\frac{PB_1}{PB},\ \frac{BC_2}{B_1C}=\frac{BP}{PB_1},\ \frac{CA_1}{A_1B}=\frac{AC}{BA_2},\ \frac{BC_1}{C_1A}=\frac{BC_2}{AC}.$$

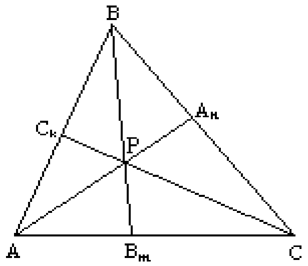
Перемноживши їх, одержуємо рівність (*).

Відзначимо, що і навпаки з виконання рівності (*) випливає, що відрізки AA_1, BB_1, CC_1 перетинаються в одній точці. Дійсно, нехай рівність (*) виконується і AA_1, BB_1 перетинаються в точці *P*. Проведемо відрізок CC_2 через точку *P*. Тоді також $\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_2}{C_2A}=1$.

Звідси і з рівності (*) випливає, що $\frac{BC_1}{C_1A}=\frac{BC_2}{C_2A}$, тобто $C_1=C_2$. А тому CC_1 теж проходить через точку *P*.

Таким чином, нами доведена чудова **теорема** італійського математика XVII – XVIII ст. *Томазо **Чеви***: Нехай точки A_1, B_1, C_1 лежать відповідно на сторонах *BC, AC* та *AB* трикутника *ABC*. Для того, щоб прямі AA_1, BB_1, CC_1 перетиналися в одній точці, необхідно і достатньо, щоб виконувалася рівність (*).

Пропонуємо читачам самостійно довести з допомогою теореми Чеви, що відповідно медіани, висоти, бісектриси трикутника перетинаються в одній точці.



Мал.68

Задача 17.7. (9-10). Кожну сторону правильного трикутника поділили на 1999 рівних частин. Точки поділу з'єднали відрізками із протилежними вершинами. Довести, що жодні три з цих відрізків не перетинаються всередині трикутника в одній точці.

Розв'язання. Для зручності будемо вважати, що довжина сторони трикутника *ABC* дорівнює 1999. A_n, B_m, C_k відповідно *n, m, k*-ті точки поділу, рахуючи від точок *C*, *A* та *B* відповідно (див. мал. 68). Якщо відрізки AA_n, BB_m, CC_k перетинаються в одній точці, то на основі теореми Чеви одержимо:

$$\frac{AB_m}{B_mC}\cdot\frac{CA_n}{A_nB}\cdot\frac{BC_k}{C_kA} = \ = \frac{m}{1999-m}\cdot\frac{n}{1999-n}\cdot\frac{k}{1999-k}=1$$

тобто, $mnk=(1999-m)(1999-n)(1999-k)$, звідки $2mnk=1999l$, де l – деяке ціле число. Отже, $2mnk$ ділиться на 1999. Але це неможливо, бо числа 2, *m, n, k* менші за 1999, а 1999 – просте число. Отже, жодні три із таких відрізків не можуть перетинатися всередині трикутника *ABC* в одній точці.

Відзначимо, що умова простоти числа 1999 тут суттєва. Наприклад, при поділі кожної сторони на 15 рівних частин три таких відрізки в одній точці всередині трикутника перетинатися можуть. Доведіть це самостійно. Зрозуміло також, що такий перетин можливий при поділі на парне число частин.

Задача 17.8. (9-10). На сторонах *BC, CA* та *AB* трикутника *ABC* взяли відповідно точки A_1, B_1 та C_1 так, що прямі AA_1, BB_1 та CC_1 перетинаються в одній точці *P*. Довести, що прямі AA_2, BB_2 та CC_2, симетричні до цих прямих відносно бісектрис кутів *A, B, C* відповідно, також перетинаються в одній точці.

Розв'язання. Доведемо спочатку, що для довільних точок A_1, B_1, C_1 на відповідних сторонах трикутника *ABC* (див. мал. 66) виконується рівність $\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=\frac{\sin\angle B_1BA}{\sin\angle CBB_1}\cdot\frac{\sin\angle A_1AC}{\sin\angle BAA_1}\cdot\frac{\sin\angle C_1CB}{\sin\angle ACC_1}$.

Справді, застосовуючи теорему синусів до трикутників ACC_1 та BCC_1, одержимо: $\frac{C_1A}{C_1C}=\frac{\sin\angle ACC_1}{\sin\angle A}$, $\frac{CC_1}{BC_1}=\frac{\sin\angle B}{\sin\angle C_1CB}$ звідки

$$\frac{BC_1}{C_1A}=\frac{\sin\angle C_1CB}{\sin\angle ACC_1}\cdot\frac{\sin\angle A}{\sin\angle B}.$$

Аналогічно отримуємо:

$$\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{\sin\angle B_1BA}{\sin\angle CBB_1}\cdot\frac{\sin\angle C}{\sin\angle A}\text{, та }\frac{CA_1}{A_1B}=\frac{\sin\angle A_1AC}{\sin\angle BAA_1}\cdot\frac{\sin\angle B}{\sin\angle C}.$$

Для завершення доведення залишається перемножити одержані рівності.

Оскільки прямі AA_2, BB_2, CC_2 симетричні до прямих AA_1, BB_1, CC_1 то $\sin\angle ACC_2 = \sin\angle C_1CB$, $\sin\angle C_2CB = \sin\angle ACC_1$. Тому

$$\frac{AB_2}{B_2C}\cdot\frac{CA_2}{A_2B}\cdot\frac{BC_2}{C_2A}=\frac{\sin\angle B_2BA}{\sin\angle CBB_2}\cdot\frac{\sin\angle A_2AC}{\sin\angle BAA_2}\cdot\frac{\sin\angle C_2CB}{\sin\angle ACC_2}=$$

$$=\frac{\sin\angle CBB_1}{\sin\angle B_1BA}\cdot\frac{\sin\angle BAA_1}{\sin\angle BAA_2}\cdot\frac{\sin\angle ACC_1}{\sin\angle C_1CB}=\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=1.$$

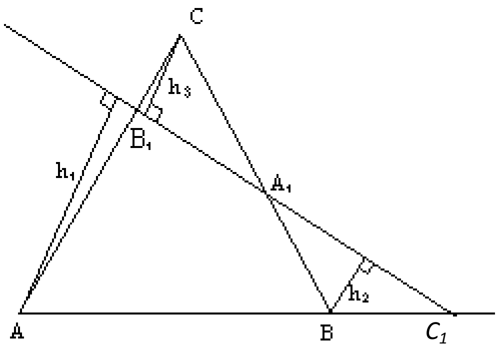
А отже, прямі AA_2, BB_2, CC_2 перетинаються в одній точці.

Така точка називається *ізогонально спряженою* до точки *P* відносно трикутника *ABC*. Точка, ізогонально спряжена до точки перетину медіан трикутника, називається *точкою Лемуана*. Відрізки прямих від вершин трикутника до протилежних його сторін, які проходять через точку Лемуана, називають *симедіанами* трикутника.

Відзначимо також, що на основі розв’язування задачі 17.8 умову (*) можна записати у рівносильному їй вигляді

$$\frac{\sin\angle B_1BA}{\sin\angle CBA_1}\cdot\frac{\sin\angle A_1AC}{\sin\angle BAA_1}\cdot\frac{\sin\angle C_1CB}{\sin\angle ACC_1}=1 \qquad (**)$$

і сформулювати теорему Чеви у тригонометричній формі. Зробіть це самостійно.



Мал.69

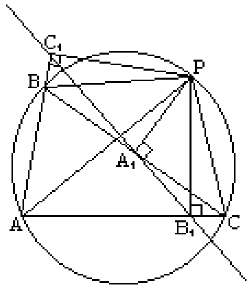
Двоїстою до теореми Чеви про перетин трьох прямих в одній точці можна вважати теорему Менелая про належність трьох точок до однієї прямої (грецький математик Менелай Олександрійський жив на межі 1 – 2 ст. н. е.). Нехай пряма перетинає прямі *BC*, *AC*, *AB*, на яких лежать сторони трикутника *ABC*, у точках A_1, B_1, C_1 (див. мал. 69).

Тоді добуток $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{h_1}{h_2}\cdot\frac{h_2}{h_3}\cdot\frac{h_3}{h_1}=1$.

Таким чином, одержана рівність є необхідною умовою того, щоб точки A_1, B_1, C_1, взяті на прямих *BC*, *AC*, *AB*, лежали на одній прямій. Покажемо, що ця умова є також достатньою. Припустимо, що дана рівність виконується, а, наприклад, точка B_1 не лежить на прямій A_1C_1. Візьмемо на *AC* точку B_2, яка лежить на A_1C_1. Тоді на основі доведеного вище $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_2}{B_2A}=1$. А отже, одержуємо рівність $\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{CB_2}{B_2A}$, звідки $B_1=B_2$. А тому B_1 теж повинна лежати на A_1C_1. Таким чином, справедлива наступна теорема – **теорема Менелая:** Нехай точки A_1, B_1, C_1 лежать відповідно на сторонах *BC, CA, AB* трикутника *ABC* чи на їх продовженнях. Для того, щоб ці точки лежали на одній прямій, необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$.

Застосуємо теорему Менелая до розв'язування наступної задачі.

Задача 17.9. (9-10). Довести, що основи перпендикулярів, опущених із точки *P* описаного навколо трикутника кола на його сторони чи на їх продовження, лежать на одній прямій.



Мал.70

Розв'язання. Нехай A_1, B_1, C_1 – основи перпендикулярів, опущених з точки *P* на прямі *BC*, *AC*, *AB*, що містять сторони ΔABC (див. мал. 70). Тоді

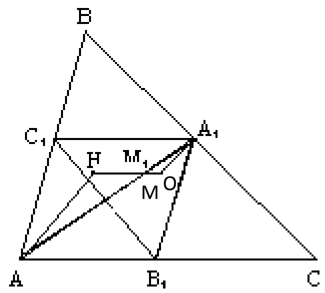
$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=\frac{AP\cdot\cos\angle PAC}{CP\cdot\cos\angle PCA}\times\ \times\frac{CP\cos\angle PCB}{BP\cos\angle PBC}\cdot\frac{PB\cdot\cos(180^\circ-\angle PBA)}{AP\cdot\cos\angle PAB}=$$

$$=\frac{\cos\angle PAC}{\cos\angle PBC}\cdot\frac{\cos\angle PCB}{\cos\angle PAB}\cdot\frac{\cos\angle PCA}{\cos\angle PCA}=1\cdot1\cdot1=1,$$

оскільки вписані кути, які спираються на одну і ту ж дугу, рівні, а $\angle PBA+\angle PCA=180^\circ$. А отже, точки A_1, B_1, C_1 лежать на одній прямій.

Відзначимо, що одержана пряма називається *прямою Сімсона* точки *P* відносно трикутника *ABC* (Роберт Сімсон – шотландський геометр XVIII ст.). У випадку, якщо *P* не лежить на описаному колі, точки A_1, B_1, C_1 є вершинами трикутника, який називають *педальним* трикутником точки *P* відносно трикутника *ABC*.

Інша цікава пряма, зв'язана з трикутником, називається прямою *Ейлера* (Леонард Ейлер (1701 – 1783) – видатний швейцарський математик, механік і астроном). Вона проходить через точки перетину висот та медіан трикутника і центр описаного навколо нього кола.



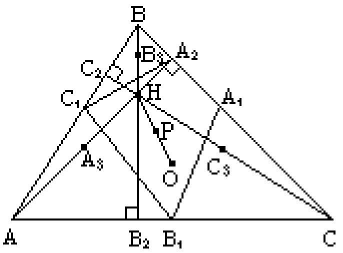
Мал.71

Задача 17.10. (9-10).Нехай *H* – точка перетину висот трикутника *ABC*, *O* – центр описаного кола, *M* – точка перетину медіан. Довести, що точка *M* лежить на відрізку *OH*, причому $OM:MH=1:2$.

Розв'язання. Нехай A_1, B_1, C_1 – середини сторін *BC*, *CA* та *AB* відповідно (див. мал. 71). Трикутники $A_1B_1C_1$ і *ABC* подібні з коефіцієнтом подібності $\frac{1}{2}$. Оскільки відповідні їх сторони паралельні, то висоти трикутника $A_1B_1C_1$ перетинаються в точці *O*. Тому $OA_1:HA=\frac{1}{2}$. Нехай M_1 – точка перетину відрізків *OH* та AA_1. Тоді оскільки $OA_1\,||\,AH$, то $OM_1:M_1H=OA_1:AH=\frac{1}{2}$. З тих же причин і $A_1M_1:AM_1=OA_1:AH=\frac{1}{2}$. А тому точка M_1 співпадає з точкою *M* перетину медіан трикутника *ABC*.

З іменем Ейлера пов'язана й інша цікава лінія в трикутнику – *коло дев'яти точок*.

Задача 17.11. (9-10). Довести, що середини сторін трикутника, основи висот і середини відрізків, які з'єднують точку *H* перетину висот з вершинами трикутника, лежать



Мал.72

на одному колі, причому центр P цього кола є серединою відрізка OH, де O – центр кола, описаного навколо заданого трикутника ABC.

Розв'язання. Нехай A_1, B_1, C_1 – середини сторін BC, CA та AB; A_2, B_2, C_2 – основи висот; A_3, B_3, C_3 – середини відрізків AH, BH, CH (див. мал. 72).

Оскільки $\angle AA_2B = 90°$, то $AC_1 = C_1A_2$ як радіуси кола, описаного навколо ABA_2. А отже, $C_1A_2 = A_1B_1$. Крім того, $A_1A_2 \| B_1C_1$. Тому $C_1A_2A_1B_1$ – рівнобічна трапеція і точка A_2 лежить на колі, описаному навколо трикутника $A_1B_1C_1$. Аналогічно доводимо, що й точки B_2 та C_2 лежать на цьому колі.

Розглянемо тепер коло K діаметром A_1A_3. Оскільки $A_1B_3 \| CC_2$, $A_3B_3 \| AB$, то $\angle A_3B_3A_1 = 90°$, а отже, точка B_3 лежить на колі K. Аналогічно доводимо, що й точка C_3 лежить на K. Тому точка A_1 лежить на колі, описаному навколо трикутника $A_3B_3C_3$ (тобто на K). Так само встановлюємо, що і точки B_1 та C_1 лежать на K. А отже, всі 9 відзначених точок знаходяться на даному колі.

Оскільки при гомотетії з центром H і коефіцієнтом $\frac{1}{2}$ трикутник ABC переходить у трикутник $A_3B_3C_3$, то і центр O кола, описаного навколо трикутника ABC, перейде в центр P кола, описаного навколо трикутника $A_3B_3C_3$. А тому P – середина відрізка OH.

Вправи до § 17

1. (9-10).Сторони трикутника дорівнюють a, b, c. Знайдіть довжини його висот та медіан.
2. (9-10).Виразіть довжину бісектриси l_c трикутника зі сторонами a та b і кутом між ними γ.
3. (9-10).Використовуючи теорему Чеви, доведіть, що: а) відповідно медіани, висоти, та бісектриси трикутника перетинаються в одній точці; б) відрізки, які з'єднують вершини трикутника з точками дотику вписаного в нього кола до протилежних сторін, перетинаються в одній точці.
4. (9-10).Доведіть, що трикутник рівнобедрений тоді і тільки тоді, коли дві його бісектриси мають однакову довжину. Чи вірне аналогічне твердження стосовно висот та медіан трикутника?
5. (9-10).У трикутнику ABC проведена бісектриса CC_1. Доведіть, що $CC_1^2 = AC \cdot BC - AC_1 \cdot BC_1$.
6. (8-9). Доведіть, що у довільному прямокутному трикутнику бісектриса прямого кута ділить пополам кут між висотою та медіаною, проведеними до гіпотенузи.
7. (8-9). У гострокутному трикутнику з однієї вершини провели медіану, з другої – бісектрису, з третьої – висоту. При їх перетині утворився деякий трикутник. Доведіть, що він не може бути рівностороннім.

8. (9-10).У трикутнику ABC проведені медіани AD та BE. $\angle CAD = \angle CBE = 30^\circ$. Доведіть, що трикутник ABC рівносторонній.
9. (8-9). Доведіть, що якщо у трикутнику ABC для довжин медіан виконується умова $m_a : m_b : m_c = \sqrt{3} : \sqrt{2} : \sqrt{1}$, то цей трикутник прямокутний.
10. (9-10).Доведіть, що висоти AA_1, BB_1, CC_1 гострокутного трикутника ABC є бісектрисами кутів трикутника $A_1B_1C_1$.
11. (9-10).Висоти трикутника ABC продовжили до перетину з описаним навколо нього колом у точках A_1, B_1, C_1. Доведіть, що A_1A, B_1B, C_1C є бісектрисами кутів трикутника $A_1B_1C_1$.
12. (9-10).Дано коло і три точки на цьому колі. Побудуйте вписаний у нього трикутник, для якого ці точки є точками перетину з колом: а) продовжень бісектрис; б) продовжень висот; в) продовжень висоти, медіани та бісектриси, проведених з однієї вершини.
13. (9-10).Побудуйте трикутник за висотою, медіаною та бісектрисою, проведеними з однієї вершини.
14. (9-10).Доведіть, що всередині трикутника ABC існують такі точки P та Q, що $\angle ABP = \angle CAP = \angle BCP$, $\angle BAQ = \angle ACQ = \angle CBQ$. Чи можуть ці дві точки співпадати між собою?
15. (9-10).Доведіть, що якщо три кола, описані навколо трикутників ABH, BCH та CAH мають однакові радіуси R, то:

   а) H – точка перетину висот трикутника ABC;

   б) R - радіус кола, описаного навколо трикутника ABC.

§ 18. Геометричні нерівності

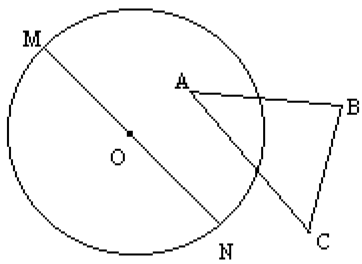
Однією з перших нерівностей, з якою ми зустрічаємося при вивченні геометрії, є так звана *нерівність трикутника*. А саме: для будь-яких точок *A, B, C* площини $AB \le BC + CA$. У випадку, коли *A, B, C* є вершинами трикутника, нерівність стає строгою. Вже навіть така найпростіша властивість дає змогу розв'язувати змістовні задачі.

Задача 18.1. (7-8). У трикутнику довжини двох сторін відповідно дорівнюють 3,14 та 0,67. Знайти довжину третьої сторони, якщо відомо, що вона виражається цілим числом.

Розв'язання. Якщо ця довжина дорівнює a, то $3{,}14 - 0{,}67 < a < 3{,}14 + 0{,}67$. А отже, $a = 3$.

Задача 18.2. (8-9). Доведіть, що для сторін довільного трикутника виконується нерівність $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$.

Розв'язання. Оскільки $0 < a < b + c$, $0 < b < c + a$, $0 < c < a + b$, то $a^2 < a(b + c)$, $b^2 < b(a + c)$, $c^2 < c(a + b)$. Залишається лише додати три останні нерівності.



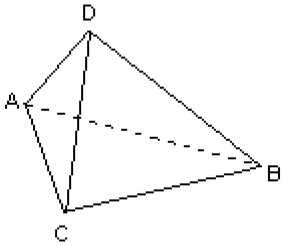
Мал.73

Задача 18.3. (8-9). На площині взяли довільний трикутник *ABC* і коло радіуса 1. Довести, що на колі знайдеться точка, сума відстаней від якої до вершин трикутника не менша 3.

Розв'язання. Нехай *M* та *N* – дві діаметрально протилежні точки на колі (див. мал. 73). Тоді $MN = 2$. А отже, $MA + AN \ge 2$, $MB + BN \ge 2$, $MC + CN \ge 2$. Додавши ці нерівності, одержимо $(MA + MB + MC) + (AN + BN + CN) \ge 6$. А тому, принаймні в одних дужках сума не менша від 3.

Подібна ідея використовується і під час розв'язування наступної стереометричної задачі.

Задача 18.4. (9-10). Доведіть, що у довільному тетраедрі знайдеться така вершина, щоб із ребер, які виходять з неї, можна було скласти трикутник.



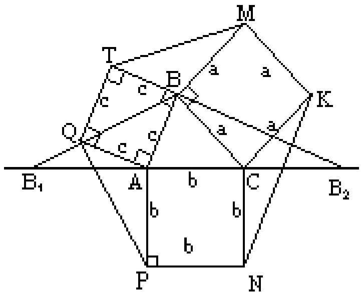
Мал.74

Розв'язання. Нехай для конкретності *AB* – найбільше ребро тетраедра *ABCD* (див. мал. 74). Тоді $(AD + AC - AB) + (BD + BC - BA) = (AD + BD - AB) + \quad + (AC + BC - AB) > 0$. А отже, принаймні одна з нерівностей $AD + AC > AB$ чи $BD + BC > BA$ виконується. Оскільки *AB* – найбільше ребро, то або вершина *A*, або вершина *B* є шуканою.

А тепер розглянемо дещо складніший приклад застосування нерівності трикутника.

Задача 18.5. (8-9). На сторонах трикутника *ABC* побудовано квадрати *BCKM*, *BAQT*, *ACNP* у зовнішній бік. Довести нерівності $5P_1 < 2P_2 < 6P_1$, де P_1 – периметр трикутника *ABC*, P_2 – периметр шестикутника *MKNPQT*.

Розв'язання. Нехай $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Очевидно (див. мал. 75), що $P_2 = P_1 + KN + PQ + TM < \; < P_1 + (a+b) + (b+c) + (c+a) = 3P_1$.



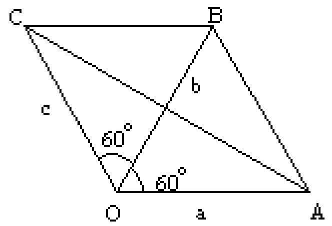
Мал.75

Отже, $2P_2 < 6P_1$. Для доведення нерівності $5P_1 < 2P_2$, достатньо довести нерівність $3P_1 < 2P_2 - 2P_1$, тобто $3P_1 < 2(KN + PQ + TM)$.

Для цього на прямій *AC* візьмемо точки B_1 та B_2 так, щоб $AB_1 = CB_2 = b$. Тоді $\Delta BAB_1 = \Delta QAP$, а $\Delta BCB_2 = \Delta KCN$ (за двома сторонами та кутом між ними). Отже, $BB_1 = PQ$, а $BB_2 = KN$. Із трикутника B_1BB_2: $BB_1 + BB_2 > B_1B_2$, а значить, $PQ + KN > 3b$. Аналогічно доводимо, що $TM + PQ > 3c$, $TM + KN > 3a$. Додавши останні три нерівності, одержуємо потрібну нерівність.

Нерівність трикутника може бути використана і для доведення алгебраїчних нерівностей. Наприклад.

Задача 18.6. (9-10). Довести, що для додатних чисел *a, b, c* виконується нерівність $\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq \sqrt{a^2 + ac + c^2}$.



Мал.76

Розв'язання. Відкладемо відрізки $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ так, щоб $\angle AOB = \angle BOC = 60°$. Тоді за теоремою косинусів $AB = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$, $BC = \sqrt{b^2 - bc + c^2}$, $AC = \sqrt{a^2 + ac + c^2}$. А отже, задана нерівність зводиться до очевидної: $AB + BC \geq AC$.

Зі сторонами трикутника можуть бути пов'язані і дещо складніші нерівності. Наприклад.

Задача 18.7. (9-10). Нехай *a, b, c* – сторони трикутника із периметром 1. Довести нерівність $\frac{1+a}{1-2a} + \frac{1+b}{1-2b} + \frac{1+c}{1-2c} > 6$.

Розв'язання. $1 - 2a = (a+b+c) - 2a = b + c - a > 0$. Аналогічно $1 - 2b > 0$, $1 - 2c > 0$. Отже, всі три дроби додатні. Нехай для визначеності *a* – найбільша зі сторін трикутника. Тоді $\frac{1}{3} \leq a < \frac{1}{2}$. Оскільки на цьому проміжку $1 + a$ зростає, $1 - 2a$ – спадає, то $\frac{1+a}{1-2a} \geq \frac{1+\frac{1}{3}}{1-2\cdot\frac{1}{3}} = 4$. Але $\frac{1+b}{1-2b} > 1$, $\frac{1+c}{1-2c} > 1$, тому задана нерівність виконується.

Відзначимо, що можна одержати і точнішу оцінку:

$$\frac{1+a}{1-2a}+\frac{1+b}{1-2b}+\frac{1+c}{1-2c}\geq 12.$$

Справді, зафіксуємо a і покладемо $b=d+x$, $c=d-x$. Розглянемо тепер різницю

$$\frac{1+b}{1-2b}+\frac{1+c}{1-2c}-\left(\frac{1+d}{1-2d}+\frac{1+d}{1-2d}\right).$$

Після нескладних спрощень, які пропонуємо читачам виконати самостійно, одержимо, що вона дорівнює

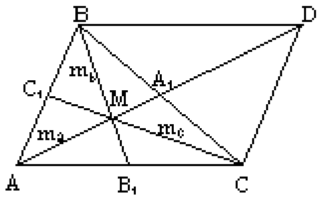
$$\frac{12x^2}{(1-2b)(1-2c)(1-2d)}\geq 0.$$

Таким чином, найменше значення заданої суми досягається при $b=c$, якщо a – фіксоване. Зрозуміло, що при цьому $a=b=c$, бо інакше, зафіксувавши, наприклад, c, ми могли б зменшити суму, взявши $a=b$. А отже,

$$\frac{1+a}{1-2a}+\frac{1+b}{1-2b}+\frac{1+c}{1-2c}\geq 3\cdot\frac{1+\frac{1}{3}}{1-2\cdot\frac{1}{3}}=12.$$

У нерівностях можуть фігурувати й інші елементи трикутника чи інших фігур.

Задача 18.8. (8-9). Довести, що в будь-якому трикутнику сума медіан $m_a+m_b+m_c$, більша $\frac{3}{4}$ периметра, але менша периметра.

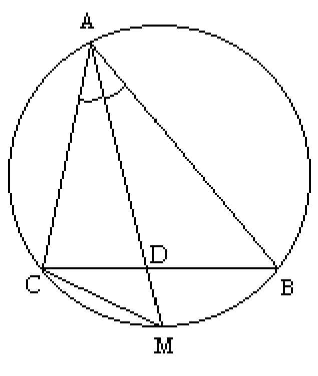


Мал.77

Розв'язання. Нехай для трикутника ABC точка D – симетрична до A відносно середини A_1 сторони AC (див. мал. 77).

Тоді $2m_a=AD<AB+BD=AB+AC=b+c$. Аналогічно доводимо, що $2m_b<a+c$, $2m_c<a+b$. Додавши ці нерівності, одержимо $m_a+m_b+m_c<a+b+c$.

В іншу сторону, якщо M – точка перетину медіан, то $AM+BM>AB$, $BM+CN>BC$, $AM+CM>AC$. Додаючи ці нерівності і враховуючи, що $AM=\frac{2}{3}m_a$, $BM=\frac{2}{3}m_b$, $CM=\frac{2}{3}m_c$,



Мал.78

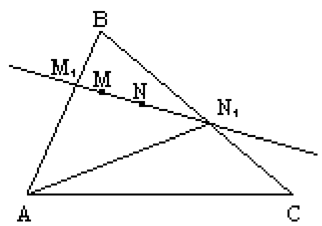
одержимо $\frac{4}{3}(m_a+m_b+m_c)>a+b+c$, звідки і випливає потрібна нерівність.

Задача 18.9. (9-10). Довести нерівність $l_a\leq\sqrt{p(p-a)}$, де l_a – бісектриса трикутника ABC, проведена до основи a, p – його півпериметр.

Розв'язання. Нехай продовження бісектриси *AD* перетинає описане навколо трикутника *ABC* коло в точці *M* (див. мал. 78). Тоді $AD \cdot DM = CD \cdot DB$. Оскільки $\Delta ABD \sim \Delta AMC$ (за двома рівними відповідними кутами), то $AB \cdot AC = AD \cdot AM = AD(AD + DM) = = AD^2 + BD \cdot DC$. Крім того, за властивістю бісектриси трикутника $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$, звідки $BD = \frac{ac}{b+c}$, $DC = \frac{ab}{b+c}$. Тоді знаходимо: $AD^2 = bc - \frac{bca^2}{(b+c)^2} = \frac{4p(p-a)bc}{(b+c)^2} \le p(p-a)$. Отже, $l_a = AD \le \sqrt{p(p-a)}$.

Використовуючи доведену нерівність, пропонуємо читачам довести, що $l_a^2 + l_b^2 + l_c^2 \le p^2$, а $l_a + l_b + l_c \le \sqrt{3}p$.

Задача 18.10. (8-9). Всередині трикутника *ABC* розташований відрізок *MN*. Довести, що його довжина не перевищує найбільшої сторони трикутника.



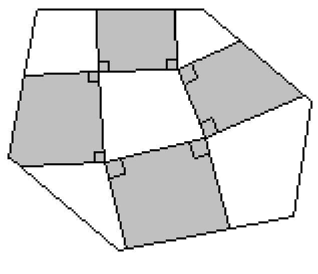
Мал.79

Розв'язання. Нехай пряма *MN*, що проходить через внутрішні точки *M, N* трикутника *ABC*, перетинає сторони в точках M_1 та N_1 причому для визначеності візьмемо, що M_1 лежить на *AB*, N_1 – на *BC* (див. мал. 79). Зрозуміло, що $MN \le M_1N_1$. З двох кутів AM_1N_1 та BM_1N_1 принаймні один не менший за 90°. А тому $M_1N_1 \le AN_1$ або $M_1N_1 \le BN_1 \le BC$. Аналогічно, з кутів BN_1A та CN_1A принаймні один не менший за 90°. Отже, $AN_1 \le AB$ або $AN_1 \le AC$.

Таким чином, *MN* не перевищує довжини принаймні однієї, отже, і найбільшої сторони трикутника *ABC*.

Узагальнюючи задачу 18.10, приходимо до такого твердження: довжина відрізка всередині опуклого многокутника не перевищує довжини найбільшої сторони або найбільшої діагоналі цього многокутника.

Відзначимо також, що якщо всередині опуклого многокутника лежить інший опуклий многокутник, то периметр P_2 зовнішнього многокутника не менший, ніж периметр P_1 внутрішнього.


Мал.80

Справді, побудуємо на сторонах внутрішнього многокутника півсмуги, паралельні сторони яких перпендикулярні до відповідних сторін цього многокутника (див. мал. 80). Якщо *P* – та частина периметра зовнішнього многокутника, яка знаходиться всередині цих півсмуг, то, очевидно, справджуються нерівності $P_1 \le P$ та $P_2 \ge P$. А тому $P_2 \ge P_1$.

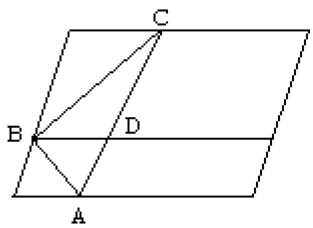
Крім лінійних елементів у нерівності можуть входити кути та площі фігур. Зокрема, досить очевидним є твердження, що площа трикутника не перевищує половини добутку будь-яких двох його сторін:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin\angle A \le \frac{1}{2} AB \cdot AC .$$

Задача 18.11. (9-10). Площа трикутника зі сторонами $a \le b \le c$ дорівнює 1. Довести, що $b \ge \sqrt{2}$.

Розв'язання. Оскільки $2 = 2S = ab\sin\angle C \le ab \le b^2$, то $b \ge \sqrt{2}$.

Іншою формулою для площі трикутника користуємося при розв'язуванні наступної задачі.



Мал.81

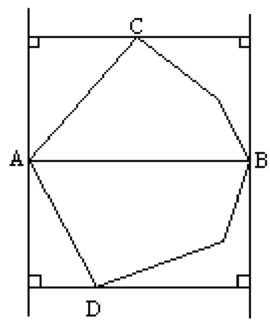
Задача 18.12. (9-10). Довести, що площа трикутника, вершини якого лежать на сторонах паралелограма, не перевищує половини площі паралелограма.

Розв'язання. Якщо дві вершини трикутника лежать на одній стороні паралелограма, то його основа і висота не перевищують відповідно сторони і висоти паралелограма. Отже, твердження задачі в цьому випадку справедливе. Якщо ж усі вершини трикутника лежать на різних сторонах паралелограма (див. мал. 81), то знайдуться дві вершини, наприклад *A* і *C*, які лежать на протилежних сторонах. Проведемо тоді через *B* пряму, паралельну основі паралелограма. В результаті трикутник *ABC* розіб'ється на два трикутники *BCD* та *ABD*, спільна основа *BD* яких лежить на одній стороні відповідних паралелограмів. Тому приходимо до вже розглянутого випадку.

Читачам пропонуємо довести своєрідне обернене твердження: площа паралелограма, який лежить всередині трикутника, не перевищує половини площі цього трикутника.

Цікаво також, що будь-який опуклий многокутник площі *S* можна помістити у прямокутник, площа якого не перевищує 2*S*.

Справді, нехай *AB* – найбільша діагональ чи сторона такого многокутника (див. мал. 82).



Мал.82

Проведемо через *A* та *B* прямі, перпендикулярні до *AB* і розглянемо перпендикулярні до них прямі, які мають із заданим многокутником лише одну спільну точку (відповідно точки *C* та *D*) або цілу сторону (наприклад *AB*, якщо *AB* – сторона многокутника; тоді точку *C* чи *D* візьмемо на цій стороні). Ці чотири прямі обмежують прямокутник, площа якого $S_0 = 2S_{\Delta ACB} + 2S_{\Delta ADB} \le 2S$, де S – площа заданого опуклого многокутника.

Задача 18.13.. (9-10). Довести нерівність $S \le \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$, де *S* – площа трикутника, *p* – його півпериметр.

Розв'язання. Із формули Герона маємо:

$$\frac{S^2}{p} = (p-a)(p-b)(p-c) \le \left(\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\right)^3 = \frac{p^3}{27}.$$

Тут ми скористалися відомою нерівністю Коші між середнім арифметичним і середнім геометричним кількох додатних чисел $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$. Звідси і випливає потрібна нерівність.

Відзначимо, що для доведення окремих нерівностей як допоміжний засіб може використовуватися площа. Наприклад.

Задача 18.14. (9-10). Довести, що $h_a + h_b + h_c \ge 9r$, де h_a, h_b, h_c – висоти трикутника, а r – радіус вписаного в нього кола.

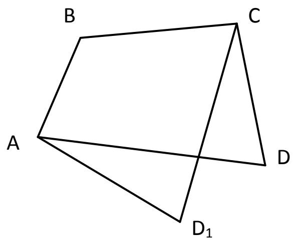
Розв'язання. Оскільки $ah_a = 2S = r(a+b+c)$, то $h_a = r\left(1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right)$. Аналогічно знаходимо $h_b = r\left(1 + \frac{a}{b} + \frac{c}{b}\right)$, $h_c = r\left(1 + \frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right)$. Звідси

$$h_a + h_b + h_c = r\left(3 + \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right)\right) \ge 9r,$$

бо для додатних чисел x, y завжди $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \ge 2$.

Зауважимо, що іноді потрібну нерівність не вдається довести безпосередньо, але подібна до неї нерівність є очевидною. Цим також часто можна скористатись.

Задача 18.15. (9-10). Доведіть, що площа довільного опуклого чотирикутника не перевищує півсуми добутків протилежних сторін.



Мал. 83

Розв'язання. Побудуємо точку D_1 так, щоб $AD_1 = CD$, $CD_1 = AD$ (див. мал. 83). Тоді $S_{ABCD} = S_{ABCD_1} = S_{\Delta ABD_1} + S_{\Delta BCD_1} \le \frac{1}{2} AB \cdot AD_1 + \frac{1}{2} BC \cdot CD_1 = \frac{1}{2}(AB \cdot CD + BC \cdot AD)$, що й треба було довести.

Вправи до § 18

1. (8-9). a, b, c – довжини сторін трикутника. Доведіть, що $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{a+c}$ теж можуть чисельно дорівнювати довжинам сторін деякого трикутника.
2. (8-9). Додатні числа a, b, c задовольняють нерівність $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ac)$. Чи обов'язково існує трикутник з довжинами сторін a,b,c ?
3. (9-10). Доведіть, що для довжин сторін трикутника виконуються нерівності: а) $a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \le 3abc$,

   б) $3(ab+bc+ca) \le (a+b+c)^2 < 4(ab+bc+ca)$.
4. (9-10). Доведіть, що у довільному трикутнику $9r \le h_a + h_b + h_c \le a+b+c$ де h_a, h_b, h_c – висоти, r – радіус вписаного кола.

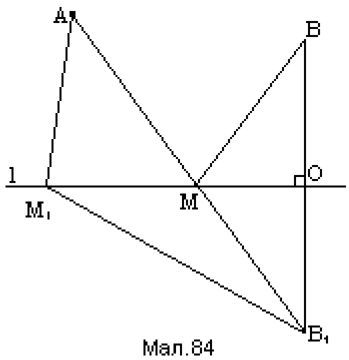
5. (9-10). Доведіть, що довжини медіан і бісектрис трикутника задовольняють нерівності: а) $m_a + m_b + m_c \le \frac{9R}{2}$; б) $l_a + l_b + l_c \le \sqrt{3} \cdot p$, де R – радіус описаного кола, p – півпериметр трикутника.
6. (9-10). Доведіть, що для радіусів вписаного і описаного навколо трикутника ABC кіл виконується нерівність $R \ge 2r$.
7. (9-10). Доведіть, що для довільного трикутника ABC $(AB+AC)^2 \ge BC^2 + 4h_a^2$. Для яких трикутників досягається рівність?
8. (9-10). Бісектриса кута A трикутника ABC продовжена до перетину з описаним навколо цього трикутника колом у точці D. Доведіть, що $AB + AC \le 2 \cdot AD$.
9. (9-10). Доведіть з допомогою геометрії, що $(a+c)(b+d) \le \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{c^2+d^2} + \sqrt{a^2+d^2} \cdot \sqrt{c^2+b^2}$.

10. (8-9). Доведіть, що сума довжин діагоналей опуклого п'ятикутника більша від периметра, але менша подвоєного периметра цього п'ятикутника .
11. (9-10). Діагоналі опуклого п'ятикутника відтинають від нього 5 трикутників. Доведіть, що сума площ цих трикутників більша за площу п'ятикутника.
12. (9-10). Доведіть, що для довільного трикутника ABC зі сторонами a, b, c та площею S виконується нерівність $ab + bc + ca \ge 6S$
13. (9-11). Всередині трикутника ABC взяли точку M. Доведіть, що $4S \le AM \cdot BC + BM \cdot AC + CM \cdot AB$, де $S -$ площа цього трикутника.
14. (9-11). Дано квадрат $ABCD$ і точка M всередині нього. Доведіть, що $135° \le \angle MAB + \angle MBC + \angle MCD + \angle MDA \le 225°$.
15. (10-11). Сума плоских кутів при вершині піраміди більша 180^0. Доведіть, що кожне з бічних ребер менше півпериметра основи.

§ 19. Задачі на найбільше та найменше значення і принцип крайнього

Із геометричними нерівностями тісно пов'язані задачі на найбільше та найменше значення. Адже в таких задачах необхідно довести відповідну нерівність довести, що вона може за певних умов перетворюватися в рівність.

Задача 19.1. (8-10). Задана пряма і дві точки *A* та *B* з однієї сторони від неї. Знайти на прямій таку точку *M*, щоб сума відстаней $AM + BM$ була найменшою.



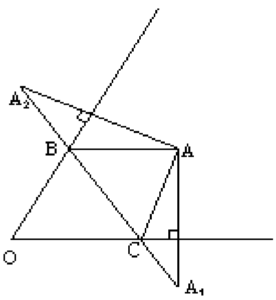
Мал.84

Розв'язання. Нехай точка B_1 симетрична до *B* відносно даної прямої l, а відрізок AB_1 перетинає пряму l в точці *M* (див. мал. 84).

Тоді $AM + BM = AM + MB_1 = AB_1$. Оскільки для всякої іншої точки M_1 цієї прямої $AM_1 + M_1B = AM_1 + M_1B_1 > AB_1$, то точка *M* – шукана.

Аналогічна ідея використовується і для розв'язування дещо складнішої задачі.

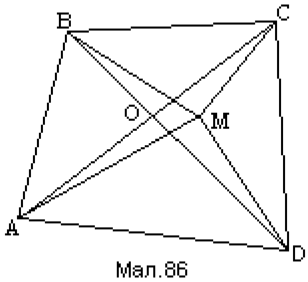
Задача 19.2. (8-10). Точка *A* лежить всередині гострого кута *O*. Побудувати на сторонах цього кута такі точки *B* та *C*, щоб периметр трикутника *ABC* був найменшим.



Мал.85

Розв'язання. Побудуємо точки A_1 і A_2, які є симетричними до точки *A* відносно сторін кута (див. мал. 85). Тоді $AB + BC + CA = BA_2 + BC + CA_1 = A_1A_2$ (обґрунтуйте, що *B* та *C* лежать на A_1A_2). Зрозуміло, що для довільних інших точок B_1 та C_1 одержимо, що $AB_1 + B_1C_1 + C_1A = A_2B_1 + B_1C_1 + C_1A_1 > A_1A_2$, бо довжина ламаної більша довжини відрізка, який з'єднує її кінці (доведіть це!).

Нерівність трикутника приходить на допомогу і при розв'язуванні наступної задачі.



Мал.86

Задача 19.3. (8-9). В опуклому чотирикутнику знайти таку точку, сума відстаней від якої до вершин чотирикутника є найменшою.

Розв'язання. Нехай *O* – точка перетину діагоналей чотирикутника *ABCD*, *M* – довільна інша точка площини (див. мал86). Тоді $AM + MC \geq AC$, $BM + DM \geq BD$. А отже, $AM + BM + CM + DM \geq AC + BD = AO + BO + CO + DO$. Тому точка *O* є шуканою.

Відзначимо також, що подібну ідею з додаванням нерівностей, одержаних з нерівності трикутника, ми використали при розв'язуванні задач 18.2, 18.5.

Багато задач на екстремуми пов'язані з поняттям площі. Цілком очевидно, що з усіх трикутників із заданими сторонами *AB* та *AC* найбільшу площу має прямокутний трикутник з прямим кутом *A* (Доведіть це!). А ось дещо складніші приклади.

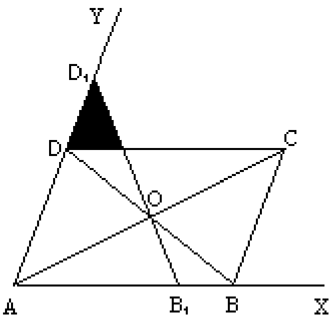
Задача 19.4. (9-10). Найдовша сторона трикутника має довжину 3 см, а найкоротша – 2 см. Яку найбільшу площу може мати такий трикутник?

Розв'язання. Оскільки середня по довжині сторона не перевищує 3 см, то найбільша площа буде у трикутника зі сторонами 3 см, 3 см та 2 см. Легко порахувати, що для нього $S = 2\sqrt{2}$ см^2.

Задача 19.5. (9-10). Довести, що серед усіх трикутників з фіксованим півпериметром *p* найбільшу площу має правильний трикутник.

Розв'язання. За результатом задачі 18.13 $S \le \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$. При доведенні цієї нерівності ми скористалися нерівністю Коші, про яку відомо, що вона перетворюється в рівність лише при $a_1 = a_2 = ... = a_n$. Таким чином, $S = \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$ лише при $p-a = p-b = p-c$, тобто при $a = b = c$.

Задача 19.6. (9-10). Дано плоский кут *XAY* і точку *O* всередині нього. Провести через точку *O* пряму, яка відтинає від цього кута трикутник найменшої площі.



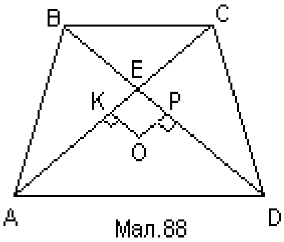
Мал.87

Розв'язання. Побудуємо на сторонах даного кута паралелограм *ABCD* так, щоб точка *O* була точкою перетину діагоналей (див. задачу 14.6). Тоді пряма *BD* буде шуканою.

Справді, будь-яка пряма B_1D_1, яка проходить через точку *O*, ділить паралелограм *ABCD* на дві рівні, а отже, і рівновеликі фігури. Трикутник AB_1D_1 складається з однієї з цих фігур і ще з деякого трикутника (на мал. 87 – заштрихованого). Тому шукане положення прямої B_1D_1 – те, при якому цей останній трикутник має найменшу площу або вироджується в точку, тобто – при співпаданні прямої B_1D_1 з *BD*.

Низка екстремальних властивостей многокутників пов'язана із вписаним або описаним колом.

Задача 19.7. (9-10). Трапеція з основами AD і BC вписана в коло з центром *O*. *E* – точка перетину її діагоналей. Якого найбільшого значення може набувати вираз $\frac{AD-BC}{OE}$?



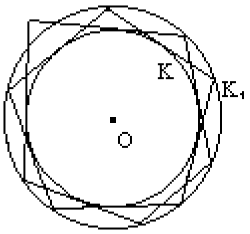
Мал.88

Розв'язання. Нехай $AD > BC$, *K* та *P* – середини діагоналей AC та BD (див. мал. 88). На основі задачі 14.2 маємо $AD - BC = 2KP$. Коло, описане навколо $ABCD$ співпадає з колами, описаними навколо ABD та ACD. Тому $OK \perp AC$, $OP \perp BD$, отже, навколо $KEPO$ можна описати коло з діаметром OE. Зрозуміло, що тоді $\frac{KP}{OE} \le 1$. Рівність досягається, якщо KP є також діаметром, тобто $\angle KEP = 90°$. Оскільки вписана в коло трапеція є рівнобічною, то її діагоналі утворюють з основами кути в $45°$! У такому разі одержуємо найбільше значення відношення $\frac{AD-BC}{OE} = 2$.

Задача 19.8. (9-10). Серед всіх многокутників, вписаних в задане коло, знайти той, який має найбільшу суму квадратів довжин сторін.

Розв'язання. Зауважимо, що якщо в трикутнику ABC $\angle B \geq 90°$, то за теоремою косинусів $AC^2 \geq AB^2 + BC^2$. Тому, якщо у многокутнику є негострий кут, то, відкинувши вершину з цим кутом, одержимо многокутник з не меншою сумою квадратів довжин сторін. Оскільки у будь-якому *n*-кутнику при $n \geq 3$ є негострий кут, то з допомогою подібних операцій приходимо до трикутника. Для нього маємо $a^2 + b^2 + c^2 = 4R^2(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma)$, що легко випливає з теореми синусів. Оскільки на відрізку $[0;\pi]$ функція $\sin^2 x$ опукла вгору, то за нерівністю Єнсена одержимо $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma \leq 3\sin^2\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = \dfrac{9}{4}$. Отже, $a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$, причому рівність справджується лише при $\alpha = \beta = \gamma = 60°$. Тому шуканим є правильний трикутник.

Задача 19.9. (9-10). Довести, що серед всіх *n*-кутників, описаних навколо даного кола, найменшу площу та периметр має правильний *n*-кутник.

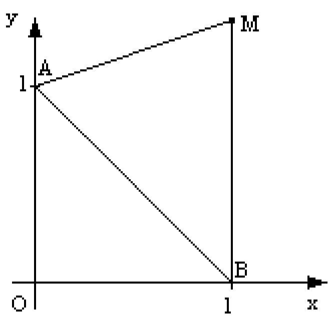


Мал.89

Розв'язання. Нехай неправильний n - кутник описаний навколо кола *К* (див. мал. 89). Опишемо навколо цього кола правильний *n*-кутник, вписаний у коло K_1. Оскільки дані кола концентричні, то хорди кола K_1, дотичні до *К*, відтинають від K_1 сегменти однакової площі. Аналогічні сегменти, одержані з допомогою сторін неправильного *n*-кутника (чи їх продовжень), можуть мати спільні внутрішні точки. Тому площа об'єднання таких сегментів для правильного *n*-кутника є більшою, ніж для неправильного. Отже, площа частини неправильного *n*-кутника, що міститься всередині K_1, більша, ніж площа правильного *n*-кутника. Тим більше, площа всього неправильного *n*-кутника буде більшою, ніж площа правильного.

Для периметрів твердження задачі випливає із доведеного для площ, оскільки периметр многокутника площі *S*, описаного навколо кола радіуса *R*, дорівнює $\dfrac{2S}{R}$. (Подумайте, чому?).

Зауважимо, що для вписаних *n*-кутників правильний *n*-кутник буде мати найбільші площу та периметр. Спробуйте довести це самостійно, наприклад, для $n = 3$ та $n = 4$. Можна скористатися, наприклад, принципом крайнього, довести, що у многогранника найбільшої площі (периметра) довжини сусідніх сторін мають бути однаковими. Але тоді і всі довжини теж будуть однаковими.



Мал.90

Екстремальні властивості геометричних фігур можна використовувати і для розв'язування алгебраїчних задач. Наприклад.

Задача 19.10. (8-9). Знайти найменше значення виразу

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2}\,.$$

Розв'язання. Нехай $A(0;1)$, $B(1,0)$, $M(x,y)$ (див. мал. 90). Тоді $\sqrt{x^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2} = \; = AM+BM \geq AB = \sqrt{2}$. Оскільки рівність досягається, якщо M лежить на відрізку AB, то найменше значення цього виразу дорівнює $\sqrt{2}$.

Існування екстремального значення може використовуватися і в дещо іншому аспекті. А саме, при розв'язуванні деяких задач буває корисним розглянути деякий "граничний" ("крайній") елемент, на якому певна величина набуває найбільшого чи найменшого значення. Такий метод розв'язування називають принципом крайнього.

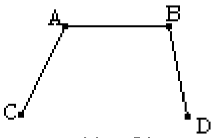
Саме такою ідеєю ми скористалися при розв'язуванні задач 18.4, 18.7. Дивись також розв'язання задачі 4.10.

А ось ще декілька прикладів.

Задача 19.11. (8-9). Довести, що якщо довжини всіх сторін трикутника менші 1, то його площа менша $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Розв'язання. Розглянемо найменший з кутів трикутника. Зрозуміло, що його величина не перевищує $60°$. А тому $S < \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Задача 19.12. (8-9). На площині розташовано декілька точок, усі попарні відстані між якими різні. Кожну з цих точок з'єднали з найближчою до неї точкою. Чи може при цьому утворитися замкнена ламана?



Мал.91

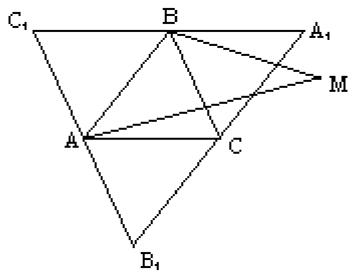
Розв'язання. Припустимо, що ламана виявилася замкненою (див. мал. 91). Нехай AB – найбільша її ланка, а AC та BD – сусідні з AB ланки. Оскільки $AC < AB$, то B не є найближчою до A. Аналогічно з $BD < AB$ випливає, що A не є найближчою до B. А тому точки A та B не могли бути з'єднані. Одержане протиріччя доводить, що замкнена ламана не могла утворитись.

Задача 19.13. (8-9). На рівній галявині росло 11 ялинок, всі попарні відстані між якими були різними. Під кожною ялинкою сидів заєць. Коли завив вовк, кожен із зайців перебіг до найближчої ялинки. Доведіть, що принаймні під однією ялинкою опинилося не менше двох зайців.

Розв'язання. Нехай A та B – дві найближчі між собою ялинки. Зрозуміло, що зайці, які були під ними, помінялися місцями. Якщо до однієї з цих ялинок прибіг ще один заєць, то твердження задачі доведене. Якщо ні, то ялинки A та B можна вилучити з розгляду. Міркуючи далі аналогічно, прийдемо вкінці до трьох ялинок. Зрозуміло, що заєць, який був під третьою обов'язково прибіжить або до першої, або другої ялинки, відстань між якими є найкоротшою.

Обґрунтуйте самостійно, що більше п'яти зайців зібратися під однією ялинкою не могло.

Задача 19.14. (9-10). На площині розташовано 2006 точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Площа довільного трикутника з вершинами у цих точках не перевищує 1. Довести, що всі ці точки можна накрити трикутником із площею 4.



Мал.92

Розв'язання. Виберемо з усіх трикутників з вершинами у даних точках трикутник найбільшої площі. Нехай таким є трикутник *ABC*: $S_{\Delta ABC} \le 1$ (див. мал. 92). Проведемо через вершини цього трикутника прямі, паралельні його протилежним сторонам. Ці прямі обмежують трикутник $A_1B_1C_1$, площа якого $S_{\Delta A_1B_1C_1} = 4S_{\Delta ABC} \le 4$ (доведіть це самостійно). Припустимо, що деяка із заданих точок лежить поза трикутником $A_1B_1C_1$. Тоді ця точка і принаймні одна зі сторін трикутника *ABC* лежатимуть по різні боки від паралельної цій стороні сторони трикутника $A_1B_1C_1$. Нехай для визначеності такою є точка *M*. Оскільки у трикутниках *ABC* та *ABM* основа *AB* спільна, а висота, опущена з *M* на *AB*, більша за висоту, опущену з *C*, то $S_{\Delta ABM} > S_{\Delta ABC}$, що суперечить вибору трикутника *ABC* як найбільшого. Отже, всі 2006 точок знаходяться у трикутнику $A_1B_1C_1$ з площею $S \le 4$. Зрозуміло всі ці точки помістяться і в деякому трикутнику з площею $S = 4$.

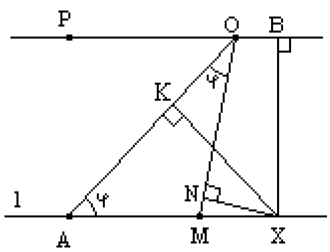
Звертаємо увагу читачів на зв'язок принципу крайнього з міркуваннями від супротивного. Відзначимо також його зв'язок з принципом Діріхле.

Задача 19.15. (8-9). Всередині круга радіуса 1 лежать 8 точок. Довести, що відстань між деякими двома із цих точок менша 1.

Розв'язання. Принаймні 7 точок не співпадають з центром даного круга. Тому найменший з кутів A_kOA_n, де A_k та A_n – дані точки, не перевищує $\frac{360°}{7} < 60°$. Якщо точки *A* та *B* відповідають найменшому куту, то $AB < 1$, бо в трикутнику *AOB* маємо $AO \le 1$, $BO \le 1$, а кут *AOB* не є в ньому найбільшим.

Зауважимо, що для 7 точок можна довести наявність двох із них, відстань між якими не більша 1. Це можна зробити як у задачі 19.15, або розбивши круг на 6 однакових секторів із кутом 60° і встановивши, що принаймні в одному з них міститься не менше двох таких точок. А тоді відстань між ними не більша 1. Продумайте деталі самостійно.

Принцип крайнього може використовуватися і у випадку відсутності "крайніх" елементів.

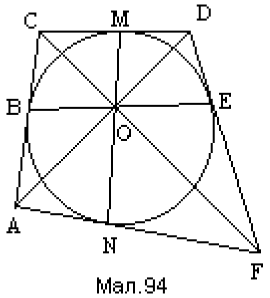


Мал.93

Задача 19.16. (10-11). Задана пряма *l*, точка *A* на ній і точка *O* поза прямою, причому пряма *OA* не перпендикулярна до *l* . Розглядаються всі кути з вершиною *O*, сторони яких перетинають *l*, а бісектриси – співпадають з променем *OA*. Довести, що на прямій *l* не існує такої точки, добуток відстаней від якої до прямих, на яких лежать сторони цих кутів, не залежав би від величини кута.

Розв'язання. Проведемо пряму $PO || l$ (див. мал. 93). На прямій *l* візьмемо точку *M* так, щоб $\angle AOM = \angle POA$. Зрозуміло, що всі кути з вершиною *O* і бісектрисою *OA*, сторони яких перетинають *l*, знаходяться всередині кута *POM*. Шукана точка не може бути лівіше від *A* та між *A* і *M*, бо в такому випадку через неї пройшла би сторона деякого кута і добуток відстаней виявився б нулем, що невірно для інших кутів. Так само доведеться відкинути і самі точки *A* та *M* , оскільки при підході до них точок перетину сторін кута з *l* такий добуток наближається до нуля. Отже, залишається розглянути випадок, коли *X* лежить правіше від *M* (як на малюнку). Оскільки відстані від *X* до кожної з прямих, які містять сторони кута з вершиною *O*, неперервно залежить від величини цього кута , то вказані добутки повинні зберігатися сталими і для граничних положень сторін кутів *POM* та *AOA*. Тому, якщо $XK \perp OA$, $XN \perp OM$, $XB \perp PO$, то повинна виконуватись рівність $XN \cdot XB = XK^2$. Нехай $AX = x$, $\angle AOM = \varphi$, $XB = h$. Тоді $XK = \sin\varphi$, $AM = OM = \dfrac{h}{\sin 2\varphi}$, $XN = MX \cdot \sin 2\varphi = \left(x - \dfrac{h}{\sin 2\varphi}\right)\sin 2\varphi = x\sin 2\varphi - h$. Отже, одержуємо рівняння $(x\sin 2\varphi - h)h = x^2 \sin^2\varphi$. Його дискримінант $D = h^2(\sin^2 2\varphi - 4\sin^2\varphi) = \ = 4h^2\sin^2\varphi(\cos^2\varphi - 1) \le 0$, причому $D = 0$ лише при $h = 0$, тобто при $\varphi = 0$. А тому шуканої точки *X* на прямій *l* не існує.

Пропонуємо читачам переконатися у її відсутності і у випадку, коли $OA \perp l$.



Мал.94

Відзначимо також, що такі крайні (“вироджені”) випадки зручно використовувати і при розв’язуванні інших задач. Наприклад, знаючи, що діагоналі *AD, BE, CF* описаного шестикутника перетинаються в одній точці (теорема Бріаншона), легко довести, що діагоналі описаного чотирикутника та відрізки, які з’єднують точки дотику вписаного кола до протилежних сторін, перетинаються в одній точці. Справді (див. мал. 94), чотирикутник *ACDF* можна розглядати як вироджений шестикутник *ABCDEF*. А тому *BE* пройде через точку *O* перетину діагоналей *AD* та *CF*. Аналогічно доводиться для відрізка *MN*.

Пропонуємо читачам самостійно проаналізувати випадки, коли у теоремі Бріаншона описаний шестикутник вироджується у п’ятикутник чи трикутник.

Вправи до § 19

1. (8-9). Точки *A* та *B* знаходяться в різних півплощинах відносно прямої l. Знайдіть на цій прямій таку точку *M*, щоб величина $|AM - BM|$ була найменшою.
2. (8-9). На прямій задані точки *A* та *B*. Знайдіть на цій прямій таку точку *P*, для якої вираз $\dfrac{1}{1+AP} + \dfrac{1}{1+BP}$ досягає свого найбільшого значення.
3. (8-9). Чотири села розташовані у вершинах квадрата. Побудуйте сітку доріг, яка з’єднує ці села так, щоб загальна довжина цих доріг була найменшою. Чи може така сітка включати менше п’яти прямолінійних відрізків?
4. (9-10). Дано пряму l і точки *A* та *B* поза нею. Знайдіть на l таку точку *M*, для якої $AM^2 + BM^2$ набуває найменшого значення.
5. (9-10). Через задану точку всередині кола проведіть хорду найменшої довжини.
6. (9-10). У півкруг радіуса *R* вписана трапеція *ABCD* так, що основа *AD* є діаметром, а вершини *B* і *C* лежать на колі. При якому куті при основі периметр трапеції буде найбільшим?
7. (9-10). На стороні кута з вершиною *A* задана точка *B*. Побудуйте на іншій стороні цього кута таку точку *C*, щоб радіус кола, описаного навколо трикутника *ABC*, був найменшим.
8. (9-10). На одній стороні кута задані дві точки *A* та *B*. Побудуйте на іншій стороні цього кута таку точку *C*, щоб кут *ACB* був найбільшим.

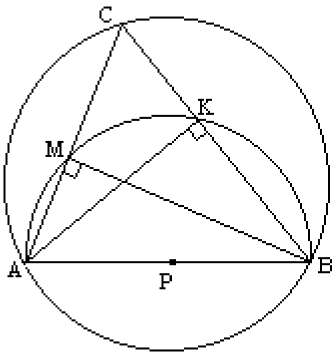
9. (9-10). На гіпотенузі *AB* прямокутного трикутника *ABC* взяли точку *X*. Точки *M* та *N* – її проекції на катети. При якому положенні точки *X*: а) довжина відрізка *MN* є найменшою; б) площа чотирикутника *CMXN* є найбільшою?
10. (9-10). Яку найбільшу та яку найменшу площу може мати правильний трикутник, вписаний: а) у квадрат зі стороною a; б) у правильний шестикутник зі стороною a ?
11. (8-9). У трикутнику дві сторони дорівнюють a та b. Якою має бути третя сторона, щоб: а) найменший кут цього трикутника мав найбільшу величину; б) найбільший кут мав найменшу величину?
12. (8-9). На яку найменшу кількість рівнобедрених трикутників можна розрізати трикутник із кутами $15°$, $60°$, $105°$?
13. (8-9). На прямій задано скінченне число відрізків, кожні два з яких мають спільну точку. Доведіть, що існує точка, яка належить всім цим відрізкам.
14. (9-10). На площині задано 2004 різні точки, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Доведіть, що знайдуться такі три з цих точок, що всередині кола, проведеного через них, немає жодної із заданих точок.
15. (9-10). Знайдіть довжину найкоротшого шляху по поверхні куба, який з’єднує дві його найбільш віддалені вершини, якщо ребро куба дорівнює a.

§ 20. Геометричні інваріанти

У процесі розв'язування більшості геометричних задач встановлюються факти, характерні для цілого класу фігур та відношень між ними. Такі факти називаються інваріантами (від латинського invariantis – незмінний). Власне, усю геометрію можна розглядати як вчення про інваріанти рівних і подібних фігур.

Часто, як наприклад, у задачі 16.10, інваріант має вираження у формі числа. Розглянемо декілька інших аналогічних прикладів.

Задача 20.1. (9-10). Вершини A і B вписаних в одне і те ж коло трикутників ABC зафіксовано. Довести, що відстань між основами K, M висот, проведених з вершин A і B, не залежить від положення вершини C.



Мал.95

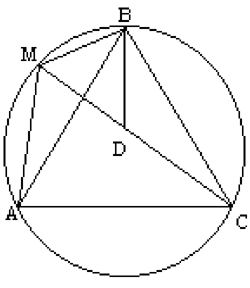
Розв'язання. Оскільки (див. мал. 95) $\angle AMB = \angle AKB = 90°$, то точки K, M лежать на колі з діаметром AB, причому з однієї сторони від нього. Далі маємо: $\cup AK = 2 \cdot \angle B$, $\cup MB = 2 \cdot \angle A$. Тому

$$\cup MK = \cup AK + \cup MB - \cup AB =$$

$$= 2(\angle A + \angle B) - 180° = 2(180° - \angle C) -$$

$$-180° = 180° - 2 \cdot \angle C.$$

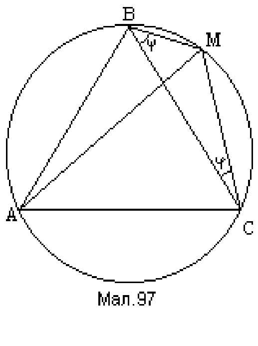
А оскільки величина кута *C* залишається сталою, то і $\cup MK$, а з нею і хорда *MK* не змінюється, якщо *C* рухається по верхній дузі *AB*. Аналогічно розглядається випадок, коли C' рухається по нижній дузі *AB*, де $\angle C' \geq 90°$. У такому випадку одержимо $\cup M'K' = 2 \cdot \angle C' - 180°$. Оскільки $\cup M'K' - \cup MK = 2(\angle C' + \angle C) - 360° = 0$, то відстань *MK* є сталою для довільного положення третьої вершини *C* на колі.



Мал.96

Задача 20.2. (9-10). Правильний трикутник *ABC* вписаний в коло. Довести, що відстань від довільної точки *M* на цьому колі до однієї з вершин трикутника дорівнює сумі відстаней до двох інших його вершин.

Розв'язання. Нехай точка *M* (див. мал. 96) лежить на дузі *AB*. Візьмемо на *MC* точку *D* так, щоб $MD = MB$. Оскільки $\cup BC = 120°$, то $\angle BMC = 60°$. А отже, ΔMBD – рівносторонній. Тоді $\angle MBA = \angle MBD - \angle ABD = 60° - \angle ABD = \angle ABC - \angle ABD = \angle DBC$. Тому $\Delta MBA = \Delta DBC$ (бо $MD = MB$, $AB = BC$, $\angle MBA = \angle DBC$). Звідси випливає, що $MA + MB = BD + DC = MD + DC = MC$, що й треба було довести.



Мал.97

Задача 20.3. (10-11). Правильний трикутник *ABC* вписано в коло. Довести, що сума квадратів відстаней від довільної точки *M* на колі до вершин трикутника не залежить від розташування точки *M*.

Розв'язання. Нехай точка *M* (див. мал. 97) лежить на дузі *BC*. Позначимо $\angle BCM = \varphi$, $\angle CBM = \psi$. Оскільки $\angle BMC = 120°$, то $\varphi + \psi = 60°$. Крім того, трикутники *AMC* та *BMC* вписані в одне і те ж коло, радіус якого позначимо через *R*. Тоді за наслідком з теореми синусів

$$AM = 2R\sin\angle ACM = 2R\sin(60^\circ + \varphi),$$

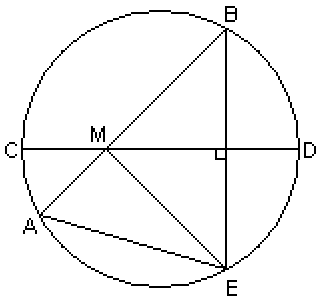
$$BM = 2R\sin\varphi,\ CM = 2R\sin\psi = 2R\sin(60^\circ - \varphi).$$

Отже,

$$AM^2 + BM^2 + CM^2 = 4R^2(\sin^2(60^\circ+\varphi) + \sin^2\varphi + \sin^2(60^\circ-\varphi) =$$

$$= 2R^2(3 - \cos(120^\circ + 2\varphi) - \cos 2\varphi - \cos(120^\circ - 2\varphi)) =$$

$$2R^2\left(3 + \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\varphi - \cos 2\varphi + \frac{1}{2}\cos 2\varphi - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\varphi\right) = 6R^2 = const.$$

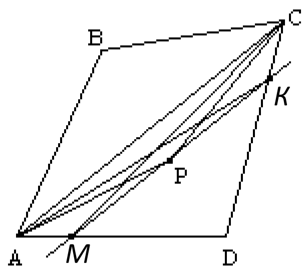


Мал.98

Задача 20.4. (9-10). У колі проведено діаметр *CD*. Хорда *AB* перетинає його у точці *M* під кутом 45°. Доведіть, що сума $AM^2 + BM^2$ не залежить від розташування точки *M* на діаметрі.

Розв'язання. Нехай *E* симетрична до точки *B* відносно діаметра *CD* (див. мал. 98). Тоді $AM^2 + BM^2 = AM^2 + EM^2 = AE^2$, оскіль-ки $\angle AME = 90^\circ$. Незалежно від розташування точки *M* вписаний кут *ABE* дорівнює 45°. Отже, довжина хорди *AE*, а з нею і сума $AM^2 + BM^2$, від розташування *M* не залежить.

В багатьох задачах інваріантами виступають площі фігур.

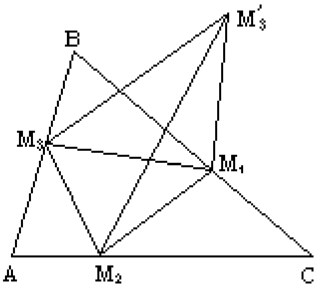


Мал.99

Задача 20.5. (9-10). На сторонах *CD* та *AD* опуклого чотирикутника *ABCD* існують відповідно точки *K* і *M*, для яких кожна із прямих *AK* та *CM* розтинає цей чотирикутник на дві частини рівної площі. Нехай P – довільна точка відрізка *KM*. Довести, що площа чотирикутника *ABCP* не залежить від положення точки *P*.

Розв'язання. Нехай (див. мал. 99) площа $S_{ABCD} = S$. Тоді $S_{ABCK} = S_{ABCM} = \frac{1}{2}S$. Віднімаючи від цих площ площу їх спільної частини – трикутника *ABC*, одержимо $S_{\Delta ACK} = S_{\Delta ACM}$. А оскільки в цих трикутниках основа *AC* спільна, то і висоти, опущені на неї, рівні. Отже, $MK \parallel AC$. Але в такому разі такою ж є і висота трикутника *APC*, опущена на *AC*. Тоді $S_{ABCP} = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta APC} = S_{ABCK} = \frac{1}{2}S = const$.

Задача 20.6. (9-10). Трикутник *ABC* розташований у площині α. На кожній із його сторін (не у вершинах) сидить по одній мусі. В деякий момент часу одна з мух переповзає площиною α вздовж прямої, паралельної прямій, на якій знаходяться нерухомо дві інші мухи. Після її зупинки аналогічне переповзання здійснює друга муха і т. д. Чи зможуть після кількох таких переміщень всі три мухи опинитися у вершинах трикутника *ABC*?



Мал.100

Розв'язання. Нехай мухи M_1 та M_2 нерухомі, а M_3 переповзла у положення M_3'. Оскільки за умовою $M_3M_3'||M_1M_2$, то $S_{\Delta M_1M_2M_3'} = S_{\Delta M_1M_2M_3}$. А отже, при вказаних переміщеннях площа трикутника з вершинами у місцях розташування мух не змінюється. Оскільки в початковій позиції $S_{\Delta M_1M_2M_3} < S_{\Delta ABC}$, то ніякими переміщеннями, описаними в умові задачі, мухам не вдасться опинитися у вершинах *A*, *B* та *C* одночасно.

Задача 20.7. Дано купу із 2001-го сірника. Двоє грають у наступну гру. Вони по черзі роблять такі ходи – вибирається довільна купа, що містить більше одного сірника і ділиться на дві менші. Гра продовжується, поки кожна купа не буде складатися з одного сірника. При кожному поділі купи на дві записується добуток сірників в отриманих двох нових купах. Мета гравця, що ходить першим, зіграти так, щоб сума всіх записаних чисел ділилася на 1000. Чи може другий гравець йому завадити?

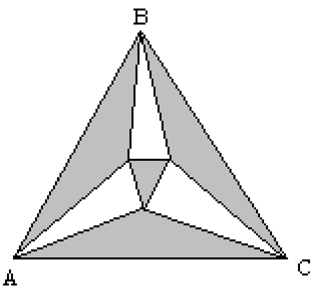
Розв'язання. Не зможе. Купі із n сірників поставимо у відповідність квадрат зі стороною n. Розбиття купи на m та k сірників інтерпретуємо як поділ цього квадрата на два квадрати зі сторонами m та k, і два прямокутники зі сторонами m та k. Один із цих прямокутників заштрихуємо. Його площа дорівнює числу mk, яке записують після здійснення ходу. При цьому кожен раз будемо заштриховувати саме той прямокутник, який лежить нижче діагоналі початкового квадрата. Після завершення гри заштрихованою виявиться площа $\frac{1}{2}\cdot 2001^2 - \frac{1}{2}\cdot 2001 = 1000\cdot 2001$ і вона не залежить від порядку зроблених ходів. Подумайте, чому.

Розв'язування окремих геометричних задач вдається звести до знаходження арифметичних інваріантів. Найпростішими серед них є парність та непарність. Дивись, наприклад, задачу 1.2.

Інший приклад інваріантів пов'язаний з подільністю.

Задача 20.8. (8-9). Для обшивки футбольного м'яча використано 12 латок – правильних п'ятикутників та 20 латок – правильних шестикутників. Скільки вершин виявилося на цій обшивці?

Розв'язання. Зауважимо, що у кожній вершині обшивки сходяться вершини рівно трьох латок (обгрунтуйте це!). Оскільки в усіх латках є $12\cdot 5 + 20\cdot 6 = 180$ вершин, то після ділення цієї суми на 3 одержимо 60 вершин обшивки.



Мал.101

До речі, оскільки з кожної вершини виходитимуть по 3 шви і кожний шов при цьому буде врахований двічі, то для обшивки м'яча необхідно зробити $\frac{60\cdot 3}{2} = 90$ швів.

Задача 20.9. (8-9). На малюнку 101 ви бачите трикутник ABC, розбитий на менші трикутники. При цьому із двох трикутників, які мають спільну сторону, один заштрихований, а інший – ні. Крім того, сторони AB, BC, CA є сторонами заштрихованих трикутників. Довести, що квадрат таким способом розбити на трикутники не вдасться.

Розв'язання. Припустимо, що це зробити можна і в результаті розбиття ми одержали n сторін заштрихованих трикутників та m сторін білих трикутників. Оскільки сторони квадрата є сторонами лише заштрихованих трикутників, а сторони білих трикутників є водночас і сторонами заштри-хованих, то $n-m=4$. Але це неможливо, бо числа n та m повинні ділитися на 3.

Пропонуємо читачам узагальнити цю задачу на випадок довільних многокутників.

Доведіть також, використовуючи подібне розмальовування, що якщо n-кутник можна розбити діагоналями, які не перетинаються між собою, на трикутники так, що кожна вершина n-кутника є вершиною непарного числа трикутників, то n ділиться на 3.

Наступна задача ілюструє використання більш складнішого розмальовування.

Задача 20.10. (8-9). Із 16 плиток розміром 1×3 та однієї плитки 1×1 склали квадрат зі стороною 7. Довести, що плитка 1×1 лежить або в центрі квадрата, або прилягає до його краю.

1	2	2	1	2	2	1
2	3	3	2	3	3	2
2	3	3	2	3	3	2
1	2	2	1	2	2	1
2	3	3	2	3	3	2
2	3	3	2	3	3	2
1	2	2	1	2	2	1

Мал.102

Розв'язання. Розмалюємо цей квадрат у три кольори, які на малюнку 102 позначені номерами. Плитка 1×3 може покривати 1 клітинку першого кольору та 2 клітинки другого кольору, або 1 клітинку другого кольору та 2 клітинки третього кольору. Якщо припустити, що всі клітинки першого кольору покриті плитками 1×3, то для цього використано 9 таких плиток. Решта 7 плиток 1×3 покривають 1 клітинку другого кольору та 2 клітинки третього кольору. Разом ці 16 плиток покривають $9\cdot2+7=25$ клітинок другого кольору. Одержали протиріччя, оскільки клітинок другого кольору є лише 24. А тому одна клітинка кольору 1 повинна покриватись плиткою 1×1.

Звичайно, що розв'язуючи олімпіадні задачі, читач зможе відкрити для себе і численні інші геометричні інваріанти. Деякі з них ми ще розглянемо у наступних параграфах.

Вправи до § 20

1. (9-10). Кути трикутника *ABC* дорівнюють відповідно $40°$, $60°$ та $80°$. Довжина сторони, яка лежить проти кута $60°$, дорівнює a. Знайдіть довжину відрізка, який з'єднує основи висот, проведених до двох інших сторін цього трикутника.
2. (9-10). Коло, радіус якого дорівнює висоті рівнобедреного трикутника, дотикається його основи і перетинає обидві бічні сторони. Доведіть, що відстань між точками перетину не залежить від розташування цих точок.
3. (9-10). З деякої точки кола, описаного навколо прямокутника, опущено перпендикуляри на діагоналі прямокутника. Доведіть, що відстань між основами цих перпендикулярів не залежить від розташування точки на колі.
4. (9-10). Доведіть, що в опуклому многокутнику, всі кути якого рівні, сума відстаней від довільної внутрішньої точки многокутника до його сторін є величина стала.

5. (9-10). Доведіть, що в рівнобедреному трикутнику сума відстаней від будь-якої точки M основи цього трикутника до бічних сторін не залежить від вибору точки M .
6. (9-10). Прямокутна карта міста повністю покрита другою прямокутною картою цього ж міста іншого масштабу так, що відповідні сторони карт паралельні. Доведіть, що їх можна проколоти голкою так, що точка проколу вкаже на обох картах один і той же пункт міста.
7. (10-11). Доведіть, що сума відстаней від довільної внутрішньої точки правильного тетраедра до його граней є величина стала.
8. (10-11). У рівносторонній трикутник ABC зі стороною a вписано коло. Доведіть, що сума $MA^2+MB^2+MC^2$ не залежить від вибору точки M на цьому колі. Знайдіть значення такої суми.
9. (10-11). Через центр O правильного трикутника ABC провели пряму, яка перетинає прямі AB, BC та CA відповідно у точках C_1, A_1 та B_1. Доведіть, що одне з чисел $\frac{1}{OA_1}$, $\frac{1}{OB_1}$, $\frac{1}{OC_1}$ дорівнює сумі двох інших.
10. (9-11). Дві хорди кола радіуса R взаємно перпендикулярні між собою. Доведіть, що сума квадратів відрізків цих хорд не залежить від точки їх перетину (теорема Архімеда). Чому дорівнює ця сума?
11. (9-11). Доведіть, що сума квадратів довжин двох взаємно перпендикулярних хорд, які проходять через фіксовану точку M всередині кола, не залежить від розташування цих хорд.
12. (9-11). Діаметр кола поділено на n рівних частин. Доведіть, що сума квадратів відстаней від довільної точки M на колі до точок поділу не залежить від M . Знайдіть цю відстань, якщо радіус кола дорівнює R .
13. (9-11). На площині задано n точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Двоє по черзі з'єднують точки відрізками, які не перетинаються, але можуть мати спільні кінці. Програє той, хто не може зробити хід за правилами. Першого разу виграв починаючий гру. Доведіть, що і наступного разу він також переможе.
14. (8-10). У квадраті взяли довільним чином 2006 точок так, що жодні три з них та вершин квадрата не лежать на одній прямій. Квадрат розрізали на трикутники з вершинами у цих точках чи у вершинах квадрата. Доведіть, що їх кількість не залежить від способу розрізання.
15. (9-11). Всередині опуклого чотирикутника лежить точка M . Її симетризували відносно середин сторін цього чотирикутника. Доведіть, що площа опуклого чотирикутника з вершинами в одержаних в результаті такої симетрії точках не залежить від розташування точки M .

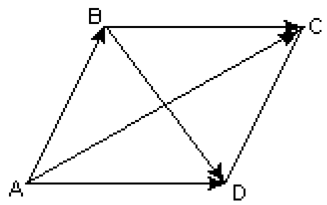
§ 21. Вектори та їх застосування. Центр мас

Ми вже зустрічали в цій книжці застосування векторів до розв'язування окремих задач. А зараз зупинимося на цих питаннях більш детально.

Насамперед відзначимо, що для довільних трьох точок A, B, C виконуються рівності

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}.$$

Два ненульових вектори називаються колінеарними, якщо їх напрями співпадають або протилежні. Необхідною і достатньою умовою колінеарності ненульових векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ є існування такого числа α, що $\vec{b}=\alpha\vec{a}$.



Мал.103

Для додавання двох неколінеарних векторів використовується правило паралелограма (див. мал. 103). Тут $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. Також

$\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}$.

Три точки A, B, C лежать на одній прямій, якщо існує таке число k, що $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}+(1-k)\overrightarrow{CB}$. Зокрема, точка C знаходиться на відрізку $[a,b]$, якщо $k\in[0,1]$. Якщо ця точка ділить відрізок AB у відношенні $AC:CB=m:n$, то для довільної точки X виконується рівність

$$\overrightarrow{XC}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{XA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB}.$$

При $m=n$ одержимо, що точка C – середина відрізка AB.

Три ненульових вектори називаються компланарними, якщо промені, які визначають напрями цих векторів, лежать на прямих, паралельних деякій площині. Якщо вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ не колінеарні, то будь-які компланарні з ними вектор $\vec{c}$ можна єдиним способом подати у вигляді $\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$. Таке представлення називають розкладом вектора $\vec{c}$ за векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

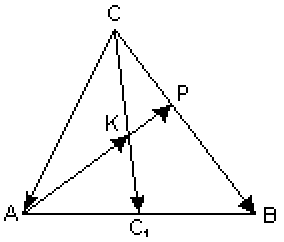
Зауважимо також, що чотири точки A, B, C, D лежатимуть в одній площині, якщо знайдуться такі числа k та l, що для довільної точки X виконується рівність

$$\overrightarrow{XD}=k\overrightarrow{XA}+l\overrightarrow{XB}+(1-k-l)\overrightarrow{XC}.$$

Зокрема, для точки M перетину медіан трикутника ABC одержимо $k=l=\frac{1}{3}$, тобто $\overrightarrow{XM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}\right)$. Доведіть цю рівність самостійно.

А зараз перейдемо до безпосереднього розв'язування задач.

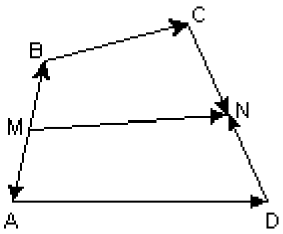
Задача 21.1. (8-9). Через середину K медіани CC_1 трикутника ABC проведена пряма AK, яка перетинає сторону BC у точці P. Доведіть, що $CP:PB=1:2$.



Мал.104

Розв'язання. Оскільки $P \in CB$ (див. мал. 104), то $\overrightarrow{CP} = \alpha\overrightarrow{CB}$. Також $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{AK}$. Отже, $\alpha\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{AK}$.

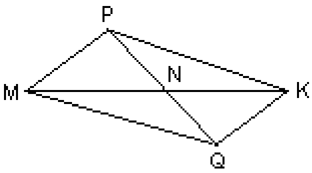
Але $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{CK} - \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CC_1} - \overrightarrow{CA} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right) - \overrightarrow{CA} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{CA}$. Тому одержимо $\alpha\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \beta\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{CB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{CA}\right)$, тобто $\left(\alpha - \frac{1}{4}\beta\right)\overrightarrow{CB} = \left(1 - \frac{3}{4}\beta\right)\overrightarrow{CA}$. Оскільки $\overrightarrow{CB}$ та $\overrightarrow{CA}$ не колінеарні, то $\alpha - \frac{1}{4}\beta = 1 - \frac{3}{4}\beta = 0$. Звідси знаходимо, що $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{4}{3}$. А отже, $CP : PB = 1 : 2$.



Мал.105

Розглянемо тепер довільний опуклий чотирикутник $ABCD$. Нехай M та N – відповідно середини сторін AB та CD. Тоді (див. мал. 105) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$ та $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$.

Додавши ці рівності, одержимо $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}\right)$. Відзначимо, що якщо $ABCD$ – паралелограм чи трапеція, з основами AD та BC, то також $MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$.



Мал.106

Доведемо, що і навпаки, з останньої рівності випливає паралельність сторін AD та BC. Для цього початки векторів $\overrightarrow{AD}$ та $\overrightarrow{BC}$ помістимо у точку M (див. мал. 106). При цьому їхні кінці опиняться у точках, які ми позначимо відповідно P та Q. Добудуємо трикутник MPQ до паралелограма $MPKQ$. Оскільки $MQ = PK,\ \ MP + PK = MK$ (подумайте, чому), то Q лежить на MK. Отже, вектори $\overrightarrow{MN}$ та $\overrightarrow{MQ}$ колінеарні, що й доводить паралельність AD та BC.

Іноді при застосуванні векторів буває доцільним скористатися методом групування.

Задача 21.2. (8-9). Доведіть, що для довільної точки M, яка лежить на колі, описаному навколо правильного $2n$-кутника A_1, A_2, ..., A_{2n}, довжина вектора $\vec{x} = \sum_{k=1}^{2n}\overrightarrow{MA_k}$ не залежить від розташування точки M на цьому колі.

Розв'язання. Згрупуємо дані вектори у пари таким чином: $\overrightarrow{MA_k} + \overrightarrow{MA_{n+k}}$, де $k = 1, ..., n$. Зауважимо, що A_k та A_{n+k} – дві діаметрально протилежні точки на колі. Тому, якщо N – діаметрально протилежна до точки M, то $\overrightarrow{MA_k} + \overrightarrow{MA_{n+k}} = \overrightarrow{MN}$ згідно правила паралелограма для додавання векторів. А отже, остаточно одержимо, що $\vec{x} = n\overrightarrow{MN}$. Зрозуміло, що його довжина дорівнює довжині n діаметрів цього кола, незалежно від розташування точки M на колі.

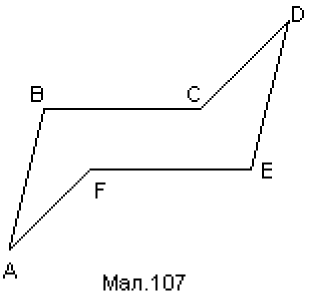
Зауважимо, що якщо сума деяких векторів дорівнює нулю, то із них може бути складена замкнута ламана. Використаємо цей факт для розв'язування наступної задачі.

Задача 21.3. (8-9). Доведіть, що можна побудувати трикутник, сторони якого дорівнюють медіанам заданого трикутника.

Розв'язання. Нехай A_1, B_1, C_1 – середини сторін BC, CA, AB трикутника ABC. Тоді $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA_1}\right)+\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB_1}\right)+\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC_1}\right)= \ =\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)=\vec{0}$, що й доводить можливість вказаної побудови.

Відзначимо, що при цьому ми попутно скористалися відповідним оберненим твердженням: якщо замкнута ламана (у даному випадку $ABCA$) складена з деяких векторів, то сума цих векторів дорівнює нулю. Проілюструємо застосування цього факту до дещо складніших прикладів.

Задача 21.4. (9-10). Доведіть, що якщо у замкнутій неплоскій ламаній із шести ланок протилежні ланки попарно паралельні, то їхні довжини попарно рівні.



Мал.107

Розв'язання. За умовою задачі $\overrightarrow{DE}=k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{EF}=l\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{FA}=m\overrightarrow{CD}$ (див. мал. 107). Оскільки $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FA}=\vec{0}$, то

$$(k+1)\overrightarrow{AB}+(l+1)\overrightarrow{BC}+(m+1)\overrightarrow{CD}=\vec{0}.$$

Але вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ – не компланарні (бо інакше ламана була би плоскою), тому $k+1=l+1=m+1=0$. Отже, $k=l=m=-1$. Звідси одержуємо $AB=DE$, $BC=EF$, $CD=AF$.

Задача 21.5. (9-10). Для кожної сторони многокутника побудували перпендикулярний до неї вектор з початком на даній стороні і кінцем зовні цього многокутника. Відомо, що довжина кожного вектора дорівнює довжині відповідної йому сторони. Чому дорівнює сума всіх побудованих векторів?

Розв'язання. Повернемо кожен вектор на $90°$ проти годинникової стрілки годинника. Оскільки при цьому довжини векторів не змінилися, то сума всіх векторів, одержаних при повороті, виявиться рівною сумі векторів, які утворюють замкнутий контур заданого многокутника, тобто дорівнюватиме нулю. Але тоді сума заданих векторів – це вектор, одержаний із нуль-вектора зворотнім поворотом на $90°$ за стрілкою годинника. Отже, вона теж дорівнює нулю.

Вектори можуть використовуватися і при обчисленнях, пов'язаних з довжинами відрізків.

Задача 21.6. Доведіть, що сума квадратів всіх сторін та всіх діагоналей правильного n-кутника, вписаного у коло радіуса R, дорівнює n^2R^2.

Розв'язання. Нехай A_1, A_2, ..., A_n – правильний многокутник, вписаний у коло з центром O. Знайдемо суму квадратів відстаней від вершини A_1 до решти вершин многокутника. Оскільки $\overrightarrow{A_1A_k}=\overrightarrow{OA_k}-\overrightarrow{OA_1}$, $k=2,...,n$, то

$$\overrightarrow{A_1A_k}^2=\overrightarrow{OA_k}^2+\overrightarrow{OA_1}^2-2\overrightarrow{OA_k}\cdot\overrightarrow{OA_1}=2R^2-2\overrightarrow{OA_k}\cdot\overrightarrow{OA_1}.$$

І оскільки $\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{OA_k}=\vec{0}$, то

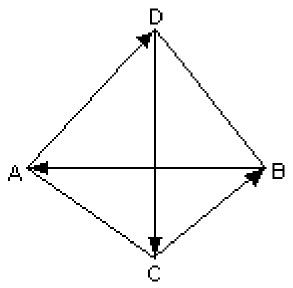
$$\sum_{k=2}^{n}A_1A_k^2=2(n-1)R^2-2\sum_{k=2}^{n}\overrightarrow{OA_k}\cdot\overrightarrow{OA_1}=2(n-1)R^2-2\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{OA_k}\cdot\overrightarrow{OA_1}+2\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_1}=2nR^2.$$

Аналогічно встановимо, що і для інших вершин суми квадратів відстаней до решти вершин многокутника дорівнюють $2nR^2$. Оскільки при цьому кожна відстань рахувалася двічі, то вся шукана сума дорівнює $\frac{n\cdot 2nR^2}{2}=n^2R^2$.

Повернемося до суми $\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{OA_k}$. Зауважимо, що при повороті кожного з векторів на кут $\frac{2\pi}{n}$ проти стрілки годинника така сума не зміниться, оскільки при цьому доданки у ній тільки змінять своє розташування. Отже, при $n>1$ вона може бути тільки нуль-вектором, оскільки це єдиний вектор, який не змінюється при такому повороті.

Звернемо увагу читачів, що при розв'язуванні останньої задачі ми мали справу із добутком векторів. Цей добуток називається скалярним добутком. Для двох ненульових векторів він визначається за формулою $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$, де φ – кут між цими векторами, $0\le\varphi\le 180^\circ$. Якщо $\varphi=90^\circ$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$. Для $\varphi=0^\circ$ легко одержуємо, що $\vec{a}^{\,2}=|\vec{a}|^2$.

Розглянемо декілька задач на використання скалярного добутку.



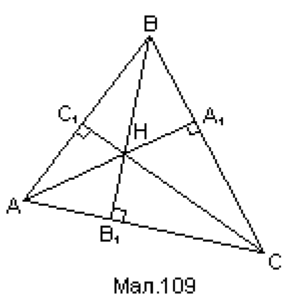
Мал.108

Задача 21.7. (9-10). Доведіть, що якщо у тетраедрі $ABCD$ протилежні ребра попарно перпендикулярні, то $AB^2+CD^2=AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$.

Розв'язання. Зрозуміло (див. мал. 108), що $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$. Тому $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$.

$$\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{CB}^2+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CD}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}.$$

Враховуючи умови перпендикулярності, одержимо $\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{CB}^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CD}^2$. Аналогічно доводяться інші дві рівності. Зрозуміло, що досить довести тільки одну з них.



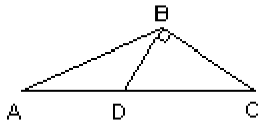
Мал.109

Задача 21.8. (8-9). Доведіть, що висоти трикутника (або їх продовження) перетинаються в одній точці.

Розв'язання. Позначимо через H точку перетину висот AA_1 та BB_1 (див. мал. 109). Нехай CH перетинає AB у точці C_1. Оскільки $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{HB}-\overrightarrow{HC}$, $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HB}$, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{HC}-\overrightarrow{HA}$ та $\overrightarrow{HA}\cdot\left(\overrightarrow{HB}-\overrightarrow{HC}\right)=0$, $\overrightarrow{HB}\cdot\left(\overrightarrow{HC}-\overrightarrow{HA}\right)=0$, то додавши дві останні рівності, одержимо $\overrightarrow{HC}\cdot\left(\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HB}\right)=0$. А отже, $\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{BA}=0$, тобто $CC_1\perp AB$ і проходить через H.

На відміну від попередньої задачі, де перпендикулярність відрізків була відома, тут для її встановлення ми використали скалярний добуток. Узагальнюючи, відзначимо, що з його допомогою можна знайти і величини кутів, відмінних від $90°$.

Задача 21.9. (8-9). У трикутнику ABC точка D – середина сторони AC; $\angle DBC = 90°$; $BD = \frac{\sqrt{3}}{4} AB$. Знайдіть $\angle ABD$.

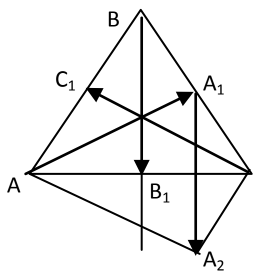


Мал.110

Розв'язання. Оскільки (див. мал. 110) $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right)$, то $\overrightarrow{BD}^2 = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD}$. Отже, $\overrightarrow{BD}^2 = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BD}\right| \cdot \cos\angle ABD$. Враховуючи, що $AB = \frac{4}{\sqrt{3}} BD$, одержимо $\overrightarrow{BD}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \overrightarrow{BD}^2 \cos\angle ABD$. Тому $\cos\angle ABD = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\angle ABD = 30°$.

Зауважимо, що оскільки BD – медіана трикутника ABC, то ми скористалися тут рівністю $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right)$. Відповідно для бісектриси BD ми мали б, що $AD : DC = AB : BC$. Тому в даному випадку приходимо до такої рівності $\overrightarrow{BD} = \frac{BC}{AB + BC} \cdot \overrightarrow{BA} + \frac{BA}{AB + BC} \cdot \overrightarrow{BC}$, або $\vec{l_b} = \frac{a}{a+c} \cdot \overrightarrow{BA} + \frac{c}{a+c} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Розглянемо ще деякі векторні властивості, пов'язані з цікавими відрізками у трикутнику. У задачі 21.3 ми довели рівність $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$ для медіан довільного трикутника ABC. А чи можуть подібні рівності виконуватися, наприклад, для висот чи бісектрис. Для рівносторонніх трикутників це очевидно. А для інших?



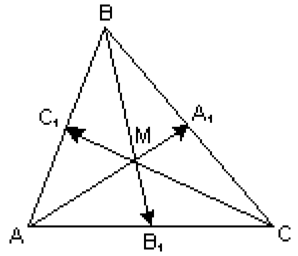
Мал.111

Задача 21.10. (9-10). Для висот AA_1, BB_1, CC_1 трикутника ABC виконується рівність $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$. Доведіть, що цей трикутник рівносторонній.

Розв'язання. Перенесемо (див. мал. 111) початок вектора BB_1 у точку A_1. Тоді його кінець перейде у A_2, причому $A_1A_2 \parallel BB_1$, $A_1A_2 = BA_1$. Оскільки $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{A_1A_2}$, то із рівностей $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$ та $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A} = \vec{0}$ робимо висновок, що $\overrightarrow{A_2A} = \overrightarrow{CC_1}$. Але $\angle AC_1C = 90°$, то AC_1CA_2 – прямокутник. Отже, точки A_1 та A_2 лежать на колі з діаметром AC. Його хорда A_1A_2 перпендикулярна до діаметра. Тому A_1 та A_2 симетричні відносно AC. Тому $\angle BCA = \angle A_2CA = \angle BAC$. Аналогічно доводиться, наприклад, рівність $\angle ABC = \angle CAB$. А це й означає, що ΔABC рівносторонній.

Пропонуємо читачам самостійно переконатися, що аналогічне твердження справедливе також для бісектрис трикутника та векторів, які з'єднують вершини з точками дотику вписаного у трикутник кола до протилежних сторін.

Ми ж обґрунтуємо загальніше твердження.



Мал.112

Задача 21.11. (9-10). Доведіть, що якщо вектори $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ із кінцями на протилежних сторонах трикутника ABC перетинаються в точці M і задовольняють рівність $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}$, то M – точка перетину медіан трикутника ABC.

Розв'язання. Нехай (див. мал. 112) $AB_1 : B_1C = x : y$, $CA_1 : A_1B = y : z$. Тоді за теоремою Чеви $BC_1 : C_1A = z : x$. Отже, $\overrightarrow{AA_1}=\frac{z}{y+z}\overrightarrow{AC}+\frac{y}{y+z}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BB_1}=\frac{y}{x+y}\overrightarrow{BA}+\frac{x}{x+y}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CC_1}=\frac{x}{z+x}\overrightarrow{CB}+\frac{z}{z+x}\overrightarrow{CA}$. Додавши ці рівності, одержимо з врахуванням умови задачі, що

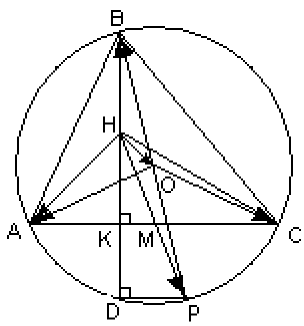
$$\left(\frac{y}{y+z}-\frac{y}{x+y}\right)\overrightarrow{AB}+\left(\frac{x}{x+y}-\frac{x}{z+x}\right)\overrightarrow{BC}+\left(\frac{z}{z+x}-\frac{z}{y+z}\right)\overrightarrow{CA}=\vec{0}.$$

Оскільки також $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$, а розклад вектора $\overrightarrow{CA}$ за не колінеарними векторами $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{BC}$ єдиний, то

$$\frac{y}{y+z}-\frac{y}{x+y}=\frac{x}{x+y}-\frac{x}{z+x}=\frac{z}{z+x}-\frac{z}{y+z}.$$

Після зведення до спільних знаменників приходимо до такої рівності $y(x^2-z^2)=x(z^2-y^2)=z(y^2-x^2)$. Оскільки x, y та z додатні, то звідси одержимо, що $xy=z^2$, $yz=x^2$, $zx=y^2$. Поділивши тепер два останні рівняння одне, на одне знайдемо, що $x=y$. Аналогічно доводимо $x=z$ та $y=z$. Отже, AA_1, BB_1, CC_1 медіани, а M – точка їх перетину.

Зрозуміло, що із доведеного випливає справедливість попередніх тверджень для висот та бісектрис (подумайте, чому!?). До задачі 21.11 зводиться і випадок векторів, що з'єднують вершини трикутника з точками дотику вписаного кола до протилежних сторін цього трикутника.



Мал.113

З цікавими точками трикутника пов'язана і так звана формула Гамільтона:

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC},$$

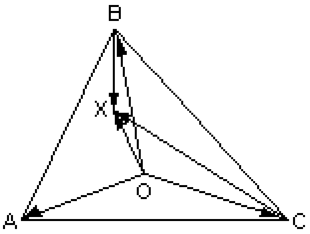
де O – центр кола, описаного навколо трикутника ABC, H –точка перетину висот цього трикутника.

Обґрунтуємо справедливість цієї формули. У задачі 17.5 було доведено, що точка D, симетрична до H відносно AC, лежить на описаному колі. Проведемо $DP \parallel AC$ (див. мал. 113). Тоді $AH=AD=PC$. Аналогічно доводимо, що $CH=PA$. Отже, $AHCP$ – паралелограм, а точка P – симетрична до H відносно середини сторони AC. Оскільки $\angle BDP=90^\circ$, то вона також діаметрально протилежна до вершини B. Таким чином маємо

$$\overrightarrow{HO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HP}\right)=\frac{1}{2}\left[\left(\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HC}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OC}\right)\right],$$

звідки і випливає формула Гамільтона. Справедливе також обернене твердження.



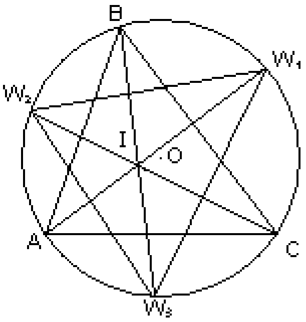
Мал.114

Задача 21.12. (9-10). Доведіть, що якщо $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, де O – центр кола, описаного навколо трикутника ABC, то X – точка перетину висот цього трикутника.

Розв'язання. Доведемо, наприклад, (див. мал. 114), що $BX\perp AC$. Оскільки

$$\overrightarrow{BX}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{BO}+\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA},$$

то скалярний добуток векторів $\overrightarrow{BX}$ та $\overrightarrow{AC}$ дорівнює $\overrightarrow{OC}^2-\overrightarrow{OA}^2=R^2-R^2=0$, де R – радіус описаного кола. Аналогічно доводиться, що $AX\perp BC$ та $CX\perp AB$.



Мал.115

Нехай тепер I – центр кола, вписаного у трикутник ABC, W_1, W_2, W_3 – точки перетину бісектрис його внутрішніх кутів з описаним колом (див. мал. 115). Неважко довести, що I – точка перетину висот трикутника $W_1W_2W_3$ (пропонуємо читачам зробити це самостійно). Отже за формулою Гамільтона одержуємо $\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OW_1}+\overrightarrow{OW_2}+\overrightarrow{OW_3}$.

А зараз знову повернемося до точки M перетину медіан трикутника ABC. Ми вже відзначали, що для довільної точки X виконується рівність $\overrightarrow{XM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}\right)$. Покладаючи тут $X=M$, одержимо $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

Зробимо деякі узагальнення.

Задача 21.13. (8-10). Доведіть, що для будь-яких точок A_1, A_2, ..., A_n існує єдина точка X, що $\overrightarrow{XA_1}+\overrightarrow{XA_2}+\ldots+\overrightarrow{XA_n}=\vec{0}$.

Розв'язання. Припустимо, що для двох точок X_1 та X_2 виконуються рівності $\overrightarrow{X_1A_1}+\overrightarrow{X_1A_2}+\ldots+\overrightarrow{X_1A_n}=\vec{0}$ та $\overrightarrow{X_2A_1}+\overrightarrow{X_2A_2}+\ldots+\overrightarrow{X_2A_n}=\vec{0}$.

Віднімаючи їх одна від одної і враховуючи, що $\overrightarrow{X_1A_k}-\overrightarrow{X_2A_k}=\overrightarrow{X_1X_2}$, де $k=1,\ldots,n$, одержимо $n\overrightarrow{X_1X_2}=\vec{0}$. А отже, $X_1=X_2$, і цим єдиність доведена. Існування ж потрібної точки X випливає із того, що для довільної точки O, взявши $\overrightarrow{OX}=\frac{1}{n}\left(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}\right)$, будемо мати

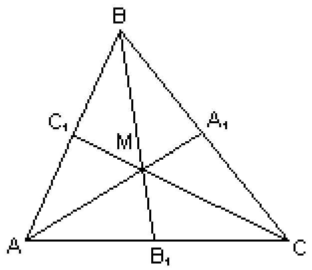
$$\overrightarrow{XA_1}+\overrightarrow{XA_2}+\ldots+\overrightarrow{XA_n}=\left(\overrightarrow{XO}+\overrightarrow{OA_1}\right)+\left(\overrightarrow{XO}+\overrightarrow{OA_2}\right)+\ldots+\left(\overrightarrow{XO}+\overrightarrow{OA_n}\right)=\vec{0}\,.$$

Відзначимо, що точку X із описаною в задачі 21.13 властивістю називають центром мас системи точок A_1, A_2, ..., A_n. Якщо ж у заданих точках відповідно зосереджені маси m_1, m_2, ..., m_n, то більш загально центром мас такої системи називають таку точку M, для якої

$$m_1\overrightarrow{MA_1}+m_2\overrightarrow{MA_2}+\ldots+m_n\overrightarrow{MA_n}=\vec{0}\,.$$

Зокрема, точка перетину медіан трикутника ABC є також його центром мас.

Важливою властивістю центра мас є так звана теорема про групування мас: центр мас системи точок не зміниться, якщо частину точок замінити однією точкою, яка знаходиться в їх центрі мас і якій приписана маса, що дорівнює сумі їх мас.



Мал.116

Задача 21.14. (8-9). Доведіть, що медіани трикутника ABC перетинаються в центрі мас цього трикутника і діляться цією точкою у відношенні 2 : 1, починаючи від вершин трикутника.

Розв'язання. Помістимо (див. мал. 116) у вершини трикутника одиничні маси. Нехай M – центр мас такої системи, B_1 – центр мас точок A та C. Тоді M – також центр мас точок B та B_1 із масою 2 у точці B_1. Зрозуміло, що B_1 – середина AC, а M лежить на BB_1. Оскільки $1\cdot\overrightarrow{MB}+2\cdot\overrightarrow{MB_1}=\vec{0}$, то $BM:MB_1=2:1$.

Отже, медіана BB_1 проходить через точку M і ділиться нею у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини B. Аналогічно доводимо для медіан AA_1 та CC_1.

Пропонуємо читачам самостійно довести, що відрізки, які з'єднують вершини тетраедра із центрами мас протилежних граней, перетинаються в одній точці і діляться нею у відношенні 3 : 1, рахуючи від вершини.

Задача 21.15. (8-10). Нехай A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1 – середини сторін AB, BC, CD, DE, EF, FA довільного шестикутника. Доведіть, що точки перетину медіан трикутників $A_1C_1E_1$ та $B_1D_1F_1$ співпадають.

Розв'язання. Помістимо у вершини шестикутника одиничні маси. Нехай M – центр мас такої системи. Оскільки A_1, C_1, E_1 – центри мас пар точок (A,B), (C,D), (E,F), то M є також центром мас системи точок A_1, C_1, E_1 з масами 2, тобто точкою перетину медіан трикутника $A_1C_1E_1$. Аналогічно доводимо, що M – точка перетину медіан трикутника $B_1D_1F_1$.

Цікаво також відзначити, що геометричним місцем точок X, для яких $XA_1^2+XA_2^2+\ldots+XA_n^2=const$, є коло з центром у центрі мас системи точок A_1, A_2, ..., A_n.

Звернемо увагу читачів на ще одну фізичну інтерпретацію геометричної задачі. А саме, закріпимо у вершинах трикутника ABC кільця і пропустимо через них три нитки довжиною a, які зв'язані між собою, а до інших кінців прикріплені вантажі масою m. Нехай у положенні рівноваги нитки виявляться зв'язаними у точці M всередині трикутника, причому $MA=x$,

$MB = y$, $MC = z$. Тоді потенціальна енергія такої системи $P = mg(x-a)+mg(y-a)+mg(z-a)$ повинна бути найменшою, а отже і сума $x+y+z$ теж буде найменшою. З іншого боку у положенні рівноваги рівнодійна сил в точці M дорівнює нулю. Оскільки всі ці сили за абсолютною величиною рівні, то попарні кути між векторами цих сил дорівнюють $120°$. Точка M, для якої $x+y+z$ – досягає найменшого значення називається точкою Торрічеллі.

Вправи до § 21

1. (8-9). Сума чотирьох одиничних векторів на площині дорівнює $\vec{0}$. Доведіть, що ці вектори можна розбити на дві пари взаємно протилежних векторів.
2. (8-9). На площині задано $n \geq 3$ векторів. Відомо, що довжина суми будь-яких двох із них менша за 2. Доведіть, що довжина суми будь-яких трьох зі цих векторів менша за 3.
3. (8-9). Точка A_1 ділить сторону BC трикутника ABC у відношенні $BA_1 : A_1C = m : n$. Виразіть вектор AA_1 через вектори $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$.
4. (9-10). На сторонах довільного трикутника ABC зовні нього побудовані правильні трикутники ABC_1, BCA_1, CAB_1. Доведіть, що $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}$.
5. (9-10). На сторонах опуклого 2006- кутника зовні нього побудовані правильні трикутники. Доведіть, що суми векторів, які з'єднують центри цих трикутників з двома найближчими вершинами 2004-кутника дорівнює $\vec{0}$.
6. (9-10). Чи можна так розставити стрілки на ребрах правильної: а) 2004-кутної; б) 2005-кутної піраміди, щоб сума всіх одержаних векторів дорівнювала $\vec{0}$?
7. (9-10). Доведіть, що для того, щоб точки *A, B, C* були вершинами прямокутного трикутника, в якому кут *C* дорівнює 90º, необхідно і достатньо, щоб $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$.
8. (9-10). Доведіть, що для довільних чотирьох точок *A, B, C, D* виконується рівність $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}=\vec{0}$.
9. (9-10). У коло вписаний трикутник *ABC*. Пряма CC_1, яка проходить через середину *AB*, перетинає це коло у точці *D*. Доведіть, що $CA^2+CB^2=2\cdot CC_1\cdot CD$.
10. (9-10). Доведіть, що для довільних чотирьох точок *A, B, C, D* виконується нерівність $AB^2+BC^2+DC^2+DA^2 \geq AC^2+BD^2$, причому рівність можлива лише за умови, що *ABCD*-паралелограм.
11. (8-10). У вершинах довільного чотирикутника розташовані однакові маси. Знайдіть розташування їхнього центра мас.
12. (8-10). Із квадратної пластинки вирізали прямокутник, який прилягав: а) до двох сусідніх сторін квадрата; б) до однієї сторони квадрата. Користуючись лише лінійкою, знайдіть у кожному з цих випадків центри мас тих фігур, які залишилися.
13. (8-10). *M* – точка перетину медіан трикутника *ABC*. A_1, B_1, C_1 є відповідно точками перетину медіан трикутників *BCM, CAM, ABM*. Доведіть, що *M* – також точка перетину медіан трикутника $A_1B_1C_1$.
14. (9-10). Використовуючи метод групування мас, доведіть теорему Чеви про перетин відрізків, які виходять з вершин трикутника до протилежних його сторін, у одній точці.
15. (9-10). Доведіть що 3 відрізки, які з'єднують середини протилежних ребер довільного тетраедра, перетинаються в одній точці.

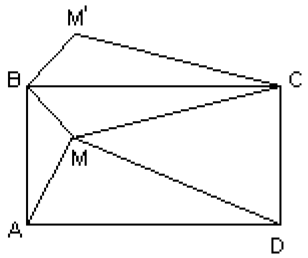
§ 22. Геометричні перетворення на площині

При розв'язуванні ряду задач цієї книжки ми вже використовували як паралельне перенесення, так і різні види симетрії чи повороту. І це зовсім не випадково. Адже використання геометричних перетворень – один із найважливіших методів у геометрії. Тож зупинимося на таких перетвореннях більш детально.

1. Паралельне перенесення

Паралельним перенесенням на вектор $\overrightarrow{AB}$ називають таке перетворення, яке кожну точку X переводить у таку точку X', що $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{AB}$.

Зрозуміло, що послідовне застосування паралельних перенесень на вектори $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{BC}$ рівносильне паралельному перенесенню на вектор $\overrightarrow{AC}$.



Мал.117

Задача 22.1. (9-10). Всередині прямокутника $ABCD$ довільним чином вибрали точку M. Доведіть, що існує опуклий чотирикутник з перпендикулярними діагоналями, сторони якого дорівнюють AM, BM, CM, DM.

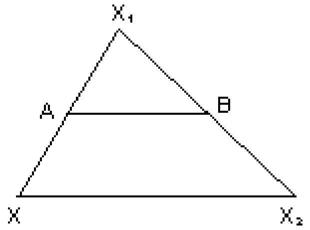
Розв'язання. Виконаємо паралельне перенесення трикутника AMD на вектор $\overrightarrow{AB}$. При цьому він перейде у трикутник $BM'C$ (див. мал. 117). Оскільки $BM' = AM$, $CM' = CM$, $MM' || AB$, $AB \perp BC$, то чотирикутник $BM'CM$ - шуканий. Його опуклість обґрунтуйте самостійно.

Задача 22.2. (9-10). На площині задано два кола і пряма l. Побудувати відрізок, паралельний прямій l, із кінцями на цих колах, який має наперед задану довжину a.

Розв'язання. Здійснимо паралельне перенесення одного з кіл на вектор з довжиною a і напрямом, паралельним прямій l. Зрозуміло, що вибір такого напряму можна зробити двома способами. Якщо після такого перенесення кола перетнуться, то проведемо через точку (точки) перетину пряму, паралельну прямій l. Пропонуємо читачам самостійно проаналізувати, чому шуканий відрізок лежатиме на такій прямій а також дослідити, скільки розв'язків може мати ця задача.

2. Центральна симетрія

Симетрією відносно точки A називають таке перенесення площини, яке переводить кожну точку X у таку точку X', що A – середина відрізка XX'. При цьому точку A називають центром симетрії.



Мал.118

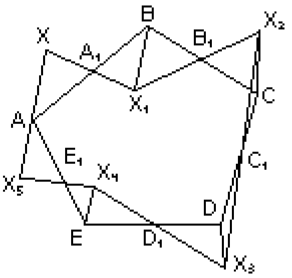
Задача 22.3. (9-10). Доведіть, що послідовне застосування двох центральних симетрій відносно точок A та B рівносильне паралельному перенесенню на вектор $2\overrightarrow{AB}$.

Розв'язання. Нехай (див. мал. 118) при симетрії відносно A точка X перейшла у точку X_1, а при симетрії відносно B точка X_1

перейшла у точку X_2. Тоді AB – середня лінія трикутника XX_1X_2. А отже, $\overrightarrow{XX_2} = 2\overrightarrow{AB}$. Випадок, коли X, A, B лежать на одній прямій проаналізуйте самостійно.

Відзначимо також, що послідовне застосування центральної симетрії та паралельного перенесення, виконаних у довільному порядку, є центральною симетрією.

Використаємо властивості центральної симетрії для розв'язання наступної задачі.



Задача 22.4. (9-10). Відновіть п'ятикутник за відомими серединами його сторін та порядком їх розташування.

Розв'язання. Нехай A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 – середини сторін п'ятикутника $ABCDE$. Виберемо довільну точку X на площині і виконаємо послідовно симетрії відносно A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 (див. мал. 119). У результаті одержимо точки X_1, X_2, X_3, X_4, X_5. Якщо X_5 співпаде з X, то ми одержали шуканий п'ятикутник, в якому $A = X$. У іншому випадку виберемо A як середину відрізка XX_5. Справді, тоді одержимо $\overrightarrow{AX} = -\overrightarrow{BX_1} = \overrightarrow{CX_2} = -\overrightarrow{DX_3} = \overrightarrow{EX_4} = -\overrightarrow{AX_5}$. А отже, точка A в результаті таких симетрій перейде сама в себе. Таким чином всі вершини п'ятикутника будуть знайдені. Зрозуміло, що для всякої точки M, відмінної від A, ми в кінцевому результаті після виконаних симетрій одержимо точку M', симетричну до M відносно A. Отже, $M' \neq M$, а значить, шуканий п'ятикутник єдиний.

Пропонуємо читачам самостійно переконатися, що за серединами сторін однозначно можна відновити будь-який многокутник із непарним числом сторін. Подумайте також, чи залишиться справедливим аналогічне твердження для многокутників із парним числом сторін.

Задача 22.5. (9-10). Дано два концентричні кола та точку A на меншому з них. Проведіть через A пряму, на якій задані кола відтинають три рівні відрізки.

Розв'язання. Симетризуємо менше з кіл відносно точки A. Якщо одержане в результаті симетрії коло перетнеться з більшим колом, наприклад, в точці B, то пряма AB – шукана.

Пропонуємо читачам більш детально проаналізувати всі можливі тут випадки.

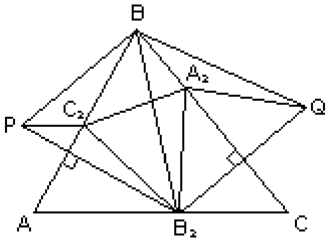
3. Осьова симетрія

Симетрією відносно прямої l називають таке перетворення площини, при якому точка X переходить у таку точку X', що пряма l є серединним перпендикуляром до відрізка XX'. При цьому сама пряма l називається віссю симетрії. Зрозуміло, всяка точка на l при такій симетрії перейде сама в себе.

Цікаво відзначити, що композиції (послідовного застосування) не більше ніж трьох осьових симетрій достатньо, щоб подати будь-який рух фігури на площині.

З типовими використаннями осьової симетрії ми вже мали справу в задачах 19.1, 19.2, 20.4, 18.15. А зараз доведемо ще одну цікаву екстремальну властивість так званого ортоцентричного трикутника, вершинами якого є основи висот даного трикутника.

Задача 22.6. (9-10). У гострокутному трикутнику проведені висоти AA_1, BB_1, CC_1. Доведіть, що периметр трикутника $A_1B_1C_1$ є найменшим серед периметрів усіх трикутників вписаних у трикутник ABC.



Мал.120

Розв'язання. Нехай A_2, B_2, C_2 – довільні точки, взяті відповідно на сторонах BC, CA, AB трикутника ABC (див. мал. 120). Побудуємо точки P та Q, симетричні до точки B_2 відносно прямих AB та BC. Зрозуміло, що периметр трикутника $A_2B_2C_2$ дорівнює довжині ламаної PC_2A_2Q. Він буде найменшим, якщо C_2 та A_2 лежать на відрізку PQ. Оскільки $BP = BB_2 = BQ$, то трикутник PBQ рівнобедрений $\angle PBQ = 2\angle ABC = const$. Тому його основа PQ буде найменшою, якщо бічні сторони BP і BQ найменші, тобто коли найменшою є довжина відрізка BB_2. А отже, $BB_2 = BB_1$. Аналогічно доводимо, що $AA_2 = AA_1$ та $CC_2 = CC_1$ для вписаного трикутника з найменшим периметром.

З допомогою осьової симетрії може бути розв'язана і наступна задача, яку ми пропонуємо читачам розв'язати самостійно.

Задача 22.7. (9-10). На більярдному столі лежить куля. Побудуйте траєкторію, при русі по якій куля, відбившись від кожної її стінки по одному разу повернеться у своє початкове положення.

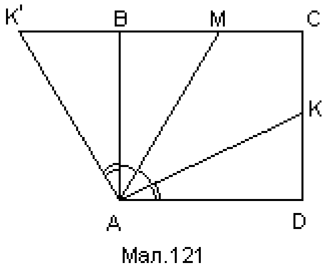
4. Поворот

Під поворотом з центром у точці O на кут φ розуміють таке перетворення площини, яке точку X переводить у таку точку X', що:

а) $OX' = OX$;

б) кут повороту від вектора $\overrightarrow{OX}$ до вектора $\overrightarrow{OX'}$ дорівнює φ.

З окремими задачами, для розв'язання яких використовувалися повороти, ми вже зустрічалися у параграфі 21. Розглянемо ще декілька задач такого характеру. При цьому відзначимо, що досить часто зустрічаються задачі, для розв'язання яких необхідно виконати поворот на $90°$ чи $60°$. Ось типові приклади таких задач.

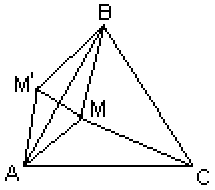


Мал.121

Задача 22.8. (9-10). На сторонах BC та CD квадрата $ABCD$ відзначили точки M та K так, що $\angle BAM = \angle MAK$. Доведіть, що $BM + KD = AK$.

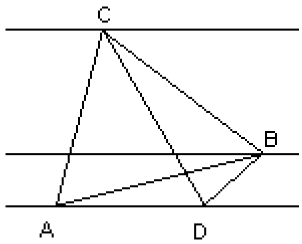
Розв'язання. Повернемо трикутник AKD на $90°$ проти годинникової стрілки навколо точки A (див. мал. 121). При цьому він перейде у трикутник $AK'B$. Зрозуміло, що $BM + KD = K'M$, $AK = AK'$. Оскільки $\angle K'AM = \angle K'MA$ (подумайте чому), то $K'M = AK'$, звідки і випливає твердження задачі.

Задача 22.9. (9-10). Всередині рівностороннього трикутника помістили точку M, яка знаходиться відповідно на відстанях 3 см, 4 см та 5 см від його вершин. Знайдіть довжину сторони цього трикутника.



Мал.122

Розв'язання. Нехай для конкретності $AM = 3$см, $BM = 4$см, $CM = 5$см (див мал. 122). Повернемо трикутник AMC на $60°$ проти стрілки годинника навколо точки A. При цьому він перейде у трикутник $AM'B$. Оскільки $AM' = AM$, $\angle M'AM = 60°$ то і $\angle M'MA = 60°$. Крім того, $AM' = AM = 3$см, $M'B = MC = 5$см, $BM = 4$см. Отже $\angle BMM' = 90°$. Тоді $\angle AMB = 150°$, і за теоремою косину-сів знаходимо $AB^2 = AM^2 + BM^2 - 2 \cdot AM \cdot BM \cdot cos150° = 9 + 16 + 12\sqrt{3}$ (см^2), $AB = \sqrt{25 + 12\sqrt{3}}$ см.



Мал.123

Задача 22.10. (9-10). Побудуйте рівносторонній трикутник ABC так, щоб його вершини лежали на трьох заданих паралельних прямих.

Розв'язання. Припустимо, що ми побудували трикутник ABC так, що його вершини лежать на трьох заданих паралельних прямих (див. мал. 123). При повороті на $60°$ з центром A точка B перейде у точку C. Зрозуміло, що і пряма, на якій лежала точка B теж пройде після такого повороту через C. А отже точка C, а з нею і сторона AC, нам відома. Дальша побудова трикутника ABC очевидна. Зробіть її самостійно.

Зауважимо, що ця задача має ще й таке красиве розв'язання. Нехай трикутник ABC побудований, а описане навколо нього коло перетинає пряму з вершиною A ще й у точці D. Тоді $\angle ADC = \angle ABC = 60°$, $\angle BDC = \angle BAC = 60°$. Отже, для побудови сторони BC досить провести з точки D прямі під кутами $60°$ до тієї із паралельних прямих, яка повинна містити точку A.

Відзначимо також, що в окремих задачах, як, наприклад, у задачі 21.6, доцільним є повороти на інші кути. Можливими також є використання композиції поворотів та поєднання повороту з паралельним перенесенням чи симетріями.

Підсумовуючи сказане, звернемо увагу читачів на те, що описані тут перетворення не змінювали ні кутів, ні відстаней між відповідними елементами, переводячи кожну фігуру у цілком аналогічну. А зараз вашій увазі пропонуємо ще два цікаві перетворення, які, зберігаючи відповідні кути, змінюють відстані між відповідними елементами.

5. <u>Гомотетія</u>

Гомотетією називають перетворення площини, яке переводить точку X у таку точку X', що $\overrightarrow{OX} = k\overrightarrow{OX'}$. Тут O – деяка фіксована точка, яка називається центром гомотетії, а фіксоване число $k \neq 0$ – коефіцієнт гомотетії. Зауважимо, що k може бути і від'ємним.

Дві фігури називаються гомотетичними, якщо одна з них переходить в іншу при деякій гомотетії. Зрозуміло, що дві гомотетичні фігури подібні між собою. Відзначимо також, що лінійні розміри відповідних елементів гомотетичних фігур відносяться, як $1:|k|$, а їх площі – як $1:k^2$. Останнім фактом ми вже скористалися при розв'язуванні задач 16.1, 16.2 та 16.12.

Композицію гомотетії та повороту, які мають спільний центр, називають поворотною гомотетією. Зокрема, гомотетію з від'ємним коефіцієнтом k можна розглядати як поворотну гомотетію з коефіцієнтом $|k|$ та кутом повороту $180°$.

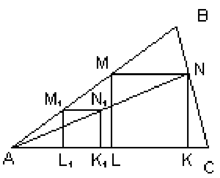
Композиція двох гомотетій з коефіцієнтами k_1 та k_2, де $k_1k_2 \neq 1$, теж є гомотетією з коефіцієнтом k_1k_2, причому її центр лежить на прямій, яка з'єднує центри цих гомотетій.

Перейдемо до розв'язування задач з використанням гомотетії.

Задача 22.11. (9-10). Чотирикутник розрізали діагоналями на чотири трикутники. Доведіть, що точки перетину медіан цих трикутників є вершинами паралелограма.

Розв'язання. Розглянемо гомотетію з центром у точці перетину діагоналей чотирикутника і коефіцієнтом $3/2$. При такій гомотетії точки перетину медіан вказаних трикутників перейдуть у середини сторін чотирикутника. Оскільки останні є вершинами паралелограма (доведіть це самостійно), то і точки перетину медіан вказаних трикутників теж будуть вершинами паралелограма.

Задача 22.12. (9-10). В даний трикутник вписати квадрат так, щоб дві його вершини лежали на основі трикутника, а дві інші – на бічних сторонах.

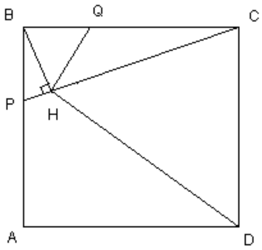


Мал.124

Розв'язання. Побудуємо квадрат $M_1N_1K_1L_1$, дві вершини якого лежать на основі AC, третя – на стороні AB (див. мал. 124). Тепер проведемо пряму AN_1 до перетину зі стороною BC у точці N. Квадрат $MNKL$, гомотетичний квадрату $M_1N_1K_1L_1$ з центром гомотетії A, і буде шуканим. Пропонуємо читачам обґрунтувати це самостійно.

А ось приклад на застосування поворотної гомотетії.

Задача 22.13. (9-11). Точки P та Q лежать відповідно на сторонах AB та BC квадрата $ABCD$, причому $BP = BQ$; H – основа перпендикуляра, опущеного з точки B на відрізок PC. Доведіть, що $\angle DHQ = 90°$.



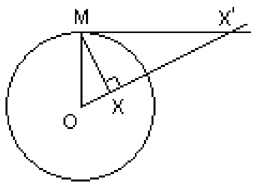
Мал. 125

Розв'язання. Розглянемо (див. мал. 125) перетворення, яке переводить трикутник BHC у трикутник PHB, тобто композицію повороту на $90°$ навколо точки H і гомотетії з центром H та коефіцієнтом $k = BP : CB$. При такому перетворенні всякий квадрат переходить знову у деякий квадрат. Оскільки точка C перейшла у B, точка B – у P, $BP = BQ$, $\angle PBQ = 90°$, то вершина D квадрата $ABCD$ перейде у вершину Q новоутвореного квадрата. А отже, $\angle DHQ = 90°$.

6. Інверсія

Інверсією відносно кола ω радіуса R з центром O називають таке перетворення, яке переводить довільну точку X, відмінну від O, у точку X', що лежить на промені OX на відстані $OX'=R^2/OA$ від точки O. При цьому коло ω називають колом інверсії, точку O – центром інверсії, а величину R^2 – степенем інверсії.

Із означення безпосередньо випливає, що точки кола ω при інверсії переходять самі в себе, точки, які лежать всередині ω, інверсія переводить назовні, а точки, які лежать поза ω, – всередину ω. Будемо також вважати, що точку O інверсія переводить у так звану нескінченно віддалену точку площини. Тоді пряма, яка проходить через O, при інверсії перейде сама в себе.



Мал.126

Відзначимо, що геометрично побудувати інверсну до X точку X' дуже просто. Нехай $XM \perp OX$ (див мал. 126). Проводимо через M дотичну до кола ω. Вона перетне промінь OX у точці X', інверсній до X. Справді, з подібності трикутників OMX' та OXM випливає, що $OX : OM = OM : OX'$, тобто $OX'=R^2/OX$.

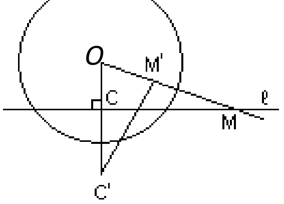
Зауважимо також, що оскільки $OX = R^2/OX'$, то точка X є інверсною до точки X' відносно цього ж кола ω. Пропонуємо читачам самостійно проаналізувати, як її геометрично одержати із точки X' (див. мал. 126).

Таким чином ми переконуємося у можливості здійснення перетворення інверсії з допомогою лише циркуля та лінійки.

Розглянемо деякі властивості цього перетворення.

Задача 22.14. (9-11). Нехай при інверсії з центром O точка A перейшла у точку A', а точка B – у точку B'. Доведіть, що трикутники OAB та $OB'A'$ подібні.

Розв'язання. Оскільки $OA \cdot OA' = R^2$ та $OB \cdot OB' = R^2$, то $OA \cdot OA' = OB \cdot OB'$. Звідси одержуємо $OA : OB = OB' : OA'$, що доводить подібність трикутників OAB та $OB'A'$, оскільки також $\angle AOB = \angle B'OA'$.



Мал.127

Задача 22.15. (9-11). Доведіть, що при інверсії з центром O пряма l, яка не проходить через O, переходить в коло, що проходить через O.

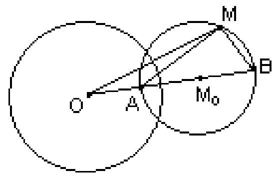
Розв'язання. Опустимо з точки O перпендикуляр OC на пряму l і візьмемо довільну точку M на цій прямій (див. мал. 127). На основі задачі 22.14 трикутники OCM та $OM'C'$ подібні. Тому $\angle OM'C' = 90°$. А отже, всі точки M' лежать на колі з діаметром OC'. Навпаки, всяка точка $X' \neq O$ такого кола є інверсною до точки X, яка лежить на перетині прямих OX' та l.

Зауважимо, що сама точка O не є інверсною до жодної точки прямої l. Будемо вважати, що вона інверсна до так званої нескінченно віддаленої точки цієї прямої.

Відзначимо також, що з доведеного в задачі 22.15 і того, що точки X та X' взаємно інверсні, випливає також наступна властивість: при інверсії з центром O коло з центром M_o, яке проходить через O, перейде у пряму, що не проходить через O. Зрозуміло, що для побудови такої прямої досить знайти будь-які дві її точки. Крім того, ця пряма перпендикулярна до прямої OM_o (подумайте, чому).

А що ж відбувається з колом, яке не проходить через центр інверсії O. Відповідь на це запитання дає наступна задача.

Задача 22.16. (9-11). Доведіть, що при інверсії з центром O коло, яке не проходить через O, перейде в коло, яке теж не проходить через O.

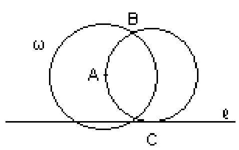


Мал.128

Розв'язання. Нехай M_o – центр такого кола, A та B – точки перетину цього кола з прямою OM_o, A' та B' – інверсні до них точки відносно кола ω з центром O, M – довільна точка кола з діаметром AB, M' – інверсна до неї точка (див. мал. 128). На основі задачі 22.14 $\Delta OAM \sim \Delta OM'A'$. Тому $\angle OA'M' = \angle OMA$, $\angle OB'M' = \angle OMB$. Але оскільки $\angle AMB = 90°$, то і $\angle B'M'A' = 90°$. Отже, всі інверсійні до точок M точки M' лежать на колі з діаметром $A'B'$. Зрозуміло, що і навпаки, кожна точка такого кола є інверсною для деякої точки M на колі з діаметром AB.

Серед інших властивостей відзначимо без доведення, що при перетворенні інверсії зберігаються кути між колами, між колом і прямою, між двома прямими. При цьому під кутом між колами розуміють кути між дотичними, проведеними до цих кіл у точках їх перетину. Як приклад застосування інверсії розглянемо таку задачу.

Задача 22.17. (9-11). Побудуйте коло, яке дотикається до заданої прямої l і проходить через дві задані точки A та B, які лежать в одній півплощині відносно цієї прямої.



Мал.129

Розв'язання. Нехай таке коло дотикається прямої до l у точці C (див. мал. 129). Розглянемо інверсію відносно кола ω з центром A і радіусом AB. При цьому точка B перейде сама в себе, а шукане нами коло – у пряму, що проходить через точку B і дотикається до кола l', інверсного прямій l у точці C', інверсній до точки C. Виконуючи тепер зворотну інверсію одержаної нами прямої, побудуємо вказане в умові задачі коло.

Пропонуємо читачам самостійно переконатися, що така задача має два розв'язки, а також знайти її розв'язання без використання інверсії.

Зауважимо, що з допомогою інверсії можна розв'язати і складніші задачі такого типу, наприклад:

а) побудувати коло, що проходить через дві задані точки і дотикається до заданого кола;

б) побудувати коло, що проходить через точку і дотикається до двох заданих кіл чи до кола і прямої;

в) побудувати коло, що дотикається до трьох заданих кіл (задача Аполлонія).

Відзначимо також, що, крім розглянутих у цьому параграфі перетворень, існують ще й інші перетворення площини, які можуть успішно використовуватися під час розв'язування олімпіадних задач. Такими, зокрема, є афінні та проективні перетворення. Але розгляд їхніх властивостей виходить за рамки нашої книжки.

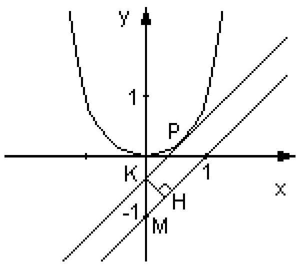
Вправи до § 22

1. (9-10). Всередині правильного трикутника *ABC* взяли довільну точку *M*. Доведіть, що із відрізків *AM, BM, CM* можна утворити трикутник.
2. (9-10). Побудуйте паралелограм за його сторонами і кутом між діагоналями.
3. (9-10). З одного боку від прямої вибрали точки *A* та *B*. Розмістіть на цій прямій відрізок *MN* заданої довжини так, щоб довжина ламаної *AMNB* була найменшою.
4. (9-10). Діагональ *AC* чотирикутника *ABCD* є діаметром описаного кола. *AM* та *CN* – перпендикуляри, опущені на *BD*. Доведіть, що $BM = DN$.
5. (9-10). Через спільну точку *A* перетину двох кіл проведіть пряму, яка би в обох колах відтинала хорди однакової довжини.
6. (9-10). Вершини одного паралелограма лежать на сторонах іншого (по одній на кожній стороні). Доведіть, що центри цих паралелограмів співпадають.
7. (9-10). Доведіть, що якщо фігура : а) має дві взаємно перпендикулярні осі симетрії, то вона має центр симетрії, б) має рівно дві осі симетрії, то вони взаємно перпендикулярні.
8. (9-10). Побудуйте трикутник *ABC* за вершинами *A* та *B* і прямою, на якій лежить бісектриса кута *C*.
9. (9-10). Всередині прямого кута розташована точка *A*. Побудуйте рівносторонній трикутник *ABC*, вершини *B* і *C* якого знаходяться на двох сторонах цього кута.
10. (9-10). Побудуйте рівносторонній трикутник, дві вершини якого лежали б на заданому колі, а всі висоти перетиналися б у заданій точці.
11. (9-10). У правильний шестикутник впишіть квадрат найбільшої площі.
12. (9-10). У кут вписані 2002 кола, кожне з яких, крім двох крайніх, дотикається до двох інших, а всі вони дотикаються до обох сторін кута. Доведіть, що радіуси цих кіл утворюють геометричну прогресію.
13. (9-10). Дано опуклий чотирикутник *ABCD*. Впишіть у нього ромб, сторони якого паралельні діагоналям *AC* та *BD*.
14. (9-10). Впишіть у заданий трикутник *ABC* трикутник, сторони якого відповідно перпендикулярні до сторін трикутника *ABC*.
15. (9-11). Проведіть через дану точку *A* коло, перпендикулярне до двох заданих кіл.

§ 23. Метод координат. Комплексні координати

Розглядаючи задачу 19.10, ми змогли суттєво спростити її розв'язання, замінивши у ній два порівняно складних доданки відстанями між точками у прямокутній системі координат. Не обійтися без введення системи координат і при розв'язуванні задач, пов'язаних із графіками функцій. Розглянемо декілька таких прикладів.

Задача 23.1. (9-10). На площині задані парабола $y = x^2$ та пряма $y = x - 1$. Знайдіть довжину найкоротшого відрізка, один з кінців якого знаходиться на цій параболі, а інший – на заданій прямій.



Мал.130

Розв'язання. Запишемо рівняння прямої l, яка дотикається до параболи $y = x^2$ і паралельна прямій $y = x - 1$. Воно має вигляд: $y = x + b$, оскільки кутові коефіцієнти паралельних прямих співпадають. Виберемо b з умови, що парабола $y = x^2$ та пряма $y = x + b$ мають одну спільну точку, тобто рівняння $x^2 = x + b$ має єдиний розв'язок. Тоді його дискримінант $D = 1 + 4b = 0$. Отже, $b = -\dfrac{1}{4}$. Пряма l перетинає вісь ординат у точці $K\left(0, -\dfrac{1}{4}\right)$. Зрозуміло, що найкоротша відстань між $y = x^2$ та $y = x - 1$ дорівнює відстані між l та $y = x - 1$ і дорівнює KH (див. мал. 130). Оскільки ΔKHM – прямокутний, $M(0, -1)$, $KM = \dfrac{3}{4}$, то $KH = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{3\sqrt{2}}{8}$ і є шуканою довжиною.

Задача 23.2. (9-10). Дві параболи із взаємно перпендикулярними осями перетинаються у чотирьох різних точках. Доведіть, що всі чотири точки перетину лежать на одному колі.

Розв'язання. Виберемо систему координат так, щоб її вісь абсцис була паралельна осі однієї параболи, а вісь ординат – паралельна осі іншої параболи. В цій системі координат рівняння вказаних парабол матимуть такий загальний вигляд $x = a_1 y^2 + b_1 y + c_1$ та $y = a_2 x^2 + b_2 x + c_2$,

де $a_1 a_2 \neq 0$. Координати точок перетину парабол, очевидно, задовольнятимуть обидва ці рівняння. Помножимо перше з них на a_2, а друге – на a_1. Додавши одержані таким чином рівняння, будемо мати

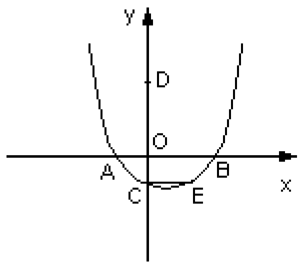
$$a_2 x + a_1 y = a_1 a_2 y^2 + a_2 b_1 y + a_2 c_1 + a_1 a_2 x^2 + a_1 b_2 x + a_1 c_2 .$$

Виділивши повні квадрати і поділивши на $a_1 a_2 \neq 0$, перепишемо це рівняння у такому вигляді

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = c$$

(значення коефіцієнтів a, b, c знайдіть самостійно). Оскільки останню рівність згідно умови задачі повинні задовольняти координати принаймні чотирьох точок, то $c > 0$. Покладаючи $c = R^2$, одержуємо, що чотири точки перетину вказаних парабол лежать на колі радіуса $R = \sqrt{c}$ з центром (a, b).

Задача 23.3. (9-10). Розглядаються всі можливі параболи $y = x^2 + px + q$, які перетинають осі координат у трьох різних точках, та кола які проходять через такі три точки перетину. Доведіть, що існує точка на площині, яка належить кожному з цих кіл. Знайдіть цю точку.



Мал.131

Розв'язання. Очевидно координати точок перетину параболи з осями координат є такими $A(x_1,0)$ $B(x_2,0)$, $C(0,q)$.

Нехай коло, яке проходить через ці точки, перетинає вісь ординат також у точці $D(0,y_0)$ (обґрунтуйте самостійно, що такий перетин обов'язково відбудеться, якщо $q \neq 1$). Тоді $OA \cdot OB = OC \cdot OD$ (див. задачу 15.2 чи задачу 15.9, якщо центр координат O опиниться поза таким колом). З іншого боку маємо $OA = |x_1|$, $OB = |x_2|$, $OC = |q|$, $OD = y_0 > 0$. Отже, $|x_1| \cdot |x_2| = |q| \cdot y_0$. Оскільки за теоремою Вієта $x_1 x_2 = q$, то $y_0 = 1$. Таким чином, усі вказані кола проходять через точку $D(0,1)$.

Зауважимо, що встановлена тут властивість може бути використана для графічного розв'язування квадратних рівнянь з допомогою лише циркуля та лінійки. Справді, проведемо пряму $CE \| AB$ (див. мал. 131) до перетину з параболою у точці E. Точка E симетрична до точки C відносно осі параболи, як і точки A та B симетричні між собою відносно цієї ж осі. Тому E теж лежатиме на колі, яке проходить через A, B, C, D. Оскільки рівняння осі параболи є $y = -\frac{p}{2}$, то E має координати $(-p, q)$. Але $\angle DCE = 90°$. Отже, DE – діаметр цього кола. Враховуючи сказане, можна запропонувати такий метод розв'язування рівняння $x^2 + px + q = 0$:

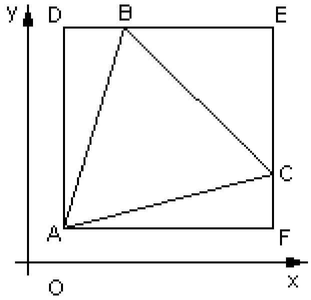
а) відкладаємо точки $D(0,1)$ та $E(-p,q)$;

б) на відрізку DE (як на діаметрі) будуємо коло;

в) знаходимо точки перетину цього кола з віссю абсцис, абсциси яких і є шуканими коренями заданого рівняння.

Зрозуміло, що якщо побудоване коло дотикається до осі абсцис, то рівняння має лише один корінь, а якщо таке коло не має з віссю абсцис спільних точок, то і квадратне рівняння не має дійсних коренів.

Задача 23.4. (9-10). Чи існує рівносторонній трикутник, всі координати вершин якого є раціональними?

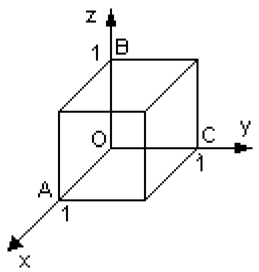


Мал.132

Розв'язання. Спочатку вивчимо питання про існування такого трикутника на площині. Нехай ним є трикутник ABC зі стороною a. Помістимо його у прямокутник $ADEF$ (див. мал. 132). Інші випадки розміщення ABC на площині розглядаються аналогічно. Тоді всі координати точок A, D, B, E, C, F раціональні. А отже, довжини відрізків AD, DB, BE, EC, CF, AF теж раціональні. Тому площі прямокутних трикутників ADB, BCE та AFC, а також площа прямокутника

$ADEF$ виражаються раціональними числами. А значить, і площа трикутника ABC теж повинна виражатися раціональним числом. З іншого боку така площа $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}=\frac{(AD^2+DB^2)\sqrt{3}}{4}$ і є ірраціональним числом. Одержане протиріччя доводить, що на площині рівностороннього трикутника, всі координати вершин якого є раціональними, не існує.

Для позитивної відповіді на поставлене запитання у просторі достатньо розглянути куб зі стороною 1, розміщений як на мал. 133. Вершини $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$ мають усі три раціональні координати. Крім того, $AB=BC=CA=\sqrt{2}$. Отже, трикутник ABC є рівностороннім. □



Мал.133

Розв'язуючи задачі 23.1 – 23.4, ми явно чи неявно використовували тільки поняття відстані між двома точками на площині. У загальному випадку для точок $A_1(x_1,y_1)$ та $A_2(x_2,y_2)$ таку відстань можна визначити за формулою

$$A_1A_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2},$$

яка безпосередньо випливає з теореми Піфагора. Зокрема, відоме вам рівняння кола

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$$

одержуємо з того, що відстань між його довільною точкою $M(x,y)$ і центром $M_0(x_0,y_0)$ дорівнює R, а квадрат такої відстані – відповідно R^2.

Про що ж ще можна дізнатися, маючи координати двох точок на площині $A_1(x_1,y_1)$ та $A_2(x_2,y_2)$? Наприклад, про координати середини відрізка A_1A_2: $x=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y=\frac{y_1+y_2}{2}$.

Повертаючись до малюнка 132 припустимо, що координати точок A, B, C є відповідно такими (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3). Зрозуміло, що тоді площі наступних фігур обчислюються за формулами:

$$S_{ADEF}=(x_3-x_1)\cdot(y_2-y_1),\ S_{AFC}=\frac{1}{2}(x_3-x_1)\cdot(y_3-y_1);$$

$$S_{ADB}=\frac{1}{2}(x_2-x_1)\cdot(y_2-y_1),\ S_{BFC}=\frac{1}{2}(x_3-x_2)\cdot(y_2-y_3).$$

Віднімаючи від першої з цих рівностей три останніх, легко одержати формулу

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|(x_3-x_1)(y_2-y_1)-(y_3-y_1)(x_2-x_1)\right|,$$

яка справедлива для довільних трикутників ABC.

Цікаво також зауважити, що для довільної точки $M(x,y)$ всередині чи на сторонах трикутника ABC виконуються рівності

$$S_{ABM} + S_{BCM} + S_{CAM} = S_{ABC}.$$

Виражаючи кожну з цих площ через координати, одержуємо рівняння трикутника ABC (як частини площини):

$$\left|(x-x_1)(y_2-y_1)-(y-y_1)(x_2-x_1)\right|+\left|(x-x_2)(y_3-y_2)-(y-y_2)(x_3-x_2)\right|+$$

$$+\left|(x-x_3)(y_1-y_3)-(y-y_2)(x_1-x_3)\right|=2\left|(x_3-x_1)(y_2-y_1)-(y_3-y_1)(x_2-x_1)\right|.$$

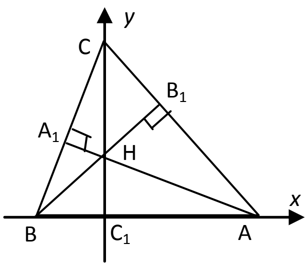
Але, мабуть, важливішою тут є все-таки можливість написати рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки. Воно має вигляд

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Зауважимо, що у випадку $x_2 = x_1$ його слід розуміти як рівняння $x - x_1 = 0$, а при $y_2 = y_1$ – як рівняння $y - y_1 = 0$.

Цікаво, що якщо пряма перетинає осі координат відповідно у точках $A(a,0)$ та $B(0,b)$, то рівняння такої прямої легко звести до вигляду $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. Його ще називають рівнянням у відрізках на осях.

Крім того, відзначимо, що рівняння будь-якої прямої, не паралельної осі ординат має такий загальний вигляд $y = kx + c$. Число k називають кутовим коефіцієнтом цієї прямої. Очевидно, що для прямої, яка проходить через вказані точки A_1 та A_2 число $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ при $x_2 \neq x_1$. Знаючи кутовий коефіцієнт k та координати однієї точки, можемо записати рівняння цієї прямої у вигляді $y - y_1 = k(x - x_1)$. Остання формула особливо зручна, якщо потрібно записати рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці $(x_1, f(x_1))$. Тоді одержимо $y - y_1 = f'(x_1)\cdot(x - x_1)$. Вкажемо також, що у випадку $k = \infty$ рівнянням прямої, яка проходить через $A_1(x_1, y_1)$ є $y = y_1$.



Мал.134

Зауважимо, що кутові коефіцієнти паралельних прямих співпадають, а добуток кутових коефіцієнтів перпендикулярних прямих, не паралельних координатним осям, дорівнює –1. Зрозуміло, що для прямих, паралельних осям, один з таких коефіцієнтів дорівнює нулю, а другий – нескінченності.

Застосуємо сказане тут для обґрунтування того, що у довільному трикутнику висоти перетинаються в одній точці. Виберемо систему координат так, щоб сторона AB лежала на осі абсцис, а висота CC_1 – на осі ординат (див. мал. 134). Нехай координати вершин трикутника ABC у цій системі є такими $A(a,0)$, $B(b,0)$, $C(0,c)$, де $a \neq b$, $c \neq 0$. Запишемо рівняння прямих AC та BC як рівняння у відрізках на осях. Відповідно одержимо $\frac{x}{b}+\frac{y}{c}=1$. Виразимо з них y через x, знайдемо кутові коефіцієнти таких прямих $k_{AC}=-\frac{c}{a}$ та $k_{BC}=-\frac{c}{b}$ (якщо $ab = 0$, то ΔABC прямокутний і, очевидно, висоти перетинаються у точці C_1). Запишемо тепер рівняння прямих BB_1 та AA_1. Оскільки $BB_1 \perp AC$, $AA_1 \perp BC$, то відповідно одержимо

$$y = \frac{a}{c}(x-b) \text{ та } y = \frac{b}{c}(x-a).$$

Розв'язуючи систему з двох останніх рівнянь знайдемо, що у ній $x=0$. А отже, всі три висоти перетинаються на осі ординат. Легко визначити і ординату точки H перетину цих висот $y_H = -\frac{ab}{c}$ та відстань $CH = c + \frac{ab}{c}$.

Такий спосіб розв'язування задач називається методом координат. Пропонуємо читачам, скориставшись ним, довести, що і медіани довільного трикутника перетинаються в одній точці.

Досить ефективним є цей метод для розв'язування задач на знаходження геометричного місця точок на основі заданих метричних співвідношень (див. задачу 15.10). Розглянемо ще декілька таких прикладів.

Задача 23.5. (9-10). Знайдіть геометричне місце точок, сума квадратів відстаней від яких до двох заданих точок $A_1(-a,0)$ та $A_2(a,0)$ є величина стала і дорівнює $4a^2$.

Розв'язання. Позначимо через $M(x,y)$ довільну точку цієї кривої. Тоді

$$MA_1 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}\ ; \qquad MA_2 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}\ .$$

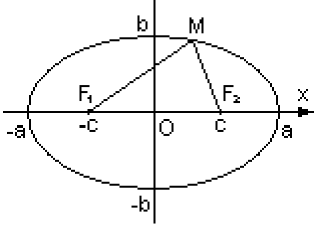
Враховуючи умову задачі, одержимо рівняння

$$(x+a)^2 + y^2 + (x-a)^2 + y^2 = 4a^2,$$

яке після очевидних спрощень зводиться до вигляду $x^2 + y^2 = a^2$. Зрозуміло, що таке геометричне місце точок є колом радіуса $R = a$ з центром у початку координат.

Зауважимо, що цього і слід було сподіватися, якщо пригадати теорему Піфагора та властивість вписаних кутів, які спираються на діаметр. Тож ускладнимо дещо наступне завдання.

Задача 23.6. (9-10). Знайдіть геометричне місце точок, сума відстаней від яких до двох заданих точок $F_1(-c,0)$ та $F_2(c,0)$ є величина стала і дорівнює $2a$.



Мал.135

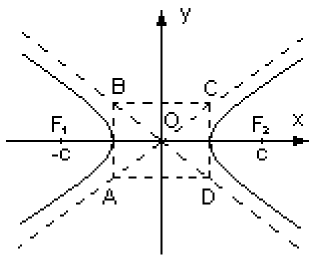
Розв'язання. Як і в попередній задачі, через $M(x,y)$ позначимо довільну точку цієї кривої. Враховуючи умову задачі, приходимо до рівняння

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a\ .$$

Перенесемо другий доданок з його лівої частини вправо і виконаємо піднесення до квадрату. Після очевидних спрощень, які пропонуємо читачам виконати самостійно, і ще одного піднесення до квадрату одержимо рівняння $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, де $b^2=a^2-c^2$, ($a>c$).

Крива, яка задається цим рівнянням, називається еліпсом (див. мал. 135).

Зауважимо, що одержане рівняння еліпса називається канонічним, числа a та b – довжини півосей еліпса, точки F_1 та F_2 – його фокуси, точка O – центр еліпса. Якщо центр знаходиться у точці $M_o(x_o,y_o)$, то одержуємо таке рівняння $\frac{(x-x_o)^2}{a^2}+\frac{(y-y_o)^2}{b^2}=1$. І нарешті, якщо точки F_1 та F_2 співпадають, тобто $c=0$, $a=b$, то як частковий випадок, будемо мати $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$, тобто $x^2+y^2=a^2$, чи, загальніше, $(x-x_o)^2+(y-y_o)^2=a^2$. А це вже знайоме нам рівняння кола.



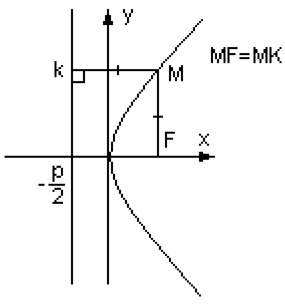
Мал.136

Задача 23.7. (9-10). Знайдіть геометричне місце точок, модуль різниці відстаней від яких до двох заданих точок $F_1(-c,0)$ та $F_2(c,0)$ є величина стала і дорівнює $2a$.

Розв'язання. Якщо $M(x,y)$ – довільна точка цієї кривої, то $\left|\sqrt{(x+a)^2+y^2}-\sqrt{(x-a)^2+y^2}\right|=2a$. Розкриваючи модуль і позбуваючись коренів, як і в попередній задачі (зробіть це самостійно), приходимо до рівняння $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, де $b^2=c^2-a^2$, ($a\le c$). Крива, яка задається цим рівнянням, називається гіперболою (див. мал. 136).

Одержане рівняння гіперболи є канонічним, числа a та b – відповідно довжини дійсної та уявної осей цієї гіперболи, F_1 та F_2 – її фокуси, прямі, які містять діагоналі прямокутника $ABCD$, – асимптоти гіперболи. Зауважимо, що відомі вам зі шкільного курсу гіперболи $y=\frac{k}{x}$ мають своїми асимптотами осі координат, а осі таких гіпербол повернуті по відношенню до осей координат на кут $45°$ за чи проти годинникової стрілки. Зауважимо також, що гіперболою є і графік функції $y=\frac{ax+b}{cx+d}$, якщо $ad-bc\ne 0$.

Задача 23.8. (9-10). Знайдіть геометричне місце точок, для яких відстань до заданої точки $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ дорівнює відстані до заданої прямої $x=-\frac{p}{2}$, $p\ne 0$.



Мал.137

Розв'язання. Якщо $M(x,y)$ довільна точка цієї кривої, то

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|.$$

Після піднесення обох частин цієї рівності до квадрату і очевидних спрощень одержимо рівняння $y^2=2px$, яке називають канонічним рівнянням параболи (див. мал. 137 для $p>0$). Випадок $p<0$ проаналізуйте самостійно.

Точка F називається фокусом, а пряма $x=-\frac{p}{2}$ – директрисою цієї параболи. Подумайте самостійно, якими є фокус та директриса відомої вам зі шкільного курсу математики параболи $y=x^2$.

Як і коло, еліпс та гіпербола, парабола відноситься до так званих кривих другого порядку. Цікаво, що кожну з цих кривих можна одержати при перетині конічної поверхні деякою площиною, коло – при перетині площиною, перпендикулярною осі конуса, гіперболу – при перетині площиною, паралельною осі конуса, параболу – при перетині площиною, паралельною твірній конуса, еліпс – у всіх інших випадках перетину конічної поверхні площиною.

Цікавими є також оптичні властивості таких кривих: промінь, який вийшов з одного фокуса еліпса, відбившись від поверхні цього еліпса, попаде в інший його фокус; промінь, який вийшов з одного фокуса гіперболи, відбившись від її поверхні, пройде по прямій, на якій лежить інший фокус цієї гіперболи; промінь, який вийшов із фокуса параболи, відбившись від її поверхні, пройде по прямій, паралельній осі цієї параболи. Але детальне вивчення цих властивостей виходить за рамки нашої книжки.

То ж повернемося знову до методу координат та його застосування під час розв'язування задач. Для цього ще раз згадаємо про вектори.

Кажуть, що пара взаємно перпендикулярних векторів $\vec{i}$ та $\vec{j}$ утворює прямокутний базис на площині. Оскільки для довільного вектора $\vec{a}$ з цієї площини існує єдина пара чисел x та y таких, що $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}$ то логічно називати таку пару координатами вектора $\vec{a}=(x,y)$. Якщо вектор $\vec{a}$ визначається початком $A_1(x_1,y_1)$ та кінцем $A_2(x_2,y_2)$, то його координати є такими: x_2-x_1 та y_2-y_1. Зрозуміло, що довжина цього вектора $\left|\vec{a}\right|=A_1A_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$, тобто дорівнює кореню квадратному із суми квадратів його координат. Відзначимо, що через координати може бути виражений також скалярний добуток векторів. Якщо $\vec{a}=(a_1,a_2)$, $\vec{b}=(b_1,b_2)$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$. Для ненульових векторів можна визначити також кут між ними:

$$\cos\varphi=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}}.$$

Відзначимо також, що $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2)$, $\quad k\vec{a}=(ka_1,ka_2)$.

Задача 23.9. (8-10). Знайдіть кут між діагоналями паралелограма, у якого точки $A(1,0)$, $B(2,1)$ та $C(1,2)$ є трьома послідовними його вершинами. Що ви ще можете сказати про цю фігуру?

Розв'язання. Нехай D – четверта вершина цього паралелограма. Легко знайти, що $D(0;1)$. Тоді $\overrightarrow{AC}(1-1,2-0)=(0;2)$, $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=$ $=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}=(-1,1)-(1,1)=(-2,0)$. Оскільки $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0\cdot(-2)+2\cdot0=0$, то діагоналі цього паралелограма перпендикулярні. Тому він є ромбом. Крім того $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$, $\left|\overrightarrow{BD}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2$. А отже, – це прямокутник. Остаточно одержуємо, що даний паралелограм є квадратом.

Повертаючись також до рівнянь прямих на площині, зауважимо, що пряма $\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n}$ є паралельною до вектора $\vec{l}\,(m,n)$ і проходить через точку $A_1(x_1, y_1)$, а пряма $m(x - x_1) + n(y - y_1) = 0$, що проходить через цю ж точку, перпендикулярна до вектора $\vec{l}\,(m,n)$.

Узагальнюючи сказане, відзначимо, що з аналогічною ситуацією ми матимемо справу і у просторовому випадку. При цьому до абсциси та ординати точки добавиться ще третя координата, яку називають аплікатою. Якщо $A_1(x_1, y_1, z_1)$ та $A_2(x_2, y_2, z_2)$ – дві задані точки, то середина відрізка A_1A_2 матиме координати $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$; $\overrightarrow{A_1A_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Якщо $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, то:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$;

2) $\cos\varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\left|\bar{a}\right| \cdot \left|\bar{b}\right|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$;

3) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$;

4) $k\vec{a}(ka_1, ka_2, ka_3)$.

$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ – рівняння прямої, яка проходить через точки

$A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{k}$ – рівняння прямої, яка проходить через точку $A_1(x_1, y_1, z_1)$ паралельно до вектора $\vec{l}\,(m, n, k)$, $m(x - x_1) + n(y - y_1) + k(z - z_1) = 0$ – рівняння площини, яка проходить через точку $A_1(x_1, y_1, z_1)$ перпендикулярно до вектора $\vec{l}\,(m, n, k)$.

Відповідно, $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$ є рівнянням сфери радіуса R з центром $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Проілюструємо на прикладі, як можна скористатися просторовими координатами до розв’язування планіметричної задачі.

Задача 23.10. (10-11). Нехай ABC – довільний рівносторонній трикутник, а M – довільна точка на вписаному колі. Доведіть, що $MA^2 + MB^2 + MC^2 = const$.

Розв’язання. Введемо просторову систему координат у якій $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$, $M(x, y, z)$. Коло, вписане у трикутник ABC є перетином деякої сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ площиною $x + y + z = 1$. А отже,

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = \left[(x-1)^2 + y^2 + z^2\right] + \left[x^2 + (y-1)^2 + z^2\right] + \left[x^2 + y^2 + (z-1)^2\right] =$$

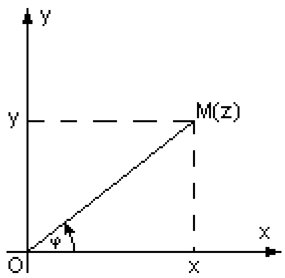
$$3\left(x^2+y^2+z^2\right)-2(x+y+z)+3=3R^2+1=const\ .$$

Зауважимо, що оскільки сфера має центр $M_0(0{,}0{,}0)$ і дотикається до гіпотенузи прямокутного трикутника M_0AB, то $R=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Інший напрям для узагальнення одержуємо, вибираючи в ролі базису на площині чи у просторі не ортогональні вектори. Зокрема, оскільки будь-який вектор $\vec{c}$ площини можна подати єдиним способом у вигляді $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$, де $\vec{a}$ та $\vec{b}$ – два не колінеарні вектори цієї площини, то пару (x,y) можна вважати координатами вектора $\vec{c}$ у базисі з векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$. Осі координат такої системи матимуть напрямок векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

Більше того, на площині можна обійтися лише однією віссю $\overrightarrow{OP}$, а координати кожної точки X визначити за відстанню цієї точки до точки O та кутом між векторами $\overrightarrow{OP}$ та $\overrightarrow{OX}$.

Відповідно у просторовому випадку матимемо ще більше можливостей для визначення положення точки.



Мал.138

Ми не будемо зупинятися на аналізі таких можливостей, але звернемо увагу читачів на ще один цікавий підхід до введення системи координат на площині, який дає змогу вдало поєднувати переваги векторного та координатного методів розв’язування задач. Мова йде про так звані комплексні координати. Коротко проінформуємо читача, в чому суть справи. Для цього поставимо у відповідність комплексному числу $z=x+iy$, де $i^2=-1$, точку M, координати якої у прямокутній системі координат (див. мал. 138) відповідно дорівнюють x та y. Зрозуміло, що розташування цієї точки також однозначно визначається вектором $\overrightarrow{OM}$. Довжину цього вектора $\left|\overrightarrow{OM}\right|=\sqrt{x^2+y^2}$ називають модулем комплексного числа $z=x+iy$ і позначають $|z|$. Орієнтований кут φ між $\overrightarrow{OM}$ та віссю OX називають аргументом числа z. Очевидно, що $\sin\varphi=\frac{y}{|z|}$, $\cos\varphi=\frac{x}{|z|}$. Тому $z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Таке представлення комплексного числа називають тригонометричною формою. Величину кута φ позначають через $\arg z$. Число $\bar{z}=x-iy$ називають спряженим до $z=x+iy$. Точка $\overline{M}(\bar{z})$ симетрична до $M(z)$ відносно осі OX. Якщо $z=\bar{z}$, то число z є дійсним. Очевидно, що $|\bar{z}|=|z|$, $\arg\bar{z}=-\arg z$.

Оскільки кожному комплексному числу z відповідає деякий вектор $\overrightarrow{OM}$, то і додавання та множення на дійсні числа комплексних чисел інтерпретуємо як дії над векторами. А саме, якщо a та b – комплексні координати точок A та B, то число $c=a+b$ будемо називати як координату такої точки C, то $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$, а число αa – як координату точки C для якої $\overrightarrow{OC}=\alpha\cdot\overrightarrow{OA}$. Комплексному числу $d=a-b$ відповідатиме точка D, для якої $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$. Зокрема, відстань між точками A та B дорівнює $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{OD}\right|=|a-b|$.

Таким чином ми одержуємо, що $z_1+z_2=(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)= \quad =(x_1+x_2)+(iy_1+iy_2)$, $\alpha z=\alpha(x+iy)=\alpha x+i\alpha y$. Що ж стосується добутку двох комплексних чисел, то для нього будемо мати $(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=x_1x_2+ix_1y_2+iy_1x_2+i^2y_1y_2=x_1x_2-y_1y_2+i(x_1y_2+y_1x_2)$. Зокрема, $z\cdot\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2=|z|^2$. Останньою рівністю скористаємось і для введення операції ділення $\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}=\frac{z_1\cdot\overline{z_2}}{|z_2|^2}$. Легко одержати також наступні властивості дій над комплексними числами:

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2},\ \overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2},\ \overline{z_1:z_2}=\overline{z_1}:\overline{z_2}.$$

А тепер перейдемо безпосередньо до властивостей, пов’язаних з геометричними застосуваннями. Ми вже встановили, що $AB=|a-b|$. Оскільки $z\cdot\bar{z}=|z|^2$, то також $AB^2=(a-b)(\bar{a}-\bar{b})$. Рівняння $z\cdot\bar{z}=R^2$ задає коло з центром O радіуса R. Відповідно $(z-a)(\bar{z}-\bar{a})=R^2$ визначає коло такого ж радіуса з центром $A(a)$.

Далі відзначимо, що точки $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ лежать на одній прямій тоді і тільки тоді, коли $c=\lambda a+\mu b$, де λ та μ – такі дійсні числа, для яких $\lambda+\mu=1$. Зокрема, при $\lambda=\mu=\frac{1}{2}$, тобто $c=\frac{1}{2}(a+b)$, точка C є серединою відрізка AB. Зауважимо також, що для паралелограма $ABCD$ його центр має комплексну координату $z=\frac{1}{2}(a+c)=\frac{1}{2}(b+d)$. Якщо не виключати виродження паралелограма у відрізок, то рівність $a+c=b+d$ є необхідною і достатньою умовою того, щоб $ABCD$ був паралелограмом.

Умову колінеарності двох векторів $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{CD}$ можна записати у вигляді

$$(a-b)(\bar{c}-\bar{d})=(\bar{a}-\bar{b})(c-d).$$

Застосовуючи її до векторів $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$, одержуємо

$$(a-b)(\bar{a}-\bar{c})=(\bar{a}-\bar{b})(a-c).$$

Ця рівність є критерієм належності точок A, B, C одній прямій. Іноді її переписують у симетричному вигляді:

$$a(\bar{b}-\bar{c})+b(\bar{c}-\bar{a})+c(\bar{a}-\bar{b})=0.$$

Фіксуючи тут точки A, B і вважаючи точку C змінною із координатою z, одержуємо рівняння прямої, яка проходить через точки A та B:

$$(\bar{a}-\bar{b})z+(b-a)\bar{z}+a\bar{b}-b\bar{a}=0.$$

Зокрема, рівняння прямої OA має вигляд $\bar{a}z=a\bar{z}$.

Умова перпендикулярності відрізків AB та CD запишеться таким чином:

$$(a-b)(\bar{c}-\bar{d})+(\bar{a}-\bar{b})(c-d)=0.$$

Зауважимо, що всі ці умови суттєво спрощуються, якщо точки A, B, C, D лежать на одиничному колі $z\bar{z}=1$. У такому разі можна виконати заміни $\bar{a}=\frac{1}{a}$, $\bar{b}=\frac{1}{b}$, $\bar{c}=\frac{1}{c}$, $\bar{d}=\frac{1}{d}$. Пропонуємо читачам зробити це самостійно і переконатися, що у такому випадку $AB\,||\,CD \Leftrightarrow ab=cd$, $AB\perp CD \Leftrightarrow ab+cd=0$, а рівняння прямої AB має вигляд $z+ab\bar{z}=a+b$.

Уже цих властивостей достатньо, щоб розв'язувати цілком змістовні задачі. Розглянемо декілька прикладів.

Задача 23.11. (10-11). Знайдіть комплексну координату точки перетину дотичних до кола $z\bar{z}=1$, проведених у точках $A(a)$, $B(b)$.

Розв'язання. Якщо $M(z)$ – довільна точка дотичної до цього кола, проведеної у точці $A(a)$, то $OA\perp AM$. Отже, $a(\bar{a}-\bar{z})+\bar{a}(a-z)=0$. Оскільки $a\bar{a}=1$, то рівняння дотичної MA набуває вигляду: $\bar{a}z+a\bar{z}=2$. Аналогічно одержуємо рівняння дотичної у точці $B(b)$: $\bar{b}z+b\bar{z}=2$. Виключаючи з цієї системи $\bar{z}$, знаходимо $z=\frac{2(a-b)}{a\bar{b}-\bar{a}b}$. Враховуючи, що $\bar{a}=\frac{1}{a}$, $\bar{b}=\frac{1}{b}$, остаточно будемо мати $z=\frac{2ab}{a+b}$.

Задача 23.12. (10-11). Знайдіть комплексну координату точки перетину січних AB та CD одиничного кола $z\bar{z}=1$, якщо точки $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$ лежать на цьому колі.

Розв'язання. Запишемо рівняння прямих AB та CD. Із системи цих рівнянь

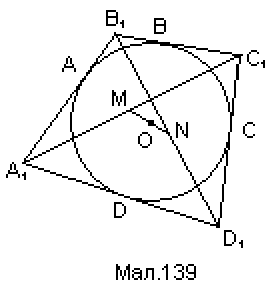
$$\begin{cases} z+ab\bar{z}=a+b, \\ z+cd\,\bar{z}=c+d, \end{cases}$$

легко знаходимо

$$z=\frac{(a+b)cd-(c+d)ab}{cd-ab},$$

причому $cd-ab\neq 0$, якщо AB та CD не є паралельними.

Задача 23.13. (10-11). Доведіть, що центр кола, вписаного у чотирикутник, лежить на прямій, яка проходить через середини діагоналей цього чотирикутника (теорема Ньютона).



Мал.139

Розв'язання. Виберемо центр вписаного у чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$ кола за початок координат. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що радіус цього кола дорівнює одиниці. Нехай воно дотикається до сторін чотирикутника у точках $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$ (див. мал. 139). На основі розв'язання задачі 23.11. одержимо комплексні координати вершини A_1, B_1, C_1, D_1:

$$a_1 = \frac{2ad}{a+d}, \qquad b_1 = \frac{2ab}{a+b},$$

$$c_1 = \frac{2bc}{b+c}, \qquad d_1 = \frac{2cd}{c+d}.$$

Тоді для середин діагоналей AC та BD точок $M(m)$ та $N(n)$ відповідно знайдемо $m = \frac{1}{2}(a_1 + c_1) = \frac{ad}{a+d} + \frac{bc}{b+c}$, $n = \frac{1}{2}(b_1 + d_1) = \frac{ab}{a+b} + \frac{cd}{c+d}$. Легко побачити, що $\frac{m}{n} = \frac{(a+b)(c+d)}{(b+c)(d+a)}$. Оскільки $\overline{a} = \frac{1}{a}$, $\overline{b} = \frac{1}{b}$, $\overline{c} = \frac{1}{c}$, $\overline{d} = \frac{1}{d}$, то також $\frac{\overline{m}}{\overline{n}} = \frac{(\overline{a}+\overline{b})(\overline{c}+\overline{d})}{(\overline{b}+\overline{c})(\overline{d}+\overline{a})} = \frac{(a+b)(c+d)}{(b+c)(d+a)} = \frac{m}{n}$. Отже, $m\overline{n} = \overline{m}n$, а тому точки M, O, N лежать на одній прямій.

Як видно із наведених тут прикладів, кожна із останніх трьох задач досить просто розв'язується з допомогою комплексних координат. Пропонуємо читачам розглянути аналоги цих задач у декартовій системі координат і порівняти, котрий зі способів розв'язання виявиться більш ефективним. А для тих, хто бажає більш детально познайомитися з методом, рекомендуємо книгу З. А. Скопеця "Геометрические миниатюры" чи буквально дослівну копію одного з параграфів цієї книжки – статтю Понаріна Я. П. "Метод комплексных чисел в планиметрии" (Математика в школе, 1991, № 2, ст. 46–54).

Вправи до § 23

1. (8-9). Знайдіть координати точок перетину: а) медіан, б) висот трикутника ABC з вершинами $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$.
2. (8-9). Зобразіть множину точок площини, координати яких задовольняють:
   а) рівняння $|x| + |y| = 1$; б) нерівність $x^2 + y^2 + 7 \le 4(|x| + |y|)$.
3. (9-10). Знайдіть геометричне місце точок M, для яких: а) $MA^2 + MB^2 = d^2$, б) $MA^2 - MB^2 = d^2$, в) $MA : MB = n$, якщо A та B – дві фіксовані точки, d та n – два додатні числа.
4. (9-10). Доведіть, що якщо координати вершин трикутника раціональні, то і центр кола, описаного навколо даного трикутника, також має раціональні координати.
5. (9-10). Доведіть, що на колі $x^2 + y^2 = 3$ немає жодної точки, обидві координати якої раціональні.
6. (9-10). Доведіть, що параболи $y = x^2$ та $y = 2x^2$ гомотетичні. Знайдіть центр та коефіцієнт гомотетії.
7. (8-10). Запишіть рівняння кола, яке дотикається до обох координатних осей і проходить через точку $A(2;9)$.
8. (8-10). Запишіть рівняння кола, яке має центр $A(6;7)$ і дотикається до прямої $5x - 12y - 24 = 0$.
9. (9-10). Напишіть рівняння дотичної до кола $x^2 + y^2 = 1$:
   а) у точці $A\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; б) дотичної, яка проходить через точку $B(1;3)$.

10. (9-10). Запишіть рівняння спільної дотичної до парабол $y = x^2 + 4x + 8$ та $y = x^2 + 8x + 4$.
11. (8-9). Доведіть, користуючись методом координат, що для довільної точки M на основі AC рівнобедреного трикутника ABC виконується рівність $BC^2 - BM^2 = AM \cdot CM$.
12. (9-10). Середини сторін *AB* і *CD*, *BC* і *DE* опуклого п'ятикутника з'єднані відрізками. Доведіть, що відрізок, який з'єднує середини одержаних відрізків, паралельний до *AE* і дорівнює $\frac{AE}{4}$.
13. (8-10). Точки $A(1,2,1)$, $B(3,-1,7)$, $C(7,4,-2)$ є вершинами трикутника. Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений:

    а) обчислюючи довжини його сторін;

    б) обчислюючи величини його кутів.
14. (10-11). Пряма, що проходить через точки дотику сторін *AB* та *BC* чотирикутника *ABCD* до вписаного в нього кола, перетинається з прямою, яка проходить через точки дотику до даного ж кола сторін *CD* та *AD*. Доведіть, користуючись методом комплексних координат, що точка перетину цих прямих лежить на продовженні діагоналі *AC*.
15. (10-11). Користуючись методом комплексних координат, доведіть теорему Бріаншона: діагоналі *AD*, *BE* та *CF* описаного шестикутника *ABCDEF* перетинаються в одній точці.

§ 24. Бути такого не може! (?)

У цьому параграфі зупинимося на задачах, в яких перше враження стосовно можливої відповіді часто буває помилковим. Водночас для знаходження правильної відповіді необхідно проявити деяку кмітливість. Розпочнемо із задач-жартів.

Задача 24.1. (7-8). Троє попросили засмажити їм по одному курчаті. Кожний з’їв своє курча, і ще двоє курчат залишилося. Чи могло таке статися?

Розв’язання. Так, якщо прізвище того, хто з’їв своє курча, Кожний.

Задача 24.2. (7-8). Від числа дванадцять забрали половину. Чи могло залишитися число сім?

Розв’язання. Могло. Наприклад, якщо від XII забрати нижню половину, то одержимо VII.

Задача 24.3. (7-8). Чи можна з чотирнадцяти однакових паличок довжиною 7 см кожна скласти один метр?

Розв’язання. Можна. Наприклад,

I МЕТР

Перейдемо до задач дещо ближчих до суто математики.

Задача 24.4. (7-8). Яку максимальну кількість дерев можна посадити по периметру трикутної ділянки зі сторонами 135 м, 110 м, 250 м, якщо відстань між деревами має бути не меншою 3 м?

Розв’язання. Жодного, оскільки трикутника із такими довжинами сторін не існує.

Задача 24.5. (8-9). Дорога Петруся до школи проходить повз п’яти садків. Петрусь стверджує, що у першому і другому садках разом є 9, другому і третьому – 13, третьому і четвертому – 19, четвертому і п’ятому – 11, п’ятому і першому – 16 дерев. Чи можна на основі його даних встановити загальну кількість дерев у всіх п’яти садках? Якщо так, то знайдіть цю кількість.

Розв’язання. Нехай x_k – кількість дерев у k-му садку. Тоді $x_1+x_2=9$, $x_2+x_3=13$, $x_3+x_4=19$, $x_4+x_5=11$, $x_5+x_1=16$. Додавши ці рівності, після ділення на 2 одержимо $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=34$. Однак відповідь про те, що така сума дорівнює 34, виявляється поспішною і неправильною. Віднімаючи від останньої рівності третє та п’яте рівняння, знайдемо, що $x_2=-1$. Оскільки кількість дерев у садку не може бути від’ємною, то Петрусь помилився у своїх підрахунках.

Задача 24.6. (8-9). Малий Петрусь пасе гуси та телята. Він підрахував, що у його зграї є 11 гусок. Скільки телят стереже Петрусь, якщо відомо, що всі особи його зграї разом мають 15 голів та 36 ніг?

Розв'язання. Віднімемо від 15 число 11 і одержимо очікувану відповідь – 4 телят. "Ну, не обманете", – скаже вдумливий читач і порахує, що всього ніг виходить $4\cdot 4+11\cdot 2=38$, а не 36, як це відомо з умови задачі. І буде правий. Ось тільки висновки з цього можна зробити цілком протилежні. Перший, який напрошується відразу: задача не має розв'язку. Та, мабуть, цікавішим все таки буде другий, протилежний першому, висновок: задача має розв'язок, якщо Петрусь стереже трьох телят, 11 гусок та одного гусака.

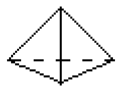
При розв'язуванні цієї задачі ми зіткнулися з альтернативою з двох можливих виборів. А ось приклад, у якому альтернатива допомагає у самому розв'язанні.

Задача 24.7. (10-11). Чи може ірраціональне число після піднесення до ірраціонального степеня стати раціональним?

Розв'язання. Може. Нескладно також навести відповідний приклад, але доведеться дещо повозитися з обґрунтуваннями. Тому вчинимо дещо хитріше. Розглянемо число $\alpha=\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}$. Якщо воно раціональне, то оскільки $\sqrt{2}$ є ірраціональним, задача буде розв'язана. Якщо ж α ірраціональне, то $\alpha^{\sqrt{2}}=\left(\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}=\left(\sqrt{2}\right)^{2}=2$ – раціональне число.

Інші випадки застосування альтернативи, які ми зараз розглянемо, пов'язані з переходом від плоского до просторового варіанту задачі.

Задача 24.8. (7-9). Чи можна із шести однакових паличок, не розламуючи їх, скласти чотири рівносторонні трикутники?



Розв'язання. Можна, наприклад, розмістивши їх вздовж ребер правильного тетраедра:

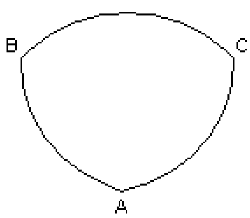
Задача 24.9. (8-10). Чи можна одним і тим же розхилом циркуля намалювати два кола різних радіусів?

Розв'язання. Можна. Наприклад, одне коло намалюємо на площині, а інше – на поверхні деякої сфери.

Задача 24.10. (8-10). Чи існує замкнута крива, всі точки якої рівновіддалені від деякої точки O, але яка не є колом?

Розв'язання. Так, існує. Це будь яка замкнута крива на сфері з центром O, яка не є колом.

Останній приклад яскраво підкреслює, як обережно треба ставитися до формулювання означень. Ось ще один приклад такого роду, який теж пов'язаний з колом.



Мал.140

Задача 24.11. (8-10). На площині розміщена деяка опукла фігура. Відомо, що будь-які дві паралельні прямі, які мають з цією фігурою кожна лише по одній спільній точці, розміщені на відстані d одна від одної. Чи обов'язково задана фігура є кругом з діаметром d?

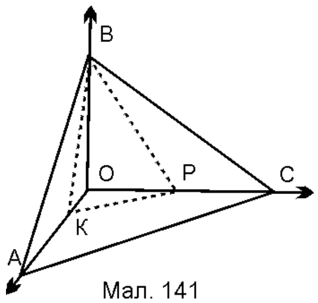
Розв'язання. Не обов'язково. Розглянемо фігуру, обмежену дугами таких кіл (див. мал. 140): дуга BC кола з центром A, дуга AC

кола з центром B та дуга AB кола з центром C. Якщо трикутник ABC рівносторонній зі стороною d, то фігура обмежена цими дугами задовольняє умови задачі (обґрунтуйте це самостійно), але не є кругом.

Зауважимо, що існує безліч прикладів фігур із вказаною властивістю. Чи зможете ви знайти ще хоч одну з них? А помилковий висновок, який зразу напрошувався при читанні умови цієї задачі, зайвий раз показує, що із такими "очевидними" висновками не потрібно поспішати. Так само, як і міркувати за аналогією при розв'язанні наступної задачі.

Задача 24.12. (10-11). Чи існує чотирикутна піраміда, дві протилежні бічні грані якої перпендикулярні до площини основи?

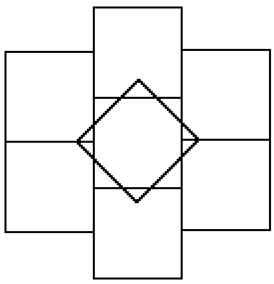
Перш ніж приступити до розв'язання проведемо аналогію із подібною задачею на площині: чи існує трикутник, дві бічні сторони якого перпендикулярні до основи? Ні, бо тоді вони паралельні між собою, а отже, трикутник утворитися не міг. Звідси зразу ж напрошується думка: такої піраміди не існує, бо протилежні бічні грані повинні бути паралельні між собою. Але цей висновок буде неправильним, оскільки із перпендикулярності двох площин до третьої площини зовсім не випливає їх паралельність.



Мал. 141

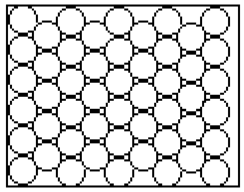
Розв'язання. У прямокутній системі координат $Oxyz$ проведемо площини KBP та ABC, як на мал. 141. Зрозуміло, що у чотирикутній піраміді $AKPCB$ дві протилежні грані ABK та PBC перпендикулярні до площини основи $AKPC$, оскільки кожна з них лежить у координатній площині, перпендикулярній до площини Oxy, в якій знаходиться основа цієї піраміди.

Наступні задачі будуть пов'язані з різноманітними покриттями.


Мал.142

Задача 24.13. (7-8). Чи можна покрити одиничний квадрат сімома такими ж одиничними квадратами так, щоб жодні два з них не перетиналися між собою, але кожен з них покривав хоч одну внутрішню точку заданого квадрата?

Розв'язання. Можна. Дивись, наприклад, покриття на малюнку 142.


Мал.143

Задача 24.14. (8-9). Чи можна покрити 50 кругів одиничного діаметра, які не перетинаються між собою, прямокутником розміром 6×8?

Розв'язання. Можна. Приклад такого покриття дивись на малюнку 143.

Задача 24.15. (8-9). Чи можна деякий трикутник на площині покрити іншим трикутником з меншим периметром.

Розв'язання. Ні, не можна. Доведення цього факту випливає з одержаного нами раніше, у § 18, аналогічного твердження для довільних опуклих многокутників.

У зв'язку з цією задачею цікавим виглядає її аналог у просторі.

Задача 24.16. (10-11). Чи можна всередині трикутної піраміди помістити іншу піраміду із більшою сумою довжин всіх її ребер, ніж у зовнішній піраміді?

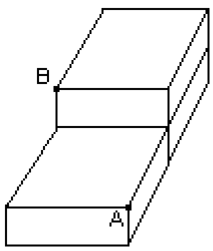
Пропонуємо читачам самостійно обґрунтувати, що відповідь на поставлене у задачі питання є позитивною. Чи зміниться характер відповіді, якщо замість суми довжин ребер порівнювати суми площ граней цих пірамід?

Із розмірами просторових тіл пов'язані і наступні дві задачі.

Задача 24.17. (9-10). Чи можна у кубі вирізати отвір, через який пройде куб таких самих розмірів?

Розв'язання. Здавалось би питання задачі виглядає цілком абсурдним. Та все ж такий отвір вирізати можна, спрямувавши його вздовж діагоналі куба. Якщо дивитися вздовж цієї діагоналі, то отвір матиме форму квадрата зі стороною, довжина якої дорівнює довжині сторони куба. Пропонуємо читачам самостійно виконати відповідні креслення. Для простоти можна розглянути круглий отвір із діаметром, який дорівнює діагоналі грані куба.

До речі, про довжину діагоналі куба можна дізнатися, провівши лише одне вимірювання довжини його ребра. Після цього одержаний результат достатньо буде тільки помножити на $\sqrt{3}$. А чи вдасться з допомогою тільки одного вимірювання лінійкою із поділками визначити довжину діагоналі прямокутного паралелепіпеда?

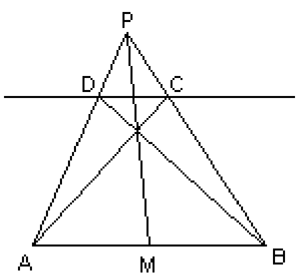


Мал.144

Задача 24.18. (8-9). При розкопках археологи виявили кілька штук однакових цеглин невідомих розмірів. Чи можна, не руйнуючи їх, визначити довжину діагоналі з допомогою лише одного вимірювання лінійкою?

Розв'язання. Якщо знайдено не менше трьох цеглин, то, поклавши їх, як на малюнку 144, достатньо виміряти відстань між точками A та B.

Зауважимо, що у геометрії лінійка іноді має дещо інше призначення, ніж вимірювання відстаней. При виконанні геометричних побудов її вважають односторонньою, нескінченної довжини і без поділок. Чи може виявитися достатньо такого інструмента для виконання якихось змістовних побудов. Не завжди. Наприклад можна довести, що користуючись лише лінійкою, не вдасться поділити заданий відрізок навпіл. Але, якщо ми матимемо додаткову пряму, паралельну такому відрізкові, то вказана побудова цілком можлива.

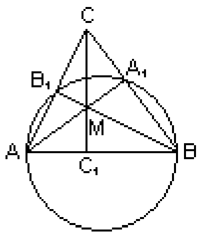


Мал.145

Задача 24.19. (9-10). Дано відрізок AB і паралельну до нього пряму. Користуючись лише лінійкою, поділити відрізок AB навпіл.

Розв'язання. Виберемо на заданій прямій, паралельній відрізку AB, такі точки C і D, щоб прямі AD та BC перетиналися (див. мал. 145). Нехай P – їхня точка перетину. Проведемо діагоналі трапеції $ABCD$. Пряма, яка проходить через P і точку перетину діагоналей ділить відрізок AB пополам. Пропонуємо читачам самостійно обґрунтувати останнє твердження.

Зрозуміло також, що, користуючись лише лінійкою, не можна намалювати жодного кола. Більше того, не вдасться навіть знайти центр уже намальованого кола. Але опустити перпендикуляр на діаметр такого кола – цілком посильна задача.

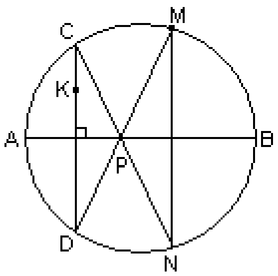


Мал.146

Задача 24.20. (9-10). Дано коло з діаметром AB і точка M всередині кола, яка не лежить на AB. Користуючись лише лінійкою, проведіть через M пряму, перпендикулярну до AB.

Розв'язання. Проведемо прямі AM та BM до перетину з колом відповідно у точках A_1 та B_1. Оскільки $\angle AB_1B = \angle AA_1B = 90°$, то прямі AB_1 та BA_1 перетинаються у деякій точці, яку ми позначимо через C (див. мал. 146). Тоді M – точка перетину висот трикутника ABC. Отже, шуканою прямою, перпендикулярною до AB, є пряма CM.

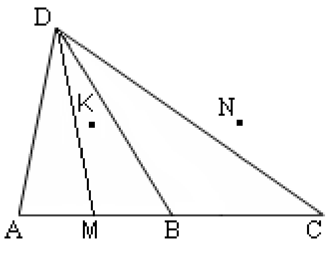
Задача 24.21. (9-10). Дано коло з діаметром AB і точка M на цьому колі, яка не співпадає ні з A ні з B. Користуючись лише лінійкою, проведіть через M пряму, перпендикулярну до AB.



Мал.147

Розв'язання. Виберемо довільну точку K всередині кола, яка не лежить на діаметрі AB, і скориставшись методом задачі 24.20 проведемо через K пряму CD, перпендикулярну до AB (див. мал. 147). Нехай P – точка перетину прямих DM та AB, N – точка перетину прямої CP з колом. Очевидно (доведіть це самостійно), що точка N симетрична до точки M відносно діаметра AB. А отже, пряма MN і буде шуканим перпендикуляром.

Пропонуємо читачам самостійно розв'язати аналогічну задачу у випадку, якщо точка M знаходиться зовні заданого кола. А ми тим часом перейдемо до іншого креслярського інструмента – циркуля. Як ви вже переконалися, для побудови кіл без нього ніяк не обійтися. Крім того, при геометричних побудовах циркулем можна виміряти довжину відрізка, відстань між двома заданими точками, відкласти точки на заданій відстані, побудувати коло довільного наперед заданого радіуса.



Мал.148

Покажемо, що, користуючись лише циркулем, можна розв'язувати деякі задачі, які були нам непосильними при використанні однієї лінійки.

Задача 24.22. (9-10). Дано відрізок AB. Користуючись тільки циркулем, знайдіть середину цього відрізка.

Розв'язання. Проведемо невеликий аналіз, припустивши, що шукана середина – точка M – нам відома, а також відомою є точка C на прямій AB така, що $AC = 2 \cdot AB$ (див. мал. 148). Якщо $AD = AB$, $CD = AC$, то $\Delta ADM \sim \Delta ACD$, (бо $AC : AD = AD : AM = 2$,

$\angle MAD = \angle DAC$). Оскільки $CD = AC$, то звідси випливає, що $MD = AD$. Із проведеного аналізу випливає такий спосіб побудови точки M :

а) на перетині кіл радіуса AB із центрами у точках A та B знаходимо точку K – вершину правильного трикутника ABK. Аналогічно за вершинами K та B будуємо точку – вершину правильного трикутника KBN, а за вершинами B та N – точку C, яка є вершиною правильного трикутника BNC. Зрозуміло, що точка C лежить на прямій AB, причому $AC = 2 \cdot AB$;

б) на перетині кіл радіуса AB із центром A та радіуса AC із центром C знаходимо точку D;

в) на перетині кола радіуса AD із центром D і відрізка AB одержуємо точку M – середину цього відрізка. Очевидно, що така точка єдина.

Пропонуємо читачам самостійно узагальнити задачу і запропонувати спосіб поділу відрізка AB на 3 частини, на n частин, користуючись лише циркулем.

Відзначимо, що одним циркулем вдається виконати і ряд інших побудов. Але, зрозуміло, що і цей інструмент не всесильний, адже жодну пряму, користуючись лише циркулем, провести не вдасться. Проте, якщо домовитися, що пряма вважається побудованою, коли відомі принаймні дві її різні точки, то ще з XVII століття відома **теорема Мора-Маскероні:** всі побудови циркулем і лінійкою можна виконати лише одним циркулем. Цікаво, що і з допомогою лінійки теж можна виконати всі такі побудови, якщо на площині уже є намальоване допоміжне коло і відзначений його центр. Зрозуміло, що при цьому доведеться домовитись, що коло вважається побудованим, якщо відзначено його центр і одна точка такого кола.

Зауважимо, що вимога використовувати при побудовах лише ці два інструменти склалася історично. По-перше, циркуль і лінійка доволі прості у користуванні, а по-друге, з їх допомогою ще стародавні математики вміли виконувати дуже багато різних побудов. Більше того, довгий час вважалося, що з допомогою лише циркуля і лінійки можна виконати будь-які побудови. Але ще з часів Фалеса та Піфагора (VI ст. до н.е.) відомі також три знамениті нерозв'язані задачі: 1) трисекція кута (тобто поділ кута на три рівні частини); 2) подвоєння куба (тобто побудова сторони куба із вдвічі більшим об'ємом); 3) квадратура круга (тобто побудова квадрата, площа якого дорівнює площі заданого круга). Тільки у XIX ст. було доведено, що всі ці побудови циркулем і лінійкою неможливі.

На завершення наведемо без доведення дві теореми, які часто використовуються для обґрунтування нездійсненності побудови лише циркулем і лінійкою.

Теорема 1. Якщо кубічне рівняння $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ з раціональними коефіцієнтами не має раціональних коренів, то жоден його корінь не можна побудувати циркулем та лінійкою.

Теорема 2. Якщо рівняння $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ з цілими коефіцієнтами має раціональний корінь $\frac{m}{n}$, де $\frac{m}{n}$ – нескоротний дріб, то m є дільником числа d, а n – дільником числа a.

Пропонуємо читачам скориставшись цими теоремами, а також тотожністю $\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$ для $\alpha = 20^\circ$ довести, що кут 60° не можна поділити на три рівні частини циркулем та лінійкою.

Чи зможете ви здійснити такий поділ для кутів 30°, 45°, 90°, 54°?

Що ж стосується поділу кута на більше число частин, то пропонуємо читачам, наприклад, самостійно розділити циркулем і лінійкою кут у 19° на 19 рівних частин. При яких ще натуральних n ви зможете поділити кут у n° на n рівних частин?

Для допитливих читачів відзначимо також, що існує цілий ряд приладів, який дає змогу виконати побудови, нездійсненні лише циркулем та лінійкою. Але оскільки задачі такого роду практично не зустрічаються на олімпіадах, то ми не будемо зупинятися на їх описанні. Пропонуємо тільки читачам подумати над способом побудови еліпса з допомогою циркуля з двома гострими ніжками і нитки фіксованої довжини. Цікаво, чи зумієте ви провести циркулем та лінійкою дотичну до такого еліпса в будь-якій його точці?

Вправи до § 24

1. (7-8). Прямокутне поле оточене ровом, ширина якого всюди однакова. Чи можна переправитися через рів, маючи лише дві дошки, довжина яких дорівнює ширині його?
2. (7-8). Чи можуть попарні відстані між чотирма точками дорівнювати відповідно 1 см, 2 см, 3 см, 4 см, 5 см та 6 см?
3. (8-9). Сума кількох чисел дорівнює 1. Чи може сума їх кубів бути більшою за 1, якщо кожне з чисел менше за 1?
4. (9-10). Чи можуть всі висоти трикутника бути більші за 2 см, а його площа – менша за 2 см^2? А навпаки?
5. (8-9). Чи обов'язково трикутник рівнобедрений, якщо в ньому центр вписаного кола рівновіддалений від середин: а) двох сторін; б) трьох сторін?
6. (8-9). Чи можна розмістити числа в таблиці 5×5 так, щоб суми чисел у кожному квадраті: а) 2×2; б) 3×3; в) 4×4 були від'ємними, а сума всіх чисел таблиці додатна? Розгляньте кожен зі цих випадків окремо.
7. (8-9). Швидкий поїзд рухався в одному напрямку 5,5 годин. Відомо, що за будь-який період часу тривалістю в 1 годину він проходив 60 км. Чи міг поїзд за весь цей час проїхати 360 км?
8. (8-9). *A, B, C* зіграли в шахи турнір у 8 кіл . Чи могло статися так, що за очками вони розташувалися у порядку *A, B, C*, а за перемогами – у порядку *C,B,A*?
9. (8-9). Чи можна куб з ребром довжиною 1 загорнути у квадратний листок паперу зі стороною 3?
10. (8-9). Чи можна зав'язати мотузку, взявши один її кінець у ліву руку, а другий – у праву , і не випускаючи цих кінців?
11. (9-10). Як, використовуючи циркуль та лінійку в сукупності не більше п'яти разів, визначити, чи можна навколо даного опуклого чотирикутника описати коло? (Задача арабського геометра Гассана ібн–Гайтема, XI століття).
12. (8-10). Лінійкою із поділками через 1 см проведіть хоч одну пряму, перпендикулярну до заданої.
13. (8-10). Циркулем і лінійкою проведіть перпендикуляр до прямої l із точки A, якщо а) $A\in l$, б) $A\notin l$, провівши у кожному з цих випадків по три лінії, включаючи і сам перпендикуляр.
14. (9-11). Побудуйте центр намальованого кола, користуючись лише циркулем..
15. (9-11). Дано дві паралельні прямі і відрізок AB на одній з них. Користуючись лише лінійкою намалюйте відрізок вдвічі більшої довжини.

§ 25. Замість епілогу

Осі і підійшла до кінця наша книжка. Як слід було чекати, далеко не всі методи розв’язування олімпіадних задач вдалося у ній принаймні згадати. Та й не ставив автор перед собою такої мети. Головне, щоб читач усвідомив, що він і сам може справлятися з нестандартними задачами. Які ж передумови необхідні для цього?

По-перше, варто проаналізувати, чим подібна пропонована задача до уже розв’язуваних вами, чи не можна звести її до відомої вам задачі. Саме цим і зумовлені посилання автора на задачі попередніх параграфів.

По-друге, чи не можна замінити розв’язання певної задачі розв’язанням рівносильної їй, але сформульованої дещо по-іншому. Наприклад, для розв’язування арифметичної задачі застосувати ідеї тригонометрії чи геометрії тощо.

По-третє, чи не вдасться розбити задачу на декілька простіших складових, з якими порівняно легко впоратися?

По-четверте, чи не можна на основі часткових випадків скласти уявлення про можливий розв’язок. Або, навпаки, розв’язавши задачу в загальному вигляді, одержати очікуваний результат як частковий випадок.

По-п’яте, виявити, які є відмінності в умові даної задачі від відомих вам задач. Чи не використовувалася специфіка таких відмінностей при розв’язуванні, здавалось би, зовсім не подібної задачі?

Уже звідси бачимо, що для успішного розв’язування олімпіадних задач основною передумовою є не лише знання програмового матеріалу (без цього звісно не обійтися), а й певний багаж базових задач та методів їх розв’язування. Саме створення такого багажу і було основною метою цієї книжки.

Отже, проаналізувавши зв’язок запропонованого вам завдання із близькими до нього задачами, ви приступаєте до безпосереднього розв’язування. Тут в першу чергу доцільно задуматися, яка роль тих чи інших даних в умові задачі, чи не можна ці дані послабити або й взагалі викинути, а чи, можливо, їх виглядає недостатньо. Також варто згадати, як поєднується використання частини цих даних під час розв’язування інших задач. Можливо це допоможе при знаходженні інших величин, які в самій умові не задані, але потрібні для розв’язування. Зокрема, при цьому можна міркувати приблизно так: “Я розв’язав би цю задачу, якщо б розв’язав простішу чи рівносильну їй”.

Як уже відзначалося вище, ефективним може бути розгляд часткових випадків чи узагальнення задачі, переформулювання її в інших термінах, в тому числі і в термінах суміжних дисциплін.

Часто на допомогу приходить використання так званих крайніх елементів. Деколи це може “підказати” вам метод доведення чи впевненість у реальності пропонованої конструкції.

Досить ефективним є метод доведення від супротивного. Адже часто із припущення, що вихідне твердження невірне, досить легко вдається прийти до протиріччя. Зокрема, саме на цій ідеї ґрунтується використання принципу Діріхле.

Широко використовуються також ідеї, пов'язані з парністю, групуванням, підрахунком двома способами, ідея альтернативи.

Не остання роль під час розв'язування задач відводиться міркуванням симетрії, циклічності, взаємно однозначної відповідності.

Корисним є також аналіз з кінця. Відомий, навіть, такий афоризм: "розумний починає розв'язувати задачу з кінця, а дурень залишає її розв'язання на початку".

У задачах, в яких не можна прослідкувати за всіма перетвореннями, доцільним є пошук інваріанта такої задачі. Інваріант іноді може використовуватися і для спрощення підрахунків у задачах із громіздкими даними. Відзначимо, що часто пошуку інваріанта сприяє вдало здійснена розмальовка.

У багатьох ситуаціях зручно зображати досліджувані об'єкти точками, а зв'язки між ними – відрізками чи векторами, будуючи цим самим так звані графи. Крім наглядності такого представлення, можна скористатися також властивостями самих графів.

Використовували ми разом з вами також найрізноманітніші добудови, рухи та інші перетворення на площині, переконалися в ефективності таких потужних методів як метод математичної індукції та метод координат, поєднання різних методів та ідей.

Не випадковим було виділення в окремий параграф задач, "розв'язання" яких на перший погляд здавалися очевидними, але були б невірними. Сюди ж були включені також задачі, розв'язання яких при накладених обмеженнях, здавалось би, є неможливими. Надіюсь, це зможе застерегти читачів від поспішних висновків та ймовірних помилок при розв'язуванні інших задач.

У процесі роботи з книгою читачі уже мали змогу закріпити набуті знання, розв'язуючи вправи до кожного з параграфів цієї книжки. Пропонований нижче набір задач для самостійного розв'язання дасть змогу як закріпити опрацьований матеріал в цілому, так і потренуватися у розв'язуванні найрізноманітніших задач, підбір яких здійснено на основі уподобань автора. При цьому радимо не гнатися за кількістю розв'язаних задач, а намагатися побачити у кожній розв'язаній задачі метод, який вдасться потім використати для розв'язування інших задач.

Відзначимо, що ряд методів розв'язування таких задач не знайшов свого висвітлення у цій книжці. Тож пропонуємо читачам для ознайомлення з ними скористатися як книгами із доволі об'ємного переліку літератури, так і матеріалами Соросівських, обласних та національних олімпіад, Міжнародного конкурсу "Кенгуру", публікаціями у збірниках "У світі математики", журналах, "Квант", "Математика в школе", "У світі математики", "Математика в школі", "Математика в школах України", газеті "Математика" тощо. Сподіваюсь, що у недалекому майбутньому цей перелік поповнять джерела з Інтернету, які стануть доступними для широкого кола користувачів.