І.В. Федак

Івано-Франківські обласні олімпіади з математики

2011-2015 рр.

м. Івано-Франківськ
2015

ББК: 22.1
УДК: 51(031)
Ф 42
Федак І. В. Івано-Франківські обласні олімпіади з математики 2011 – 2015 рр. – Івано-Франківськ: Голіней, 2015. – 64с.

Друкується за рішеннями вченої ради факультету математики та інформатики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника та методичної ради Івано-Франківського обласного інституту післядипломної педагогічної освіти

Рецензенти:

доктор фіз.-мат. наук, завідувач кафедри диференціальних рівнянь і прикладної математики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника ***Заторський Р. А.****,*

завідувач відділом Івано-Франківського обласного інституту післядипломної педагогічної освіти ***Голуб Л. В.***

Зібрані задачі Івано-Франківських обласних олімпіад з математики за 2011–2015 роки. Наведені відповіді та вказівки до розв'язування задач.

Для учнів 7–11 класів загальноосвітніх шкіл, гімназій та ліцеїв, професійно-технічних навчальних закладів, учителів математики, керівників математичних гуртків та всіх любителів нестандартних математичних задач.

Передмова

Математичні олімпіади школярів – дуже популярні змагання в Україні і мають уже вісімдесятилітню історію. Перша міська математична олімпіада була проведена у Києві з ініціативи видатного математика академіка М. П. Кравчука у 1935 році. А у 1961 році була проведена перша Республіканська олімпіада з математики, від якої беруть свій відлік Всеукраїнські олімпіади юних математиків. Щорічно таким олімпіадам передують змагання юних талантів у всіх регіонах України.

У пропонованому вашій увазі навчальному посібнику зібрані завдання III етапу Всеукраїнських математичних олімпіад 2011 – 2015 років та наведені їх лаконічні розв’язання.

Автор посібника – доцент кафедри математичного і функціонального аналізу Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника, Відмінник освіти України, Соросівський учитель – відомий в Україні популяризатор олімпіадного руху, систематично читає лекції на курсах післядипломної педагогічної освіти для вчителів математики, плідно працює з обдарованими дітьми. Підготовлена ним команда «Париська Сорбонна» Парищенської загальноосвітньої школи I – III ступенів першою із сільських шкіл стала призером XIV Всеукраїнського турніру юних математиків.

Федак І. В. є членом журі IV етапу Всеукраїнських учнівських олімпіад з математики (з 1990 року), членом журі Всеукраїнських турнірів юних математиків, членом редакційної ради Всеукраїнського журналу для школярів та студентів «У світі математики». Він – автор посібників «Розв’язування задач підвищеної складності з математики», «Готуємося до олімпіади з математики», збірників задач Івано-Франківських обласних олімпіад з 1987 по 2010 роки та ще близько сорока інших публікацій на олімпіадну тематику, автор багатьох задач математичних олімпіад та турнірів.

Впевнений, що і нова книга Івана Васильовича стане цінним подарунком всім любителям математики до 55-річчя проведення математичних олімпіад на загальнодержавному рівні.

Доктор фізико-математичних наук,
завідувач кафедри диференціальних
рівнянь і прикладної математики
Прикарпатського національного
університету імені Василя Стефаника Р.А. Заторський

УМОВИ ЗАДАЧ

2011 рік

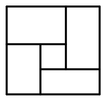
I тур

7 клас

1. Олеся записала натуральне число N. Після цього Андрійко записав одну шосту, одну п’яту, одну четверту, одну третю та одну другу числа N. Виявилося, що сума всіх записаних чисел є цілим числом. Яке найменше число могла записати Олеся?

2. До натурального числа N справа дописали дві різні ненульові цифри. Виявилося, що отримане число ділиться націло на N. При якому найбільшому N це можливо?

3. Квадрат розрізаний на чотири однакових прямокутники та один квадрат, як це показано на малюнку справа. Відомо, що площа меншого квадрата дорівнює 16, а площа кожного прямокутника – 96. Визначте сторони прямокутника.



4. Є 10 куп камінців, у яких знаходяться відповідно 3, 4, 5,…, 12 камінців. За один хід дозволяється обрати довільні три купки камінців та добавити в одну з них 1 камінець, у другу – 2 камінці, у третю – 3 камінці, або обрати довільні три купки камінців та забрати з однієї з них 1 камінець, з другої – 2 камінці, з третьої – 3 камінці при умові, що в обраних купках є достатня кількість камінців. Чи можна за скінченну кількість ходів отримати у кожній купці рівно по 2011 камінців?

8 клас

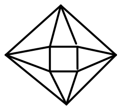
1. Відмінниці Олесі задали додому обчислити суму двох звичайних нескоротних дробів $\frac{a}{b}$ та $\frac{c}{d}$ (не обов’язково правильних). Її однокласник Андрійко хворів і перепитав це завдання телефоном, але не так почув і записав, що треба додавати дроби $\frac{b}{a}$ та $\frac{d}{c}$. Коли він їх додав, то виявилося, що відповіді Олесі та Андрійка співпали. Чи правильно додав свої дроби Андрійко, якщо Олеся отримала відмінну оцінку, а всі чотири дроби були попарно різними?

2. Знайдіть усі цілі числа n, які задовольняють рівність
$$(n-1)(n-3)(n-5)...(n-2011)=n(n+2)(n+4)...(n+2010).$$

3. Числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 та b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 є перестановками чисел $1,2,3,4,5$. Доведіть, що серед п'яти чисел $a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, a_4b_4, a_5b_5$ принаймні два дають однакову остачу при діленні на 5.

4. У трикутнику ABC проведено медіани AL, BM, CN. Доведіть, що $\angle ANC = \angle ALC$ тоді і тільки тоді, коли $\angle ABM = \angle LAC$.

5. У селі 8 будинків, план доріжок між якими зображений на малюнку.



По кожній з цих доріжок дозволено рухатися лише в одному напрямі. Чи можна так установити напрямки руху по доріжках, щоб від будь-якого будинку до будь-якого іншого будинку можна було дістатися, пройшовши у дозволених напрямах не більше, ніж по двох доріжках?

9 клас

1. Знайдіть усі значення параметра b, при яких для кожного фіксованого x принаймні одна з функцій $f_1(x)=x^2+2011x+b$ чи $f_2(x)=x^2-2011x+b$ набуває додатного значення.

2. Доведіть, що існує нескінченна кількість квадратів натуральних чисел, які можна подати у вигляді 2^n+2^m, де n, m – деякі різні натуральні числа.

3. У волейбольній першості 8 команд грають в одне коло, кожна з кожною рівно 1 раз. За перемогу нараховується 1 очко, за поразку 0 очок, нічиїх у волейболі не буває. Якщо по завершенні турніру різниця очок команд, які посіли перше та друге місця, не перевищує 1 очко, то між командами проводиться стикова гра. За аналогічних умов стикові ігри проводяться між командами, які посіли третє та четверте, п'яте та шосте, сьоме та восьме місця. Таким чином максимум може бути проведено 4 стикові ігри. Яка ж найменша кількість стикових ігор може бути проведена, якщо вважати, що навіть при рівній кількості набраних очок у кількох команд по завершенні турніру такі команди посідали різні місця?

4. Трикутник ABC вписаний у коло. У точках A та B проведені дотичні до цього кола, які перетинаються у точці T. Пряма, проведена через точку T паралельно до сторони AC, перетинає сторону BC у точці D. Доведіть, що $AD = CD$.

5. Для невід'ємних чисел a, b, c, сума яких не перевищує 2, доведіть нерівність

$$ab\left(a^2+b^2\right)+bc\left(b^2+c^2\right)+ca\left(c^2+a^2\right)\leq 8.$$

Чи може в цій нерівності досягатися рівність?

10 клас

1. Олеся записує у кожній вершині правильної трикутної призми одне з чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6. Андрійко записує на кожному ребрі число, яке дорівнює сумі чисел, записаних Олесею на кінцях цього ребра. Чи може Олеся записати числа так, щоб усі числа, які запише Андрійко виявилися різними?

2. Відомо, що x_1, x_2, x_3 – попарно різні дійсні числа.

а) Числа x_2, x_3 є нулями функції $f_1(x) = x^2 + p_1x + q_1$, числа x_3, x_1 – нулями функції $f_2(x) = x^2 + p_2x + q_2$, а числа x_1, x_2 – нулями функції $f_3(x) = x^2 + p_3x + q_3$. Чи обов'язково функція $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$ має нулі?

б) Числа x_2, x_3 є нулями функції $f_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$, числа x_3, x_1 – нулями функції $f_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$, а числа x_1, x_2 – нулями функції $f_3(x) = a_3x^2 + b_3x + c_3$. Чи обов'язково функція $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$ має нулі?

3. На площині намальована трапеція $ABCD$ з основами $BC = a$, $AD = 2a$. Користуючись лише лінійкою, побудуйте трикутник, площа якого дорівнює площі трапеції.

4. Числа $a_1, a_2, ..., a_{11}$ та $b_1, b_2, ..., b_{11}$ є перестановками чисел $1, 2, ..., 11$. Доведіть, що серед одинадцяти чисел $a_1b_1, a_2b_2, ..., a_{11}b_{11}$ принаймні два дають однакову остачу при діленні на 11.

5. Для невід'ємних чисел a, b, c, сума яких не перевищує 2, доведіть нерівність

$$ab\left(a^2+b^2\right)+bc\left(b^2+c^2\right)+ca\left(c^2+a^2\right)\leq 6.$$

Чи може в цій нерівності досягатися рівність?

11 клас

1. Розв'яжіть рівняння $\left[x^2\right]-2x+1=0,$ якщо $\left[x^2\right]-$ найбільше ціле число, яке не перевищує x^2.

2. Знайдіть усі натуральні числа a та $b,$ різниця яких дорівнює 2011, а добуток – квадрат натурального числа.

3. Є 2012 куп камінців. Перша з них містить 2^0 камінців, друга – 2^1 камінців, третя – 2^2 камінців, і так далі. Остання містить 2^{2011} камінців. За один хід дозволяється обрати довільні три купки камінців та добавити в одну з них 2 камінці, у другу – 3 камінці, у третю – 4 камінці, або обрати довільні три купки камінців та забрати з однієї з них 2 камінці, з другої – 3 камінці, з третьої – 4 камінці при умові, що в обраних купках є достатня кількість камінців. Чи можна за скінченну кількість ходів отримати у кожній купці рівно по 3^{1005} камінців?

4. Всередині паралелограма $ABCD$ розташовані кола γ_1 та γ_2, які дотикаються зовнішнім чином у точці K. Коло γ_1 дотикається до сторін AB та AD паралелограма, а коло γ_1 – до сторін BC та CD. Доведіть, що точка K лежить на діагоналі AC.

5. Знайдіть усі функції $f:R\to R,$ які задовольняють такі дві умови:

1) для всіх дійсних чисел x,y виконується рівність
$$f\left(2x\right)=f\left(x+y\right)f\left(y-x\right)+f\left(x-y\right)f\left(-x-y\right);$$
2) $f\left(x\right)\geq 0$ для всіх дійсних x.

II тур

7 клас

1. Знайдіть найбільше натуральне число, у якого всі цифри різні та кожні дві сусідні цифри відрізняються щонайменше на 2.

2. Використовуючи числа $1,2,3,...,20$ рівно по одному разу у ролі чисельників або знаменників, утворіть 10 таких звичайних дробів, щоб їх сума була цілим числом. Достатньо навести принаймні один такий приклад.

3. Чи існує опуклий чотирикутник, у якого протилежні сторони не паралельні, та який можна розрізати на 2011 рівнобедрених трикутників?

4. На дошці розміром 9×9 клітинок на центральному полі стоїть чорна фішка, а на середніх клітинках зовнішньої межі квадрату шириною в одну клітинку стоять 4 білі фішки. Перший гравець грає чорною фішкою і за один хід має право пересунути її на будь-яку сусідню клітинку по горизонталі чи по вертикалі, якщо на ній не стоїть біла фішка. Другий гравець своїм ходом виставляє додатково одну білу фішку на зовнішній межі квадрату, але обов'язково на таке поле, яке межує з полем, на якому вже стоїть біла фішка. Виграє перший гравець, якщо йому вдалося досягти зовнішньої межі квадрату. Якщо другий гравець зміг цьому завадити, то перемагає він. Хто переможе у такій грі, перший чи другий гравець?

5. Знайдіть усі двоцифрові натуральні числа N, які дорівнюють сумі цифр числа N, до якої додається куб суми цифр числа N.

8 клас

1. Знайдіть найбільше парне натуральне число, у якого всі цифри різні та кожні дві сусідні цифри відрізняються щонайменше на 2.

2. Знайдіть попарно різні натуральні числа a, b, c, d такі, що

$$\frac{1}{2011}=\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}-\frac{c}{c+1}-\frac{d}{d+1}.$$

Достатньо вказати хоч один набір таких чисел.

3. На сторонах AD та BC квадрата $ABCD$ вибрані точки M та N відповідно таким чином, що $AM = BN$. Точка X – основа перпендикуляра, опущеного з точки D на пряму AN. Доведіть, що кут MXC – прямий.

4. На дошці розміром 11×11 клітинок на центральному полі стоїть чорна фішка, а на середніх клітинках зовнішньої межі квадрату шириною в одну клітинку стоять 4 білі фішки. Перший гравець грає чорною фішкою і за один хід має право пересунути її на будь-яку сусідню клітинку по горизонталі чи по вертикалі, якщо на ній не стоїть біла фішка. Другий гравець своїм ходом виставляє додатково одну білу фішку на зовнішній межі квадрату, але обов'язково на таке поле, яке межує з полем, на якому вже стоїть біла фішка. Виграє перший гравець, якщо йому вдалося досягти зовнішньої межі квадрату. Якщо другий гравець зміг цьому

завадити, то перемагає він. Хто переможе у такій грі, перший чи другий гравець?

5. Натуральне число $k>1$. Знайдіть усі пари цілих чисел x, y, які задовольняють рівність $y^k = x^2 + x$.

9 клас

1. Знайдіть усі трицифрові натуральні числа N, які дорівнюють сумі цифр числа N, до якої додається куб суми цифр числа N.

2. П'ять років тому сумарний вік усіх синів у родині перевищував сумарний вік усіх доньок на 2 роки. З того часу у сім'ї народилася ще одна дитина, і тепер сумарний вік усіх доньок перевищує сумарний вік усіх синів на 2 роки. На скільки відрізнялися сумарний вік синів і сумарний вік доньок у родині два роки тому?

3. На папері у клітинку зі стороною 1 задано замкнену ламану без самоперетинів. Усі вершини ламаної лежать у вузлах сітки, а всі її ланки утворюють кут 45^o із лініями сітки. При цьому площа фігури, яку вона обмежує, дорівнює 8. Скільки вузлів сітки може лежати всередині (не на межі) ламаної?

4. У двох колах, які дотикаються зовнішнім чином у точці C, провели співнапрямлені діаметри A_1A_2 та B_1B_2 відповідно (тобто чотирикутник $A_1B_1B_2A_2$ є трапецією або паралелограмом). Коло з центром O на спільній внутрішній дотичній до даних двох кіл проходить через точку перетину прямих A_1B_2 та B_1A_2 і перетинає ці прямі у точках M та N відповідно. Доведіть, що пряма MN перпендикулярна до паралельних діаметрів A_1A_2 та B_1B_2.

5. Натуральне число $k>1$. Знайдіть усі пари цілих чисел x, y, які задовольняють рівність $y^k = x^2 + x$.

10 клас

1. Сума кількох послідовних натуральних чисел (більше одного) дорівнює 2011. Знайдіть усі набори таких чисел.

2. Послідовність (a_n) визначається такими умовами:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_{n+2} = (n+1)(a_n + a_{n+1}),\ \ n \in N.$$

На скільки нулів закінчується число a_{2011}?

3. На столі лежать цукерки. За один хід Петрик може забрати зі столу кілька з них. Першим ходом він забирає одну цукерку, а кожного наступного ходу може забрати або стільки ж цукерок, як підчас попереднього ходу, або вдвічі більше. За яку найменшу кількість ходів Петрик зможе забрати зі столу рівно 2011 цукерок?

4. У двох колах, які дотикаються зовнішнім чином у точці C, провели співнапрямлені діаметри A_1A_2 та B_1B_2 відповідно (тобто чотирикутник $A_1B_1B_2A_2$ є трапецією або паралелограмом). Коло з центром на спільній внутрішній дотичній до даних двох кіл проходить через точку перетину прямих A_1B_2 та B_1A_2 і перетинає ці прямі у точках M та N відповідно. Доведіть, що пряма MN перпендикулярна до паралельних діаметрів A_1A_2 та B_1B_2.

5. Відомо, що для натуральних чисел m,n виконується рівність

$$m+n=НСК\left(m,n\right)+НСД\left(m,n\right).$$

Доведіть, що одне з цих чисел кратне іншому.

11 клас

1. При якому найменшому натуральному n вираз $n^3+n^2+330n+330$ ділиться націло на 2011?

2. Для додатних чисел a,b,c доведіть нерівність

$$\left(a+1\right)^2+\left(b+1\right)^2+\left(c+1\right)^2\geq 3\left(1+a\sqrt[3]{b}+b\sqrt[3]{c}+c\sqrt[3]{a}\right).$$

3. На столі лежать цукерки. За один хід Петрик може забрати зі столу кілька з них. Першим ходом він забирає одну цукерку, а кожного наступного ходу може забрати або стільки ж цукерок, як підчас попереднього ходу, або вдвічі більше. За яку найменшу кількість ходів Петрик зможе забрати зі столу рівно 2011 цукерок?

4. У трьох колах, які попарно дотикаються зовнішнім чином, провели співнапрямлені діаметри A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 (тобто кожен з чотирикутників $A_1B_1B_2A_2$ та $A_1C_1C_2A_2$ є паралелограмом або трапецією, у якої відрізок A_1A_2 є основою). Доведіть, що прямі A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2 перетинаються в одній точці.

5. Відомо, що для натуральних чисел m,n виконується рівність

$$m+n=НСК\left(m,n\right)+НСД\left(m,n\right).$$

Доведіть, що одне з цих чисел кратне іншому.

2012 рік

I тур

7 клас

1. Яке з двох наступних чисел більше:

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot ...\cdot 18\cdot 19 \text{ або } \left(2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot ...\cdot 16\cdot 18\right)^2 ?$$

2. На прямій дано чотири різні точки, які утворюють шість різних відстаней між собою. Чи може статися так, що ці відстані дорівнюють 1см, 2 см, 3 см, 6 см, 12 см та 18 см ?

3. У шерензі стоять 2012 людей, кожен з яких або лицар (що завжди говорить правду), або брехун (що завжди бреше). Кожен з них сказав: «Кількість брехунів зліва від мене більша за кількість лицарів справа від мене». Скільки брехунів у цій шерензі?

4. На початку гри дано купку, в якій лежать 2012 камінців. Двоє гравців по черзі беруть з неї камінці – починаючий при кожному ході бере 1 або 4 камінці на свій розсуд, другий при кожному ході бере 1 або 3 камінці (також на свій розсуд). Той хто не зможе зробити хід, програє. Хто з гравців може забезпечити собі виграш?

8 клас

1. На площині дано 6 прямих, жодні три з яких не проходять через одну точку. Чи може трапитись так, що вони мають: а) рівно 12 різних точок перетину; б) рівно 16 різних точок перетину?

2. У числі 34! = 295232799039*041408476186096435200000* дві цифри у записі замінено на зірочки. Які саме цифри було замінено? (Тут 34! позначає добуток 1·2·3·4·…·33·34.)

3. Десятковий запис натуральних чисел A і B має вигляд: $A=\overline{abcabc}$ і $B=\overline{d00d}$, де a, b, c, d – цифри, $a\neq 0$, $d\neq 0$. Знайти усі такі цифри a, b, c, d, щоб число $A+B$ було квадратом деякого натурального числа.

4. На сторонах гострокутного трикутника зовні нього як на основах, побудували рівнобедрені трикутники AXB, BYC, CZA, для яких $\angle AXB=\angle BYC=120°$, а $\angle CZA=60°$. Доведіть, що $XY\perp BZ$.

5. Є 10 карток. На кожній з них з обох сторін написано по одному натуральному числу: на першій – числа 1 і 2, на другій – числа 3 і 4, … , на десятій – числа 19 і 20. Усі ці картки розташовані

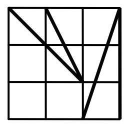
в ряд на довгому столі. Двоє гравців грають у таку гру. За один хід гравець довільно обирає п’ять карток і перевертає їх. Програє той гравець, після ходу якого на столі з’явиться розташування чисел, що вже зустрічалося у ході гри (можливо, в початковий момент). Хто має можливість забезпечити собі виграш – той, хто починає гру, чи його суперник?

9 клас

1. На площині дано 5 кіл, жодні три з яких не проходять через одну точку. Чи може трапитись так, що вони мають: а) рівно 12 різних точок перетину; б) рівно 24 різні точки перетину?

2. Графік функції $y=f\left(x\right)$ симетричний до графіка функції $y=x^2$ відносно точки з координатами $\left(1;1\right)$. Розв’яжіть рівняння $f\left(x\right)=x^2$.

3. На клітчастому папері нарисовані два кути (див. рисунок). Доведіть, що ці кути рівні.



4. Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу $5^{2n+1}+2^{n+4}+2^{n+1}$ кратне 23.

5. Є 10 карток. На кожній з них з обох сторін написано по одному натуральному числу: на першій – числа 1 і 2, на другій – числа 3 і 4, … , на десятій – числа 19 і 20. Усі ці картки розташовані в ряд на довгому столі. Двоє гравців грають у таку гру. За один хід гравець довільно обирає п’ять карток і перевертає їх. Програє той гравець, після ходу якого на столі з’явиться розташування чисел, що вже зустрічалося у ході гри (можливо, в початковий момент). Хто виграє при правильній грі – той, хто починає гру, чи його суперник?

10 клас

1. У числі 34! = 295232799039*041408476186096435*000000 дві цифри у записі замінено на зірочки. Які саме цифри було замінено? Відповідь обґрунтуйте. (Тут 34! позначає добуток 1·2·3·4·…·33·34.)

2. Графік функції $y=f\left(x\right)$ симетричний до графіка функції $y=x^2$ відносно точки з координатами $\left(1;1\right)$. Розв’яжіть рівняння $f\left(f\left(x\right)\right)=f\left(x\right)$.

3. Знайдіть найменше можливе значення виразу

$$A=\frac{x^4}{(y-2)(z-2)}+\frac{y^4}{(z-2)(x-2)}+\frac{z^4}{(x-2)(y-2)},$$

де $x, y, z \in (2, +\infty)$.

4. На числовій прямій відзначили точки з координатами $1, 2, 3, \ldots, n,$ де $n > 3 -$ задане натуральне число. Блоха починає стрибати із точки з координатою 1 і через $2n$ стрибків, побувавши в усіх відмічених точках, повертається в точку з координатою 1. Відомо, що сума довжин усіх стрибків за виключенням останнього дорівнює $n(2n-1)$. Знайдіть довжину останнього стрибка блохи. Відповідь обґрунтуйте.

5. На сторонах AB і AC гострокутного трикутника ABC зовні його побудовані трикутники ABC_1 та AB_1C так, що $\angle BAC_1 = \angle B_1AC = 30°$ та $\angle AC_1B = \angle CB_1A = 60°,$ а всередині трикутника ABC відзначили точку A_1 так, що $\angle CBA_1 = \angle BCA_1 = 30°.$ Доведіть, що точки A_1, B_1, C_1 лежать на одній прямій.

11 клас

1. У числі 34! = 295232799039*041408476186096435 2*000000 дві цифри у записі замінено на зірочки. Які саме цифри було замінено? Відповідь обґрунтуйте. (Тут 34! позначає добуток 1·2·3·4·…·33·34.)

2. Доведіть, що на графіку функції $f(x) = x^4$ можна вказати таку точку $A,$ а на графіку функції $g(x) = x^4 + x^2 + x + 1$ – таку точку $B,$ що відстань між точками A та B менша за $\frac{1}{100}.$

3. На сторонах AB і AC гострокутного трикутника ABC зовні його побудовані трикутники ABC_1 та AB_1C так, що $\angle BAC_1 = \angle B_1AC = 30°$ та $\angle AC_1B = \angle CB_1A = 60°,$ а всередині трикутника ABC відзначили точку A_1 так, що $\angle CBA_1 = \angle BCA_1 = 30°.$ Доведіть, що точки A_1, B_1, C_1 лежать на одній прямій.

4. Знайдіть усі прості числа p такі, що $p^5 - p = 2n!,$ де $n -$ натуральне число, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$

5. Хуліган Петро розрізав прямокутний портрет директора школи по прямій. Після цього він розрізав по прямій один зі шматків, що утворилися. Потім він зробив те саме з одним із нових шматків, і так далі. Після сотні таких розрізань з'явився директор школи і змусив Петра сплатити по дві копійки за кожен трикутний шматок та по копійці за кожен чотирикутний шматок портрета. Доведіть, що Петро сплатить більше гривні.

II тур

7 клас

1. Відомо, що олівець та ручка разом коштують більше, ніж один зошит, а олівець та зошит разом – більше, ніж три ручки. Що дорожче – олівець чи ручка?

2. Дано 11 монет, серед яких 5 справжніх (однакових за вагою) та 6 фальшивих. Фальшиві монети можуть відрізнятися за вагою одна від одної, бути легшими або важчими за справжні (але обов'язково відрізняються за вагою від справжніх монет). Як з допомогою терезів з двома чашками без гирьок виявити хоча б одну фальшиву монету?

3. Квадрат 11×11 розбито на частини розмірами 4×4, 1×3 та 3×1 (не обов'язково всі ці розміри частин зустрічаються в розбитті). Доведіть, що знайдеться хоча б один рядок початкового квадрату, що перетинає непарну кількість з цих частин.

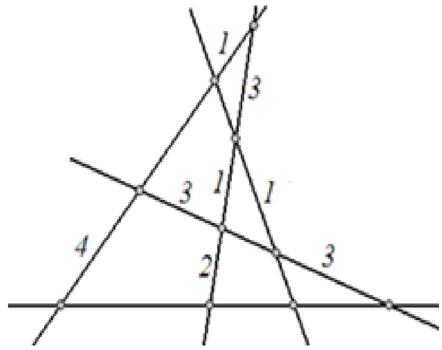
4. Нехай $S(a)$ позначає суму цифр десяткового запису натурального числа a. Про натуральне число n відомо, що $S(n)=503$, а $S(121n)=2012$. Знайдіть усі можливі значення $S(11n)$.

8 клас

1. На дошці написано натуральне число. Кожної хвилини Андрійко дивиться на годинник і додає до написаного числа число хвилин на годиннику (ціле значення від 0 до 59 включно). Доведіть, що колись на дошці буде написане складене число.

2. Квадрат 11×11 розбито на частини розмірами 4×4, 1×3 та 3×1 (не обов'язково всі ці розміри частин зустрічаються в розбитті). Доведіть, що знайдеться хоча б один рядок початкового квадрату, що перетинає непарну кількість з цих частин.

3. П’ять прямих попарно перетинаються (див. рисунок). Відомо, що всі довжини відрізків, отриманих при перетині прямих, є натуральними числами. Чи можливо отримати вказані довжини відрізків такими, як це дано на рисунку? Відповідь обґрунтуйте.



4. Дано квадратний тричлен $2013x^2+2012x+2011$. Двоє грають у таку гру. Вони ходять по черзі. За один хід гравець може відняти від наявного многочлена один із таких многочленів: x^2, x, x^2-x+1 чи x^2+x-1. Програє гравець, після ходу якого отримується многочлен з цілочисловим коренем. Хто може забезпечити собі виграш – той, хто починає гру, чи його суперник?

9 клас

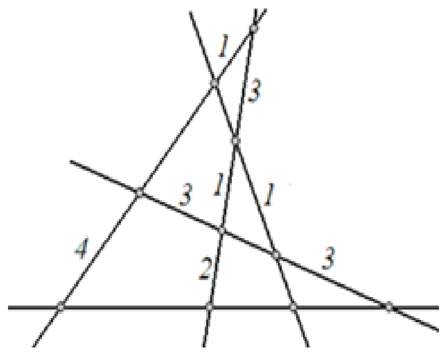
1. Про функції f і g відомо, що

$$f\left(x\right)=\begin{cases}2-x,\ якщо\ x>1,\\ \left|x\right|+2,\ якщо\ x\le 1;\end{cases}\qquad g\left(x\right)=\begin{cases}2x+1,\ якщо\ x\ge 1,\\ -x+2,\ якщо\ x<1.\end{cases}$$

Побудуйте графік функції $y=f\left(g\left(x\right)\right)$.

2. Чи можна записати цілі числа $1,2,3,4,5,6,7,8$ у вершинах правильного восьмикутника (по одному біля кожної вершини) так, щоб сума чисел біля будь-яких трьох послідовних вершин восьмикутника була більшою: а) 11; б) 12?

3. П’ять прямих попарно перетинаються (див. рисунок). Відомо, що всі довжини відрізків, отриманих при перетині прямих, є натуральними числами. Чи можливо отримати вказані довжини відрізків такими, як це дано на рисунку? Відповідь обґрунтуйте.



4. Дано квадратний тричлен $2013x^2+2012x+2011$. Двоє грають у таку гру. Вони ходять по черзі. За один хід гравець може відняти від наявного многочлена один із таких многочленів: x^2, x, x^2-x+1 чи x^2+x-1. Програє гравець, після ходу якого отримується многочлен з цілочисловим коренем. Хто може забезпечити собі виграш – той, хто починає гру, чи його суперник?

10 клас

1. Знайдіть усі дійсні x, для яких виконується рівність $\left\{3\left\{3\left\{3\left\{3\{3x\}\right\}\right\}\right\}\right\}=x.$ (Тут $\{a\}$ означає дробову частину числа a.)

2. Про натуральне число n відомо, що сума його цифр дорівнює 404, а сума цифр числа $2012n$ дорівнює 2011. Знайдіть усі значення, яких може набувати сума цифр числа $2011n.$ Відповідь обґрунтуйте.

3. На сторонах AB і CD трапеції $ABCD\,(BC\,||\,AD)$ обрано відповідно такі точки K і $L,$ що $\angle BKC=\angle AKD,$ $\angle BLC=\angle ALD.$ Доведіть, що точки K і L рівновіддалені від точки перетину діагоналей трапеції.

4. На дошці записані (в такому порядку) два числа a і $b.$ Андрійко ліворуч від a пише число $\dfrac{a+1}{b},$ після чого витирає число $b.$ Потім він робить таку саму операцію з утвореною парою чисел, і так далі. а) Якщо $a=20,$ а $b=12,$ які числа буде написано на дошці після 2012 таких операцій? б) За яких значень a і b всі числа, які одержить Андрій, будуть натуральними? Відповіді обґрунтуйте.

11 клас

1. Знайдіть усі дійсні x, для яких виконується рівність $\left\{3\left\{3\left\{3\left\{3\{3x\}\right\}\right\}\right\}\right\}=x.$ (Тут $\{a\}$ означає дробову частину числа a.)

2. Нехай α і $\beta-$ такі гострі кути, що $\sin^2\alpha+\sin^2\beta<1.$ Доведіть, що $\sin^2\alpha+\sin^2\beta<\sin^2(\alpha+\beta).$

3. Про натуральне число n відомо, що сума його цифр дорівнює 404, а сума цифр числа $2012n$ дорівнює 2011. Знайдіть усі значення, яких може набувати сума цифр числа $2011n.$ Відповідь обґрунтуйте.

4. У паралелограмі $ABCD$ провели діагональ AC. Вписане коло трикутника ABC дотикається до його сторін AB, BC і AC відповідно у точках M, N і K. Пряма MK перетинає пряму CD у точці P, а пряма NK перетинає пряму AD у точці Q. Нехай E і F − середини відрізків MP і NQ відповідно. Доведіть, що точки $B,$ E і F лежать на одній прямій.

2013 рік

7 клас

1. Знайдіть усі такі чотирицифрові числа $\overline{abcd}$, для яких виконується рівність $\overline{abcd}+\overline{abc}+\overline{ab}+a=2013$.

2. Серед 25 монет є рівно 2 фальшиві. Є чарівна скринька, в яку можна покласти 2 монети, і вона покаже кількість фальшивих монет у цій парі. Покажіть, як можна визначити обидві фальшиві монети не більше, ніж за 14 таких операцій.

3. Андрійко, Миколка, Оленка, Сергійко і Даринка посіли п'ять перших місць на математичній олімпіаді (жодне з місць не було розділено між декількома учасниками). Кожен з них знає, яке місце він зайняв. Оленка знає, що різниця місць Сергійка й Андрійка (у вказаному порядку) дорівнює двом. Також вона знає, що Даринка зайняла не перше місце, і тому Оленка може відновити розподіл місць між цією п'ятіркою учасників олімпіади. Яке місце зайняла Даринка?

4. Петрик послідовно виписує в рядок на дошці остачі від ділення деякого натурального числа на 10, 11, 12, …, 20. Виявилося, що кожне наступне записане число більше за попереднє. Доведіть, що у рядку записано 11 послідовних цілих чисел (тобто кожне наступне число більше за попереднє на 1).

5. Прямокутне приміщення розділене на 16 прямокутних кімнат. Комендант виміряв периметри восьми кімнат. Сім з восьми результатів його вимірювань схематично (тобто без врахування справжніх розмірів кімнат) показано на малюнку праворуч, а результат восьмого позначено через x. Знайдіть значення x.

7		13	
		10	7
10	11		
	5		x

8 клас

1. Чебурашка та Крокодил Гена з'їли торт. Чебурашка їв удвічі повільніше за Крокодила Гену, але почав їсти на хвилину раніше. З'ясувалося, що вони з'їли порівну. За який час Чебурашка сам з'їв би цей торт?

2. Керівник математичного гуртка дав учням завдання виписати у порядку зростання всі чотирицифрові числа $\overline{abcd}$, в яких $1 \le a < b < c < d \le 9$. Яке число буде записаним на 53-му місці?

3. На дошці виписані числа 1, 2, 3, …, 4027, 4028. Миколка та Андрійко по черзі закреслюють числа, причому Миколка ходить першим. За один хід можна закреслити тільки одне з раніше не закреслених чисел. Андрійко хоче, щоб після його 2013-го ходу на дошці залишилися два послідовні числа (тобто числа, різниця яких дорівнює 1). Чи завжди він зможе цього досягти?

4. Дано гострокутний трикутник ABC. Кола k_1 і k_2 проходять через вершину A і дотикаються до прямої BC у точках B і C відповідно. Висота BK трикутника ABC перетинає коло k_1 у точці P, відмінній від точки B, а висота CL перетинає коло k_2 у точці Q, відмінній від точки C. Доведіть, що точки A, P, Q лежать на одній прямій.

5. Знайдіть усі пари простих чисел p і q, для яких число $p^3 + q^2$ є кубом деякого натурального числа.

9 клас

1. Сума двох натуральних чисел дорівнює 20132013, і якщо в одному з них закреслити останню цифру, то отримаємо друге число. Знайдіть усі пари таких чисел.

2. Відомо, що $a \ne b$ і рівняння $ax^{2013} + x^{2012} + b = 0$ та $bx^{2013} + x^{2012} + a = 0$ мають спільний дійсний корінь. Знайдіть $a + b$.

3. У трапеції $ABCD$ з основами AD і BC, $AD > BC$, діагоналі AC і BD перетинаються у точці E. Дотична до описаного кола трикутника BCE проведена у точці E, перетинає пряму AD у точці F, причому точка D лежить між точками A і F. Відомо, що $AF = a$, $AD = b$. Знайдіть довжину відрізка EF.

4. Доведіть, що для довільних додатних дійсних чисел x, y, z виконується нерівність
$$\frac{x(y-x)}{x+y} + \frac{y(z-y)}{y+z} \le \frac{z-x}{2}.$$

5. Керівник математичного гуртка намалював на дошці таблицю розміру 30×30 і запропонував учням заповнити її числами 1, 2, …, 900, записуючи щосекунди в якусь порожню клітинку на свій розсуд

одне з тих чисел, що не використовувались раніше. Чи зможуть учні виконати завдання так, щоб у будь-який момент часу ані у жодному рядку, ані у жодному стовпці сума всіх записаних чисел не давала остачу 1 від ділення на 3?

10 клас

1. Чи можна зобразити на прямій шість відрізків так, щоб серед будь-яких трьох зображених відрізків знайшлися принаймні два, які мають хоча б одну спільну точку, і кожна точка прямої належала щонайбільше трьом зображеним відрізкам? (Вважається, що кінці відрізків належать самим відрізкам.)

2. Знайдіть усі пари натуральних чисел m і n, для яких виконується рівність $mn-\sqrt{m^2+n^2}=7.$

3. Відомо, що додатні дійсні числа x та y задовольняють нерівність $2x+7y\le 14.$ Доведіть, що $\sqrt{x}+\sqrt{y}\le 3.$

4. Нехай $H-$ точка перетину висот AQ, BL, CP гострокутного трикутника $ABC,$ $K-$ спільна точка відрізків PQ і BH, $M-$ середина сторони $AC,$ $N-$ середина відрізка BH. Промінь BL перетинає описане коло трикутника ABC у точці $D,$ відмінній від $B.$ Відомо, що $KQ=HQ.$ Доведіть, що прямі MN і AD перпендикулярні.

5. По колу записали 672 натуральні числа $a_1, a_2, ..., a_{672}$ такі, що $a_1+a_2+...+a_{672}=2013$ і $a_k\ne 1342$ для всіх $k, 1\le k\le 672.$ Доведіть, завжди можна вибрати декілька записаних поспіль чисел, сума яких дорівнює 1342.

11 клас

1. Зобразіть на координатній площині xOy множину всіх точок, координати яких задовольняють рівність

$$\sin x+\cos y=\sin y+\cos x.$$

2. Розв’яжіть рівняння

$$x^{2013}-x^{2014}=\left\{\frac{2015+x}{1+[x]}\right\}$$

(тут $[a]-$ ціла частина числа $a,$ тобто найбільше ціле число, яке не перевищує $a;$ $\{a\}=a-[a]-$ дробова частина числа a).

3. У трикутнику ABC $AB = 16$ *см*, $BC = 25$ *см*, $AC = 39$ *см*. Пряма, яка проходить через центр вписаного кола трикутника ABC і середину M сторони BC, перетинає висоту AD цього трикутника у точці P. Знайдіть довжину відрізка AP.

4. Знайдіть усі визначені на множині всіх дійсних чисел числові функції f, що для будь-яких $x \in R$ та $y \in R$ виконується рівність

$$f\left(xf\left(y\right)\right) + f\left(y + f\left(x\right)\right) - f\left(x + yf\left(x\right)\right) = x.$$

5. Нехай x_1 – довільне дійсне число, і для всіх натуральних n виконується рівність

$$x_{n+1} = \sqrt{7}x_n + 2\sqrt{x_n^2 + 4}.$$

Доведіть, що серед чисел $x_1, x_2, ..., x_{2013}$ принаймні 1005 чисел є ірраціональними.

2014 рік

7 клас

1. Відомо, що в понеділок Настя добиралася на автомобілі на роботу більше однієї години. Також відомо, що протягом будь-якої години руху середня швидкість її автомобіля дорівнювала 80 км/год. Чи могла його середня швидкість протягом усього шляху дорівнювати 100 км/год? Відповідь обґрунтуйте.

2. В Олесі є необмежена кількість цифр 3 та лише одна цифра 4. Вона хоче утворити число, яке б ділилося на найбільшу можливу кількість чисел з множини $\{1, 2, 3, ..., 9\}$. Яке найменше число може утворити Олеся? Відповідь обґрунтуйте.

3. У клітини дошки 6×6 можна ставити зірочки (не більше однієї зірочки у клітину) таким чином, щоб у кожному рядку, кожному стовпчику та на кожній з двох діагоналей було не більше, ніж 3 зірочки. Яку максимальну кількість зірочок можна поставити на дошку за таких умов? Відповідь обґрунтуйте.

4. Сторони трикутників ABC та ACD задовольняють такі умови: $AB = AD = 3$см, $BC = 7$см, $DC = 11$см. Які значення може набувати довжина сторони AC, якщо вона дорівнює цілій кількості сантиметрів, є середньою у трикутнику ACD та найбільшою у трикутнику ABC? Відповідь обґрунтуйте.

8 клас

1. Відомо, що в понеділок Настя добиралася на автомобілі на роботу більше однієї години. Також відомо, що протягом будь-якої години руху середня швидкість її автомобіля дорівнювала 80 км/год. Чи могла його середня швидкість протягом усього шляху дорівнювати 100 км/год? Відповідь обґрунтуйте.

2. Відомо, що M та N – два послідовні чотирицифрові числа. Яке найбільше значення може набувати різниця між сумами цифр чисел M та N?

3. Чи можна розставити у комірках таблиці 3×5 числа 1, 2, ..., 15 таким чином, щоб:

а) суми чисел в усіх рядках були однакові та суми чисел в усіх стовпчиках були однакові, але, можливо, відмінні від сум чисел у рядках;

б) суми чисел в усіх трьох рядках та в усіх п'ятьох стовпчиках були однакові?

4. Прості числа p, q та натуральні x, y задовольняють умови: $x < p$, $y < q$ та $\frac{p}{x}+\frac{q}{y}$ – ціле число. Доведіть, що $x = y$.

5. На стороні AB трикутника ABC відмітили точку K. Відрізок CK перетинає медіану AM у точці F. Відомо, що $AK = AF$. Знайдіть відношення $MF : BK$.

9 клас

1. Знайдіть натуральне число n, для якого існує найбільша кількість пар ненульових цифр a та b, що задовольняють умову: $\overline{ab}-\overline{ba}=n$.

2. Два кола c_1 та c_2 проходять через центр O кола c і дотикаються до нього внутрішнім чином у точках A та B відповідно. Доведіть, що на прямій AB лежить спільна точка кіл c_1, c_2.

3. а) Чи можна розставити у комірках таблиці 3×5 числа 1, 2, ..., 15 таким чином, щоб суми чисел в усіх рядках були однакові та суми чисел в усіх стовпчиках були однакові, але, можливо, відмінні від сум чисел у рядках?

б) Чи можна розставити у комірках таблиці 4×5 числа 1, 2, ..., 20 таким чином, щоб суми чисел в усіх рядках були однакові та суми чисел в усіх стовпчиках були однакові, але, можливо, відмінні від сум чисел у рядках?

4. Знайдіть усі такі натуральні n, для яких числа $12n-119$ та $75n-539$ є квадратами натуральних чисел.

5. Дійсні числа a та b задовольняють умову

$$a^{2014}+b^{2014}=a^{2016}+b^{2016}.$$

Доведіть, що справджується нерівність $a^2+b^2\le 2$.

10 клас

1. Розв'яжіть нерівність

$$\frac{(x+1)^4}{(x-1)^3}+\frac{x-1}{16}\ge\frac{(x+1)^2}{2(x-1)}.$$

2.Чи існують четвірки дійсних чисел a,b,c,d, які задовольняють умови: $a+b+c=d$ та $\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}=\frac{1}{ad}+\frac{1}{bd}+\frac{1}{cd}$.

3. Розв'яжіть у натуральних числах x,y,z систему рівнянь

$$\begin{cases}2x^2=4y^2+3z^2+2,\\ 13x=4y+3z+29.\end{cases}$$

4. У трикутнику ABC сторона $AC=\frac{1}{2}(AB+BC)$, BL – бісектриса кута ABC, K, M – середини сторін AB і BC відповідно. Знайдіть величину кута KLM, якщо $\angle ABC=\beta$.

5. На дошці записаний вираз **...*, що складається з непарної кількості зірочок. Андрій та Олеся грають у таку гру: вони по черзі (розпочинає Андрій) замінюють довільну ще не замінену зірочку будь-якою цифрою (на перше місце не можна ставити цифру 0). Якщо в решті вийде число, яке кратне 11, то перемагає Андрій, якщо ні, то – Олеся. Хто переможе при правильній грі?

11 клас

1. Знайдіть усі розв'язки рівняння $2^{\sin x}=\sin 2^x$ на проміжку $[0;\pi)$.

2. а) Відомо, що у нескінченній арифметичній прогресії натуральних чисел є деякий член, який є k–тим степенем натурального числа, більшим від 1. Доведіть, що серед членів прогресії є нескінченна кількість таких, що також є k–ми степенями натуральних чисел.

б) Чи існує нескінченна зростаюча арифметична прогресія натуральних чисел, кожен член якої є не вище ніж першим степенем натурального числа?

3. Нехай a, b, c – сторони гострокутного трикутника. Доведіть, що

$$\sqrt{a^2+b^2-c^2}+\sqrt{b^2+c^2-a^2}+\sqrt{c^2+a^2-b^2}\le\sqrt{3(ab+bc+ca)}.$$

4. Побудуємо для трикутника ABC коло S, яке проходить через точку B і дотикається до прямої CA у точці A, та коло T, яке проходить через точку C і дотикається до прямої BA у точці A. Другу точку перетину кіл S та T позначимо через D. Точку перетину прямої AD та описаного кола трикутника ABC позначимо через E. Доведіть, що D – середина відрізка AE.

5. На дошці записаний вираз **...*, що складається з непарної кількості зірочок. Андрій та Олеся грають у таку гру: вони по черзі (розпочинає Андрій) замінюють довільну ще не замінену зірочку будь-якою цифрою (на перше місце не можна ставити цифру 0). Якщо в решті вийде число, яке кратне 11, то перемагає Андрій, якщо ні, то – Олеся. Хто переможе при правильній грі?

2015 рік

7 клас

1. У Тридев’ятому царстві діє закон, за яким кожні два міста мають бути з’єднані між собою окремою дорогою. Після того, як цар заснував 5 нових міст, довелося побудувати ще 2015 доріг. Скільки міст стало у Тридев’ятому царстві? Відповідь обґрунтуйте.

2. Дванадцять солдатів повинні одночасно якнайшвидше потрапити у пункт, розташований на відстані 30 км від місця їх знаходження. Для цього вони зупинили легковий автомобіль, який міг їхати зі швидкістю 30 км/год і одночасно, крім водія, перевозити лише чотирьох. Водій забрав чотирьох солдатів і підвіз їх на деяку відстань, потім повернувся, забрав ще чотирьох і знову підвіз на певну відстань. Тоді знову повернувся і довіз решту солдатів до місця призначення. Виявилося, що всі солдати прибули у вказаний пункт одночасно. Скільки часу вони затратили на подолання всієї відстані, якщо відомо, що пішки кожен з них рухався без відпочинку зі швидкістю 6 км/год. Відповідь обґрунтуйте.

3. Є 7 гир з масами 1г, 2г, 3г, 4г, 5г, 6г та 7г. Миколка і Петрусь по черзі беруть одну з гир і кладуть її, не знімаючи попередніх, на терези зі стрілкою, яка показує загальну масу покладеного вантажу. Якщо після чергової гирі стрілка покаже масу, більшу 20г, то той, хто поклав цю гирю, програв. Миколка розпочинає гру і обіцяє перемогти. Чи може Петрусь йому завадити у цьому? Відповідь обґрунтуйте.

4. У Марійки є квадрат розміром 13×13. Вона хоче вирізати з нього якнайбільше прямокутників розмірами 1×5. Яку максимальну кількість таких прямокутників зможе отримати Марійка? Відповідь обґрунтуйте.

8 клас

1. Фермер виявив, що його кінь і корова з'їдають стіжок сіна за 9 днів, кінь і коза такий самий стіжок з'їдають за 12 днів, а корова і коза – за 18 днів. За скільки днів з'їли би такий стіжок сіна кінь, корова та коза разом?

2. Відомо, що число $\overline{aba},\ a > b > 0,$ ділиться на 7. Доведіть, що й число $\overline{bab}$ ділиться на 7, та знайдіть кількість пар $\left(\overline{aba},\ \overline{bab}\right)$ чисел з описаними властивостями.

3. Для додатних чисел $x,\ y,\ z$ доведіть нерівність

$$xyz^2 + xy^2 + x^2 + 4 \geq 4xyz.$$

4. Восьмикласник намалював на листку паперу прямокутний трикутник ABC, гіпотенуза AB якого дорівнює 13см, і стверджує, що зуміє розрізати його на 13 однакових трикутників. Чи може таке твердження бути правдою? Відповідь обґрунтуйте.

5. Є купа з 2015 монет. Миколка та Петрусь грають у гру, змінюючи по черзі кількість монет у цій купі за такими правилами: за один хід до купи можна або докласти 1 монету, або з купи можна взяти 4 монети, якщо їх кількість там не менша від чотирьох монет. Той з гравців, хто бере останню монету, перемагає у грі. Хто виграє у цій грі, якщо першим робить хід Миколка?

9 клас

1. Білка піднімається на стовбур дерева по спіралі, піднімаючись за один виток на 2 м. Скільки метрів подолає вона, піднявшись на висоту 8 м, якщо обхват стовбура становить 1,5 м?

2. Нехай m та n – такі натуральні числа, що значення виразу $3m^2 - mn^2 - 2n - 4$ також є натуральним числом. Яким найменшим може бути натуральне значення цього виразу?

3. Знайдіть усі значення параметра a, за яких система рівнянь

$$\begin{cases} ax^2 + 2015x + 1 = 0, \\ x^2 + ax + 2015 = 0, \\ 2015x^2 + x + a = 0 \end{cases}$$

має принаймні один дійсний розв'язок.

4. У рівнобедреному трикутнику ABC $(AC = BC)$ на стороні AC вибрали точку D. Висота AH перетинає відрізок BD у точці K. Виявилося, що $AD = AK$. Знайдіть величину кута ABD.

5. Три місіонери і три канібали повинні переправитися через ріку у невеликому човні, в якому одночасно можуть поміститися не більше двох осіб. Знаючи про смаки канібалів, місіонери не могли дозволити собі залишатися на жодному березі ріки у меншості. Яким чином вони можуть переправитися через ріку, якщо серед них гребти вміє лише один місіонер та один канібал?

10 клас

1. Миколка записав число $A = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9}$, всі цифри якого попарно різні, і обчислив суму

$$S = \overline{a_1a_2a_3} + \overline{a_4a_5a_6} + \overline{a_7a_8a_9} = 2015.$$

Визначте, яка цифра відсутня у записі числа A, і наведіть приклад хоч одного числа, яке міг записати Миколка.

2. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y^2 = y^3, \\ y + x^2 = x^3. \end{cases}$$

3. У чотирикутнику $ABCD$ кути $\angle BAD = \angle CDA = 60°$ та $\angle CDB = \angle CAD$. Доведіть, що $AB + CD = AD$.

4. Для всіх натуральних чисел n доведіть нерівність

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)} < \frac{1}{4}.$$

5. У футбольному турнірі, в якому взяли участь 16 команд, кожна команда зіграла з кожною іншою по одному разу. Чи могло

трапитися так, що у кожної команди кількість її перемог дорівнює кількості її нічиїх?

11 клас

1. Фокусник збирається вгадати задумане двоцифрове число. Для цього він просить сказати йому остачі x, y, z від ділення задуманого числа на 3, 5 та 7 відповідно. Обчисливши суму $70x+21y+15z,$ фокусник називає задумане число. Поясніть, як йому це вдається?

2. Знайдіть усі дійсні значення параметра $a,$ за яких система нерівностей

$$\begin{cases} x \geq x^2 + y^2 + 0{,}125a, \\ y \geq x^2 + y^2 + 0{,}125a \end{cases}$$

має єдиний розв'язок.

3. Відрізки AB та CD довжиною 1 перетинаються у точці P, причому $\angle DPB = 60°$. Доведіть, що $AC + BD \geq 1$.

4. Знайдіть усі многочлени $P(x)$ з дійсними коефіцієнтами, які для кожного дійсного x задовольняють рівність

$$P(P(x)) = (x^2 + 2015x + 2015)P(x).$$

5. У зв'язку зі складним фінансовим станом у першості країни з футболу взяли участь лише 12 команд, причому кожна з них зіграла з кожною іншою тільки по одному разу. Чи могло трапитися так, що у кожної команди кількість її перемог дорівнює кількості її нічиїх?

ВКАЗІВКИ ДО РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

2011 рік

І тур

7.1. Оскільки число N натуральне, а сума чисел, записаних Андрійком, дорівнює $\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)N=\frac{29N}{20}$, то найменшим числом, яке могла записати Олеся, є $N=20$.

7.2. Якщо справа були дописані цифри, які утворюють число $\overline{ab}$, то за умовою задачі $100N+\overline{ab}\,\vdots\, N$. А отже, також $\overline{ab}\,\vdots\, N$. Оскільки ж цифри a та b різні, то $N\le 98$. При цьому число $N=98$ задовольняє умову, якщо справа до нього дописати цифри $a=9,\ b=8$.

7.3. Площа великого квадрата дорівнює $16+4\cdot 96=400$. Отже, сторони малого та великого квадратів відповідно дорівнюють 4 та 20. Крім того, якщо a та b – більша та менша сторони прямокутника, то також $a-b=4$ та $a+b=20$. Звідси знаходимо $a=12,\ b=8$.

7.4. Не можна. Спочатку сумарна кількість камінців у купках становила $3+4+5+...+12=75$ і була непарною. На кожному кроці вона змінюється на 6, а отже, не може стати рівною $2011\cdot 10$.

Можна було також враховувати подільність чисел 75 та 6 на 3.

8.1. Неправильно. Рівність $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{b}{a}+\frac{d}{c}\Leftrightarrow\frac{ad+bc}{bd}=\frac{bc+ad}{ac}$ означала би, що $bd=ac$, тобто $\frac{b}{a}=\frac{c}{d}$, що суперечить умові задачі.

8.2. Таких цілих чисел n не існує, оскільки і при парних, і при непарних n ліва та права частини рівності мають різну парність.

8.3. Якщо $a_i=5$ при деякому $i=1,2,3,4,5$, а відповідне $b_i\ne 5$, то два із записаних добутків діляться на 5, тобто дають остачу 0. Якщо ж $b_i=a_i=5$, то припустимо, що решта чотири попарні добутки дають при діленні на 5 чотири різні остачі: 1, 2, 3, 4. Тоді їхній добуток при діленні на 5 мав би давати ту ж остачу 4, що й число $24=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4$. Але цей добуток дорівнює $(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4)^2$ і при діленні на 5 дає остачу 1. Одержане протиріччя і доводить справедливість твердження задачі.

8.4. Твердження задачі неправильне. Розглянемо, наприклад, прямокутний трикутник ABC з катетами $AB=BC$. Тоді рівність $\angle ANC=\angle ALC$ очевидна, але $\angle ABM=45^0$, а $\angle LAC<45^0$.

8.5. Не можна. Позначимо послідовно будинки, які знаходяться у вершинах внутрішнього квадрата буквами $A, B, C, D.$ Тоді для проходження із будинку A у будинок C з дотриманням вимог задачі є два можливі рівноправні шляхи – $ABC,$ або $ADC.$ Вибравши для конкретності перший із них, переконуємося, що з будинку C у будинок A можна пройти тільки за маршрутом $CDA.$ Позначимо будинки, які знаходяться у вершинах зовнішнього квадрата і зв'язані доріжками з парами будинків A, B та $A, D,$ через E та F відповідно. Оскільки при цьому із будинку B у будинок A можна пройти лише за маршрутом $BEA,$ а із будинку A у будинок D – лише за маршрутом $AFD,$ то із будинку F у будинок $B,$ пройшовши не більше двох доріжок із визначеними вище напрямами руху, попасти не вдасться.

9.1. $b > 0.$ Оскільки $f_1(0) = f_2(0) = b,$ то значення $b \le 0$ умову не задовольняють. Якщо ж $b > 0,$ то $f_1(x) + f_2(x) = 2x^2 + 2b > 0.$ Отже, хоч одне з чисел $f_1(x)$ чи $f_2(x)$ додатне.

9.2. Такими є, наприклад, числа $n = 2k,$ $m = n + 3,$ де k – довільне натуральне число.

9.3. Одна. Якщо припустити, що стикових ігор не було взагалі, то різниця очок між першим і восьмим місцем була би не меншою, ніж $4 \cdot 2 = 8.$ Але оскільки переможець міг набрати максимум 7 очок, а остання команда – мінімум 0 очок, то принаймні одна стикова гра буде проведена. Можливість лише однієї стикової гри (між третьою і четвертою командами) ілюструє наступна турнірна таблиця:

1 місце	---	1	1	1	1	1	1	1	***7***
2 місце	0	---	0	1	1	1	1	1	***5***
3 місце	0	1	---	0	0	1	1	1	***4***
4 місце	0	0	1	---	1	0	1	1	***4***
5 місце	0	0	1	0	---	1	1	1	***4***
6 місце	0	0	0	1	0	---	0	1	***2***
7 місце	0	0	0	0	0	1	---	1	***2***
8 місце	0	0	0	0	0	0	0	---	***0***

9.4. З умов задачі випливає рівність: $\angle BAT = \angle BCA = \angle BDT.$ Тому навколо чотирикутника $BTAD$ можна описати коло. Отже, $\angle DAC = \angle ADT = \angle ABT = \angle ACB = \angle ACD,$ тобто $AD = DC.$

9.5. З очевидної нерівності $(a-b)^4 \ge 0$ випливає рівносильна до неї нерівність $8ab\left(a^2+b^2\right) \le (a+b)^4$, з якої знаходимо

$$ab\left(a^2+b^2\right)\le\frac{1}{8}(a+b)^4\le\frac{1}{8}(a+b+c)^4\le 2.$$

Аналогічно доводимо, що $bc\left(b^2+c^2\right)\le 2,\ ca\left(c^2+a^2\right)\le 2.$ Отже,

$$ab\left(a^2+b^2\right)+bc\left(b^2+c^2\right)+ca\left(c^2+a^2\right)\le 6<8.$$

Зауважимо, що навіть значення 6 набуватись не буде, бо для цього необхідне одночасне виконання таких чотирьох умов:

1) $a=b,\ c=0;$ 2) $b=c,\ a=0;$ 3) $c=a,\ b=0;$ 4) $a+b+c=2.$

10.1. Може. Для цього їй достатньо у вершинах однієї основи призми записати числа 1, 2, 3, а у відповідних вершинах іншої основи записати числа 5, 6, 4.

10.2. а) Обов'язково. Без обмеження загальності можна вважати, що $x_1<x_2<x_3$. Оскільки при цьому вітки параболи

$$f(x)=(x-x_2)(x-x_3)+(x-x_3)(x-x_1)+(x-x_1)(x-x_2)$$

направлені вгору, а $f(x_2)=(x_2-x_3)(x_2-x_1)<0,$ то така функція має два нулі.

б) Не обов'язково. Наприклад, для функцій $f_1(x)=x^2-x,$ $f_2(x)=-x^2+1,$ $f_3(x)=x^2+x$ маємо нулі $x_1=-1,$ $x_2=0,$ $x_3=1,$ але функція $f(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)=x^2+1$ нулів не має.

10.3. З допомогою лінійки спочатку знайдемо точку T перетину прямих AB та CD і точку O перетину діагоналей AC та $BD.$ Тоді пряма TO перетне основу AD у точці $E,$ яка є серединою цієї основи. Отже, чотирикутники $ABCE$ та $BCDE$ є паралелограмами. Точки M та N відповідно перетину діагоналей їх діагоналей лежать на середній лінії трапеції. Нехай $K-$ точка перетину прямої MN зі стороною $CD,$ а $F-$ точка перетину прямих BK та $AD.$ Оскільки $\triangle BCK=\triangle FDK,$ то трикутник ABF $-$шуканий.

10.4. Якщо $a_i=11$ при деякому $i=1,2,...,11,$ а відповідне $b_i\ne 11,$ то два із записаних добутків діляться на 11, тобто дають остачу 0. Якщо ж $b_i=a_i=11,$ то припустимо, що решта 10 попарних добутків дають при діленні на 11 десять різних остач: 1, 2, … , 10. Тоді їхній добуток при діленні на 11 мав би давати ту ж остачу 10, що й число $10!=1\cdot 2\cdot ...\cdot 10.$ Але цей добуток дорівнює $(10!)^2$ і при діленні на 11 дає остачу 1. Одержане протиріччя і доводить справедливість твердження задачі.

10.5. Див. розв'язання задачі 9.5.

11.1. Записавши рівняння у вигляді $2x=\left[x^2\right]+1,$ отримаємо, що $x=n$ або $x=n+0{,}5,$ де $n-$ деяке ціле число. У першому випадку маємо $2n=n^2+1.$ Отже, $n=1,\ x=1.$ А у другому випадку відповідно отримуємо $2n+1=\left[n^2+n+0{,}25\right]+1\Leftrightarrow 2n+1=n^2+n+1\Leftrightarrow n^2-n=0.$ Звідси знаходимо $n=0,\ x=0{,}5$ та $n=1,\ x=1{,}5.$

11.2. $a=1006^2,\ b=1005^2.$ Оскільки $a-b=2011,$ а число 2011 – просте, то $НСД\left(a,b\right)$ є або 1, або 2011. У першому випадку добуток ab буде квадратом натурального числа лише тоді, коли кожне з чисел a,b є точним квадратом: $a=c^2,\ b=d^2.$ З умови $c^2-d^2=2011$ отримуємо $c-d=1,\ c+d=2011.$ Отже, $c=1006,\ d=1005.$ Відповідно $a=1006^2,\ b=1005^2.$ У другому випадку будемо мати $a=2011m,$ $b=2011n,$ де $m,n\in N,$ причому $m-n=1.$ Оскільки ж за умовою задачі $ab=2011^2mn-$ точний квадрат, а числа $m,n-$ взаємно прості, то кожне з них має бути точним квадратом: $m=c^2,\ n=d^2.$ При цьому $c^2-d^2=1,$ тобто $\left(c-d\right)\left(c+d\right)=1,$ що для чисел $c,d\in N$ неможливо.

11.3. Не можна. Спочатку сумарна кількість камінців у всіх купках становила $2^0+2^1+2^2+\ldots+2^{2011}=2^{2012}-1$ і при діленні на 9 давала остачу 3. На кожному кроці вона змінюється на 9. Тому стати рівною числу $2012\cdot 3^{1005},$ яке ділиться на 9, вона не зможе.

11.4. Позначимо центри кіл відповідно через O_1 та O_2 і розглянемо гомотетію кола γ_1 відносно точки K з коефіцієнтом $k=-\dfrac{KO_2}{KO_1}.$ Вона коло γ_1 переведе у коло $\gamma_2,$ а дотичні AB та AD до γ_1 перейдуть відповідно у дотичні CD та CB до $\gamma_2.$ При цьому точка A перетину першої пари дотичних перейде у точку C перетину другої пари дотичних. Отже, точка K лежить на діагоналі $AC.$

11.5. $f\left(x\right)=0$ та $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}.$ Покладаючи $x=y,$ отримаємо

$$f\left(2x\right)=f\left(0\right)f\left(2x\right)+f\left(0\right)f\left(-2x\right),\quad x\in R.$$

Якщо тут $x=0,$ то $f\left(0\right)=2f^2\left(0\right),$ звідки $f\left(0\right)=0$ або $f\left(0\right)=\dfrac{1}{2}.$

У першому випадку зразу маємо $f(2x)=0,\ x\in R,$ тобто $f(x)\equiv 0.$ А у другому випадку отримуємо

$$f(2x)=\frac{1}{2}f(2x)+\frac{1}{2}f(-2x)\Leftrightarrow f(2x)=f(-2x),\ \ x\in R,$$

тобто функція $f(x)-$ парна. Тому, підставляючи $x=0$ у початкове рівняння, будемо мати $\frac{1}{2}=2f^2(y),\ y\in R.$ Звідси, з врахуванням другої умови задачі, знаходимо $f(x)\equiv\frac{1}{2}.$ Перевірка показує, що обидві знайдені функції задовольняють умови задачі.

II тур

7.1. Таким є число 9758642031. Зрозуміло, що шукане число має бути десятицифровим, причому для його запису послідовно зліва направо слід використовувати найбільшу із можливих цифр, яка на момент її записування не суперечить умові задачі.

7.2. Наприклад,

$$\left(\frac{17}{3}+\frac{13}{2}+\frac{11}{6}\right)+\frac{20}{10}+\frac{19}{1}+\frac{18}{9}+\frac{16}{8}+\frac{15}{5}+\frac{14}{7}+\frac{12}{4}=$$
$$=14+2+19+2+2+3+2+3=47.$$

7.3. Існує. Таким, наприклад, є чотирикутник $ABCD,$ у якому $AB=BC=2CD=2DA,\quad \angle ADC=90^\circ.$ Розрізавши його по діагоналі $AC,$ отримаємо два рівнобедрені трикутники, з яких один, а саме трикутник $ACD,$ є прямокутним. Отже, його можна розрізати на два рівні рівнобедрені прямокутні трикутники. Вибравши один з них, знову розріжемо його на два рівнобедрені прямокутні трикутники, і так далі. При цьому кожен раз на один рівнобедрений трикутник стає більше. Тому у такий спосіб чотирикутник $ABCD$ можна розрізати на будь-яке число $n\geq 2$ рівнобедрених трикутників, зокрема, і на 2011.

7.4. Переможе перший гравець. Перші три ходи він робить фішкою вверх. Після них у лівій або у правій половині дошки суперником буде доставлено не більше однієї білої фішки. Наступні три ходи перший гравець робить саме у цьому напрямі, після яких у нього появляються зразу дві можливості досягти наступним ходом зовнішньої межі квадрату. Перекрити одночасно обидві його суперник своїм шостим ходом не зможе, бо для цього йому потрібно у вказаній половині дошки доставити не менше 5 фішок, але принаймні дві білі фішки із шести були доставлені ним раніше в іншій половині дошки.

7.5. Нехай сума цифр числа N дорівнює n. Тоді $N = n + n^3 < 100$. Отже, $n \le 4$. І тепер нескладно переконатися, що із чисел $N = 1+1^3 = 2$, $N = 2+2^3 = 10$, $N = 3+3^3 = 30$, $N = 4+4^3 = 68$ умову задачі задовольняє лише $N = 30$.

8.1. Таким є число 9758641302. Міркуючи аналогічно, як і при розв'язуванні задачі 7.1, запишемо перші 6 цифр шуканого числа: 975864. Якщо тепер записати цифру 2, то за нею може йти лише 0, і отримане число не буде парним. Тому сьомою цифрою може бути лише 1, а останні три цифри вже визначаються однозначно.

8.2. З рівності $\frac{1}{n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{(n-1)n}$, $n \ge 2$, отримуємо

$$\frac{1}{2011} = \frac{1}{2010} - \frac{1}{2010 \cdot 2011} = \left(\frac{1}{2009} - \frac{1}{2009 \cdot 2010}\right) -$$

$$-\left(\frac{1}{2010 \cdot 2011 - 1} - \frac{1}{(2010 \cdot 2011 - 1)2010 \cdot 2011}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{c+1} - \frac{1}{a+1}\right) - \left(\frac{1}{b+1} - \frac{1}{d+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{a+1}\right) + \left(1 - \frac{1}{b+1}\right) -$$

$$-\left(1 - \frac{1}{c+1}\right) - \left(1 - \frac{1}{d+1}\right) = \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} - \frac{c}{c+1} - \frac{d}{d+1}.$$

8.3. Діагоналі прямокутника $MNCD$ є діаметрами описаного навколо нього кола. $\angle NXD = 90^o$, то точка X лежить на цьому колі. Тоді і кут MXC, який спирається на діаметр MC, також є прямим.

8.4. Переможе перший гравець. Перші чотири ходи він робить фішкою вверх. Після них у лівій або у правій половині дошки суперником буде доставлено не більше двох білих фішок. Наступні чотири ходи перший гравець робить саме у цьому напрямі, після яких у нього появляються зразу дві можливості досягти наступним ходом зовнішньої межі квадрату. Якщо суперник встигає після восьмого ходу перекрити обидва ці виходи, то перший гравець наступні вісім ходів пересуває чорну фішку вниз, заставляючи суперника весь час робити вимушені ходи. Але після восьмого такого ходу вниз перекрити одночасно обидві нові можливості досягти наступним ходом зовнішньої межі квадрату його суперник своїм шістнадцятим ходом уже не зможе, бо для цього йому потрібно у вказаній половині дошки доставити не менше 15 фішок, але принаймні дві білі фішки із шістнадцяти були доставлені ним раніше в іншій половині дошки.

8.5. Запишемо задану рівність у вигляді $y^k = x(x+1)$. Очевидно, що її задовольняють пари чисел: $(0;0)$ та $(-1;0)$. Для інших цілих x числа x та $x+1-$ взаємно прості, а їх добуток додатний. Тому задана рівність можлива лише за умови, що $x = m^k$, $x+1 = n^k$, $m,n \in N$. Тоді

$$1 = (x+1) - x = m^k - n^k = (m-n)\left(m^{k-1} + m^{k-2}n + \ldots + mn^{k-2} + n^{k-1}\right).$$

Але це неможливо, бо $m - n \geq 1$, а вираз в останніх дужках при $k > 1$ не менший, ніж 2.

9.1. Нехай сума цифр трицифрового числа N дорівнює n. Тоді $100 \leq N = n + n^3 < 1000$. Отже, $5 \leq n \leq 9$. І тепер нескладно переконатися, що із чисел $N = 5 + 5^3 = 130$, $N = 6 + 6^3 = 222$, $N = 7 + 7^3 = 350$, $N = 8 + 8^3 = 520$, $N = 9 + 9^3 = 738$ умову задачі задовольняє лише $N = 222$.

9.2. Нехай 5 років тому у родині було m синів та n доньок. Якщо $m > n$, то навіть народження ще однієї доньки не приведе до зменшення різниці між сумарним віком синів та сумарним віком доньок. Якщо $m = n$, то така різниця може зменшитися на 4 лише при умові, що 4 роки тому народилася дочка. У такому разі 2 роки тому сумарний вік синів дорівнював сумарному віку доньок. Якщо $m = n - 1$, то вказана різниця зменшиться рівно на 4 лише при умові, що рік тому народився син. У такому випадку 2 роки тому сумарний вік доньок був на 1 рік більший, ніж сумарний вік синів. І, нарешті, якщо $m < n - 1$, то навіть при народженні сина така різниця зменшиться принаймні на 6, що не задовольняє умову задачі.

9.3. Розфарбуємо вузли наявної сітки у шаховому порядку. Тоді всі вершини побудованої ламаної лежатимуть лише у вузлах якогось одного з кольорів, а сама ламана обмежуватиме фігуру, складену з квадратиків зі стороною $\sqrt{2}$ і площею 2. Зрозуміло, що таких квадратиків буде рівно 4. Якщо при цьому намальована фігура є квадратом зі стороною $2\sqrt{2}$, то всередині неї знаходиться 5 вузлів початкової сітки. У решті з чотирьох принципово можливих формах фігури, складеної з таких квадратиків, матимемо всередині лише 4 вузли – центри цих квадратиків.

9.4. Оскільки точка дотику двох кіл є центром гомотетії, яка одне з цих кіл переводить в інше, то $C = A_1B_2 \cap A_2B_1$. При цьому

$A_1B_2 \perp A_2B_1$, бо кут A_1CA_2 спирається на діаметр. А отже, MN – діаметр кола з центром O. Нехай $D = B_1B_2 \cap MN$. Тоді послідовно отримуємо $\angle DB_2C = \angle A_2A_1C = \angle A_2CO = \angle CNO = \angle CND$. Отже, навколо чотирикутника $NCDB_2$ можна описати коло. Тому $\angle B_2DN = \angle B_2CN = 90^o$, звідки випливає, що $MN \perp B_1B_2$.

9.5. Див. розв’язання задачі 8.5.

10.1. Позначимо перше з цих чисел через a_1, а останнє – через a_n. Тоді з формули суми членів арифметичної прогресії отримаємо:

$$\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = 2011 \Leftrightarrow (a_1 + a_n)n = 2 \cdot 2011.$$

Оскільки $a_1 + a_n > 2$, а числа 2 та 2011 – прості, то можливий лише один варіант: $n = 2, a_1 + a_n = 2011$. Звідси знаходимо єдиний розв’язок: $a_1 = 1005, a_2 = 1006$.

10.2. Для $n = 1, n = 2$ маємо $a_1 = 1!, a_2 = 2!$ Припустимо, що також $a_n = n!, a_{n+1} = (n+1)!$ Звідси безпосередньо отримуємо, що

$$a_{n+2} = (n+1)\big(n! + (n+1)!\big) = (n+1)n!\big(1 + (n+1)\big) = (n+2)!$$

Отже, $a_n = n!$ при всіх натуральних n. Зокрема, $a_{2011} = 2011!$ Тому дане число закінчується на таку кількість нулів:

$$\left[\frac{2011}{5}\right] + \left[\frac{2011}{5^2}\right] + \left[\frac{2011}{5^3}\right] + \left[\frac{2011}{5^4}\right] + \left[\frac{2011}{5^5}\right] + \ldots =$$
$$= 402 + 80 + 16 + 3 + 0 + \ldots = 501.$$

10.3. За 17. Оскільки $1 + 2 + 4 + \ldots + 1024 > 2011$, то за один хід Петрик зможе забрати не більше 512 цукерок. При цьому одну і ту ж кількість цукерок він повинен брати не більше двох разів, бо, взявши замість двічі підряд по 2^n цукерок один раз 2^{n+1}, він зменшить кількість ходів на 1. Крім того, хоч один раз потрібно буде взяти 512 цукерок, бо інакше їх буде забрано не більше $2(1 + 2 + \ldots + 256) = 1022$. Взявши 1, 2, 4, …, 512 цукерок по разові, Петрик забере зі столу 1023 цукерки. Тому решту 988 цукерок він повинен забирати, повторюючи деякі з уже зроблених ним ходів. З єдиності запису числа 988 у двійковій системі числення: $988 = 512 + 256 + 128 + 64 + 16 + 8 + 4$ отримуємо мінімальну кількість ходів при такій послідовності дій Петрика: 1, 2, 4, 4, 8, 8, 16, 16, 32, 64, 64, 128, 128, 256, 256, 512, 512.

10.4. Див. розв’язання задачі 9.4.

10.5. Нехай $НСД(m,n)=d.$ Тоді $m=ad, n=bd,$ причому $НСД(a,b)=1.$ Оскільки, крім того, $НСК(m,n)=abd^2,$ то задана рівність набуває вигляду: $ad+bd=abd^2+d \Leftrightarrow d(a-1)(b-1)=0.$ Звідси маємо $a=1$ або $b=1,$ що рівносильне твердженню задачі.

11.1. Оскільки $n^3+n^2+330n+330=(n+1)(n^2+330),$ то для подільності на просте число 2011 потрібно, щоб хоч один множник, $n+1$ чи $n^2+330,$ ділився на 2011. Значення 2011 вони набувають при $n=2010$ та $n=41$ відповідно. Менше з них $n=41-$ шукане.

11.2. З нерівності між середнім арифметичним і середнім геометричним випливають такі три нерівності:

$$a+a^2+b \geq 3a\sqrt[3]{b}, \quad b+b^2+c \geq 3b\sqrt[3]{c}, \quad c+c^2+a \geq 3c\sqrt[3]{a}.$$

Додавши їх, додамо до обох частин отриманої нерівності число 3. Тоді, відповідно згрупувавши доданки, приходимо до нерівності, яку вимагалось довести.

11.3. Див. розв'язання задачі 10.3.

11.4. Нехай кола з діаметрами B_1B_2 та C_1C_2 перетинаються у точці $A,$ з діаметрами A_1A_2 та C_1C_2 – у точці $B,$ а з діаметрами A_1A_2 та B_1B_2 – у точці C. Оскільки точка дотику двох кіл є центром гомотетії, яка переводить одне коло в інше, то $A=B_1C_2 \cap B_2C_1,$ $B=A_1C_2 \cap A_2C_1,$ $C=A_1B_2 \cap A_2B_1.$ Позначимо тепер $D=A_1B_2 \cap C_1A_2.$ Тоді $\angle BDC=\pi-\angle BC_1A-\angle CB_2A=\pi-\angle BAE-\angle CAE=\pi-\angle BAC,$ де $E-$ точка на спільній дотичній до кіл з діаметрами B_1B_2 та $C_1C_2,$ відмінна від точки $A.$ Отже, точка D лежить на колі, описаному навколо трикутника ABC. Аналогічно доводимо, що на цьому ж колі лежить і точка перетину прямих A_1B_2 та $B_1C_2.$ А оскільки пряма A_1B_2 перетинає це коло, крім точки $C,$ лише у точці $D,$ то саме у цій точці перетинаються всі три прямі: $A_1B_2,$ $B_1C_2,$ $C_1A_2.$

11.5. Див. розв'язання задачі 10.5.

2012 рік

І тур

7.1. Оскільки $\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot 18\cdot 19}{(2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot \ldots \cdot 16\cdot 18)^2}=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{7}{6}\cdot\dfrac{9}{8}\cdot\ldots\cdot\dfrac{17}{16}\cdot\dfrac{19}{18}>1,$ то перше число більше.

7.2. Якщо точки A, B, C, D розташовані на прямій послідовно, то $AD = 18$см. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що тоді $AB = 6$см, $BD = 12$см. Але, незалежно від розташування точки C, її відстані до трьох інших точок дорівнювати 1, 2 та 3 см не можуть.

7.3. Зауважимо, що крайній зліва лицар не може стояти у шерензі лівіше від крайнього справа брехуна, бо у такому разі з умови задачі отримуємо протиріччя – або збрехав крайній зліва лицар, або сказав правду крайній справа брехун. Таким чином, у шерензі зліва підряд стоять всі брехуни, справа підряд – всі лицарі. Умову задачі задовольняє лише ситуація, коли тих та інших по 1006.

7.4. Забезпечити собі виграш може починаючий гру, взявши першим ходом чотири камінці, а всіма наступними – по одному. Таким чином, парна кількість взятих загалом камінців буде лише після ходів першого, а перемагає гравець, після ходу якого ця величина буде дорівнювати 2012.

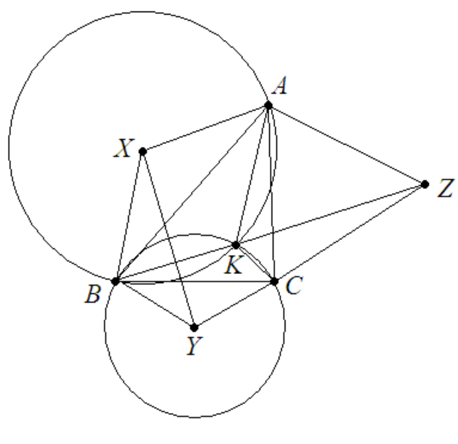
8.1. а) Може. Досить взяти 3 прямі, що мають між собою 3 точки перетину, та 3 паралельні прямі, кожна з яких перетинає кожну з трьох початкових. б) Не може. Перша пряма має не більше 5 точок перетину, друга додатково – не більше 4 точок і т.д. Всього маємо не більше ніж $5+4+3+2+1=15$ різних точок перетину.

8.2. Останньою цифрою є 0, оскільки вказаний добуток ділиться на 10. Також 34! ділиться на 9, тому на 9 має ділитися сума всіх записаних цифр. Звідси випливає, що іншою заміненою цифрою є 6.

8.3. Оскільки

$$A+B=\overline{abcabc}+\overline{d00d}=1001\left(\overline{abc}+d\right)\le 1001(999+9)=1001\cdot 1008,$$

а число $1001=7\cdot 11\cdot 13$ не має кратних дільників, то для виконання умови задачі необхідно і достатньо, щоб $\overline{abc}+d=1001$. Звідси випливає, що $a=9,\ b=9,\ c=11-d,\ d\in\{2,3,4,5,6,7,8,9\}$.



8.4. Відкладемо (див. рисунок) на відрізку BZ точку K таку, що $\angle AKZ=\angle ACZ=60°$. Тоді навколо чотирикутника $AKCZ$ можна описати коло і $\angle CKZ=\angle CAZ=60°$.

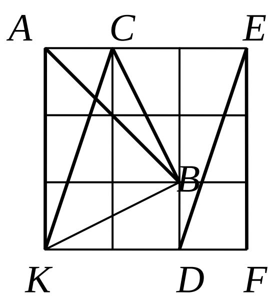
Отже, $\angle AKB=\angle CKB=120°$. Оскільки $\angle AXB=\angle BYC=120°$, $XA=XB$, $YB=YC$, то кола з центрами у точках X та Y, які проходять через точку B, перетнуться також у точці K. Лінія центрів цих кіл перпендикулярна до їх спільної хорди, тому $XY \perp BK$, а отже, й $XY \perp BZ$.

8.5. Усіх можливих розташувань чисел є 2^{10}. Розіб'ємо їх на пари так, щоб у кожній парі числа на всіх п'яти перших картках відрізнялися, а на п'яти інших – співпадали. Доведемо, що виграє перший гравець. Його виграшна стратегія полягає у тому, що він завжди перевертає лише перші п'ять карток. Після кожного ходу він створює розташування чисел, яке перебуває у парі з розташуванням чисел перед цим ходом і раніше не зустрічалося. Далі, кожний наступний хід другого гравця буде створювати розташування чисел, яке не зустрічалося раніше (інакше він програє) і входить до нової пари розташувань, а наступним ходом перший гравець створює розташування чисел, яке також не зустрічалося раніше і є другою компонентою цієї пари. Кількість усіх можливих розташувань чисел є скінченою, то в деякий момент другий гравець вже не зможе створити розташування цих чисел, яке раніше не зустрічалося.

9.1. а) Може. Досить взяти 4 кола, кожні два з яких перетинаються в двох точках, а п'яте коло таке, що не перетинається з іншими. б) Не може. Перше коло має не більше 8 точок перетину, друге додатково – не більше 6 точок і т.д. Всього маємо не більше ніж $8+6+4+2=20$ різних точок перетину.

9.2. Лінія, симетрична до параболи $y=x^2$ з вершиною у точці $(0;0)$ відносно точки $(1;1)$, також є параболою з вершиною $(2;2)$, вітки якої напрямлені вниз. Тому $f(x)=-(x-2)^2+2$. Тоді з рівняння $-(x-2)^2+2=x^2$ знаходимо єдиний розв'язок $x=1$.

9.3. Оскільки $\angle CBK=\angle CAK=90°$, (див. рисунок) то навколо $ACBK$ можна описати коло. Тому $\angle ABC=\angle AKC=\angle DEF$.



Рівність заданих кутів можна отримати також з теореми синусів для трикутників ABC та DEF, або обчисливши косинуси цих кутів за теоремою косинусів, чи знайшовши їх тангенси з прямокутних трикутників.

9.4. Справедливість твердження задачі випливає з рівності

$$5^{2n+1}+2^{n+4}+2^{n+1}=5\cdot5^{2n}+16\cdot2^n+2\cdot2^n=5\left(25^n-2^n\right)+23\cdot2^n=$$
$$=5\cdot(25-2)\cdot\left(25^{n-1}+25^{n-2}\cdot2+\ldots+25\cdot2^{n-2}+2^{n-1}\right)+23\cdot2^n.$$

9.5. Див. розв'язання задачі 8.5.

10.1. Оскільки 34! ділиться на 10^7, то другою заміненою цифрою є 0. Також 34! ділиться на 9, тому на 9 має ділитися сума всіх записаних цифр. Звідси випливає, що іншою заміненою цифрою є 6.

10.2. Лінія, симетрична до параболи $y = x^2$ з вершиною у точці $(0;0)$ відносно точки $(1;1)$, також є параболою з вершиною $(2;2)$, вітки якої напрямлені вниз. Тому $f(x) = -(x-2)^2 + 2 = -x^2 + 4x - 2$. Проводячи у рівнянні $f(f(x)) = f(x)$ заміну $f(x) = t$, отримуємо рівняння $-t^2 + 4t - 2 = t$, з якого маємо $t_1 = 1, t_2 = 2$. Тоді з рівнянь $-x^2 + 4x - 2 = 1$ та $-x^2 + 4x - 2 = 2$ знаходимо $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$.

10.3. Нехай $x = a + 2,\ y = b + 2,\ z = c + 2$, де $a, b, c -$додатні числа. Тоді, використовуючи нерівність Коші, отримуємо

$$A = \frac{(a+2)^4}{bc} + \frac{(b+2)^4}{ca} + \frac{(c+2)^4}{ab} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{(a+2)^4}{bc} \cdot \frac{(b+2)^4}{ca} \cdot \frac{(c+2)^4}{ab}} \geq$$

$$\geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{\left(2\sqrt{2a}\right)^4}{bc} \cdot \frac{\left(2\sqrt{2b}\right)^4}{ca} \cdot \frac{\left(2\sqrt{2c}\right)^4}{ab}} = 192,$$

причому рівності досягаються для $a = b = c = 2$, тобто $x = y = z = 4$. Тому 192 є найменшим значенням заданого виразу.

Також можна було скористатися нерівністю

$$A = 16 \cdot \left(\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{y-2} \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{z-2} + \frac{\left(\frac{y}{2}\right)^2}{z-2} \cdot \frac{\left(\frac{y}{2}\right)^2}{x-2} + \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{x-2} \cdot \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{y-2} \right) \geq$$

$$\geq 16 \cdot \left(\left(2 \cdot \frac{x}{2} - y + 2\right)\left(2 \cdot \frac{x}{2} - z + 2\right) + \left(2 \cdot \frac{y}{2} - z + 2\right)\left(2 \cdot \frac{y}{2} - x + 2\right) + \right.$$

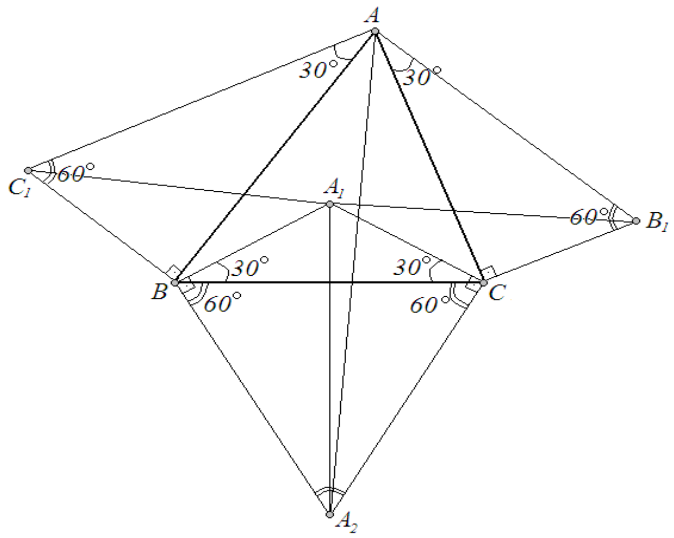
$$\left. + \left(2 \cdot \frac{z}{2} - x + 2\right)\left(2 \cdot \frac{z}{2} - y + 2\right) \right) = 8 \cdot \left((x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \right) + 192,$$

у якій рівність досягається для $x = y = z = 4$.

10.4. Умови задачі суперечливі. Оскільки довжина кожного стрибка не перевищує $n-1$, то вказана сума довжин стрибків за виключенням останнього не може перевищувати $(n-1)(2n-1)$.

Розв'яжіть аналогічну задачу для набору точок $1, 2, 3, ..., 2n.$

10.5. Побудуємо на стороні BC даного трикутника зовні його рівносторонній трикутник BCA_2 (див. рисунок).



З рівності трикутників A_1BA_2 та A_1CA_2 (за трьома сторонами) випливає, що $\angle A_2A_1B = \angle A_2A_1C = 60°.$ З прямокутних трикутників ABC_1 та A_2BA_1 маємо $\frac{BA}{BC_1} = \frac{BA_2}{BA_1} = tg60°.$ Оскільки, крім того, $\angle ABA_2 = \angle C_1BA_1,$ то трикутники C_1BA_1 та ABA_2 подібні (за пропорційними сторонами і кутом між ними). Отже, $\angle C_1A_1B = \angle AA_2B.$ Аналогічно доводиться, що $\angle B_1A_1C = \angle AA_2C.$ Звідси випливає, що

$$\angle C_1A_1B_1 = \angle BA_1C + (\angle C_1A_1B + \angle CA_1B_1) = 120° + 60° = 180°,$$

тобто точки $A_1,\ B_1, C_1$ лежать на одній прямій.

11.1. Див. розв'язання задачі 10.1.

11.2. Нехай числа $a > b > 1$ такі, що $f(a) = g(b).$ Оскільки

$$a^4 = b^4 + b^2 + b + 1 \Leftrightarrow a^4 - b^4 = b^2 + b + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a - b = \frac{b^2 + b + 1}{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3} < \frac{3b^2}{4b^3} = \frac{3}{4b},$$

то відстань між точками $A(a, f(a))$ та $B(b, g(b))$ менша за $\frac{1}{100},$ наприклад, для всіх $b \geq 75.$

11.3. Див. розв'язання задачі 10.5.

11.4. Безпосередньою перевіркою переконуємося, що прості числа $p=2,\ p=5,\ p=7$ не задовольняють умову задачі, а $p=3$ задовольняє умову, оскільки $3^5-3=240=2\cdot 5!$.

Для простих чисел $p>7$ зауважимо, що з умови задачі випливає подільність $n!$ на p. Тому $n\geq p$, а отже, отримуємо

$$2n!\geq 2p!=2p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1>$$
$$>p(p-1)\cdot\left(3(p-4)\right)^3>p(p-1)\cdot(p+1)^3>$$
$$>p(p-1)\cdot(p+1)\left(p^2+1\right)=p^5-p.$$

Таким чином, $p=3-$ єдине шукане число.

11.5. Очевидно, що отримані у результаті розрізань шматки є опуклими многокутниками. При одному розрізанні загальна кількість вершин збільшується щонайбільше на 4. Тому після 100 розрізань многокутники матимуть не більше 404 вершин. З іншого боку, після 100 розрізань утворився 101 многокутник. Нехай серед них n трикутників та m чотирикутників, а решта – не менше, як п’ятикутники. Тоді утворені многокутники мають не менше за $3n+4m+5(101-n-m)=505-2n-m$ вершин. Отже, з нерівності $505-2n-m\leq 404$ отримуємо $2n+m\geq 101>100$.

II тур

7.1. Оскільки олівець та ручка коштують більше, ніж зошит, то два олівці і ручка дорожчі, ніж олівець і зошит, а отже, внаслідок другого твердження, дорожчі, ніж три ручки. Звідси отримуємо, що олівець дорожчий за ручку.

7.2. Навмання вибираємо монету А. Порівнюємо її з кожною іншою. Якщо кількість рівних їй за вагою монет відмінна від 4, монета А є фальшивою. Якщо ця кількість дорівнює 4, то відкладаємо виявлені 5 рівних за вагою монет, і беремо монету В серед інших. Порівнюємо В з усіма іншими залишеними. Якщо ця кількість не дорівнює 4, то В фальшива. Якщо ж вона дорівнює 4, то відкладаємо В і рівні їй за вагою монети. Остання монета, що залишилася, точно є фальшивою.

7.3 Оскільки рядок початкового квадрата містить непарну кількість клітинок, він буде перетинати непарну кількість частин 1×3 та 3×1. Якщо твердження задачі невірне, то кожен рядок має перетинати непарну кількість частин 4×4, тобто одну. Таким чином, один квадратик 4×4 буде лежати у перших чотирьох рядках, один – у чотирьох наступних, і ми не зможемо «вмістити» потрібний один квадратик у три нижні рядки.

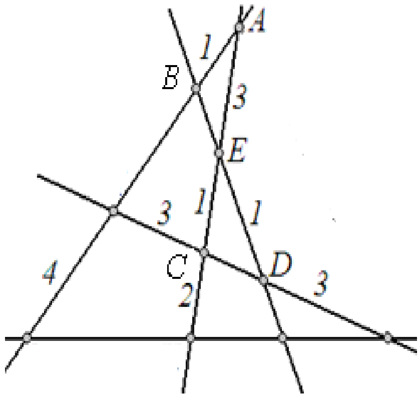
7.4. Нехай $n=\overline{a_1a_2...a_{k-1}a_k}$, де $a_1 \neq 0, a_2, ..., a_{k-1}, a_k$ – цифри десяткової системи числення. Помічаємо, що $121n$ є сумою одного числа $100n$, двох чисел $10n$ і одного числа n. Якщо додавати ці числа порозрядно в стовпчик:

$$
\begin{array}{r}
\overline{a_1a_2a_3...a_{k-1}a_k\ 0\ 0} \\
+\quad \overline{a_1a_2...a_{k-2}a_{k-1}a_k\ 0} \\
\overline{a_1a_2...a_{k-2}a_{k-1}a_k\ 0} \\
\overline{a_1...a_{k-3}a_{k-2}a_{k-1}a_k}
\end{array}
$$

і при цьому не буде переносів у наступні розряди, то кожна цифра числа n додасться 4 рази, і сума цифр числа $121n$ дорівнюватиме $4S(n)=4\cdot 503=2012.$ А при наявності хоча б одного переносу сума цифр числа $121n$, очевидно, зменшиться (бо тоді із одного розряду суми віднімається 10, 20 або 30, а до наступного додається відповідно тільки 1, 2 або 3), тобто у цьому випадку $S(121n)<4S(n)=2012.$ Оскільки за умовою задачі $S(121n)=2012,$ то це означає, що переносів не було, а отже, усі цифри числа n не перевищують 4. Звідси, додаючи $10n+n$ у стовпчик без переносів, отримуємо, що $11n=\overline{a_1a_2...a_k0}+\overline{a_1a_2...a_k}=\overline{a_1(a_2+a_1)...(a_k+a_{k-1})a_k}.$ Тому $S(11n)=a_1+(a_2+a_1)+...+(a_k+a_{k-1})+a_k=2S(n)=1006.$

8.1. Оскільки сума двох послідовних кількостей хвилин непарна, то парності першого, третього, п’ятого і т.д. записаних чисел чергуються. Серед парних чисел цієї послідовності лише перше може дорівнювати 2 (отримане як $2+0$ або $1+1$). Наступні парні числа більші за 2, і тому складені.

8.2. Див. розв’язання задачі 7.2.



8.3. Довжини всіх отриманих відрізків є натуральними числами, а суми довжин двох сторін трикутника більші за довжину третьої сторони. Тому з трикутників CDE та ABE знаходимо $CD=1$, $BE=3$. Тоді трикутник CDE рівносторонній, отже,

$\angle CED = 60°$, $\angle BEA = 60°$. Звідси і з рівності $BE = AE$ випливає, що всі кути трикутника ABE дорівнюють $60°$. Це суперечить тому, що $AB \neq AE$.

8.4. Доведемо, що виграє перший гравець. Його виграшна стратегія може бути такою: спочатку він віднімає x^2, а далі повторює ходи другого. У результаті після ходів першого гравця завжди будуть з'являтися квадратні тричлени, вільний член яких є непарним, а коефіцієнти при x^2 та x мають однакову парність. У цілих точках вони набуватимуть лише непарних значень, тому не матимуть цілих коренів. Отже, діючи так, перший гравець не програє. Зауважимо тепер, що з кожним ходом сума коефіцієнтів одержаного многочлена зменшується на 1. Отже, через декілька ходів ця сума стане рівною 0, а одержаний многочлен з такою сумою коефіцієнтів матиме корінь $x = 1$. Це означає, що не пізніше цього ходу гра закінчиться перемогою першого гравця.

9.1. Оскільки маємо $g(x) = 2x + 1 \geq 2 \cdot 1 + 1 = 3$ при $x \geq 1$ та $g(x) = -x + 2 > -1 + 2 = 1$ при $x < 1$, то $g(x) > 1$ для всіх дійсних x. Отже,

$$f\left(g(x)\right) = 2 - g(x) = \begin{cases} 1 - 2x, & x \geq 1, \\ x, & x < 1. \end{cases}$$

Залишається тільки намалювати графік отриманої функції.

9.2. Нехай біля вершин правильного восьмикутника послідовно, за рухом годинникової стрілки, записані числа:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8..$$

а). У цьому пункті умова задачі виконується, наприклад, якщо, наприклад, $a_1 = 1$, $a_2 = 5$, $a_3 = 6$, $a_4 = 2$, $a_5 = 4$, $a_6 = 7$, $a_7 = 3$, $a_8 = 8$.

б). Припустимо, що потрібне розміщення заданих чисел існує. Числа 2 і 3 не можуть бути записаними на сусідніх вершинах, інакше і зліва, і справа від них повинно бути записаним лише число 8, що неможливо. Між числами 1 і 2 та 1 і 3 знаходиться не менше двох вершин, бо інакше навіть 8 буде недостатньо для отримання потрібних сум. Тому, не порушуючи загальності, можна вважати, що $a_1 = 1$, $a_4 = 2$, $a_6 = 3$ (або $a_1 = 1$, $a_4 = 3$, $a_6 = 2$). Для обох цих випадків однозначно $a_5 = 8$. Тоді для довільного розміщення числа 4, яке завжди попадатиме в одну трійку з числом 1, третім числом цієї трійки знову має бути тільки 8, що дає суперечність.

9.3. Див. розв'язання задачі 8.3.

9.4. Див. розв'язання задачі 8.4.

10.1. Зрозуміло, що $x \in [0;1)$. Оскільки для будь-якого дійсного числа a і натурального числа n виконується рівність

$$\{n\{a\}\} = n\{a\} - [n\{a\}] = n(a-[a]) - [n(a-[a])] =$$

$$= na - n[a] - [na - n[a]] = na - n[a] - [na] + n[a] = na - [na] = \{na\},$$

то вихідне рівняння еквівалентне такому

$$\{3^5 x\} = x \Leftrightarrow 243x - [243x] = x \Leftrightarrow 242x = [243x].$$

Оскільки що $x \in [0;1)$, то $242x$ буде цілим тоді й тільки тоді, коли $x = \frac{k}{242}$, $k = 0, 1, 2, \dots, 241.$ З іншого боку, якщо x має такий вигляд, то $[243x] = \left[\frac{243k}{242}\right] = \left[k + \frac{k}{242}\right] = k = 242x.$ Тому всі такі x і тільки вони є розв'язками заданого рівняння.

10.2. Нехай $n = \overline{a_1 a_2 ... a_k}$, де $a_1 \neq 0, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k$ – цифри десяткової системи числення. Помічаємо, що $2012n$ є сумою двох чисел $1000n$, одного числа $10n$ і двох чисел n. Якщо додавати ці числа порозрядно у стовпчик:

$$\begin{array}{r} \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_{k-1} a_k \ 0 \ 0 \ 0} \\ \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_{k-1} \ a_k \ 0 \ 0 \ 0} \\ + \qquad \overline{a_1 a_2 \dots a_{k-3} a_{k-2} a_{k-1} a_k \ 0} \\ \overline{a_1 \dots a_{k-4} a_{k-3} a_{k-2} a_{k-1} a_k} \\ \overline{a_1 \dots a_{k-4} a_{k-3} a_{k-2} a_{k-1} a_k} \end{array}$$

і при цьому не буде переносів у наступні розряди, то кожна цифра числа n додасться 5 разів, і сума цифр числа $2012n$ дорівнюватиме $5S(n) = 5 \cdot 404 = 2020.$ При перенесенні однієї одиниці у старший розряд сума цифр зменшується на 9. Оскільки $2011 = 5 \cdot 404 - 9$, то у старший розряд було перенесено одну одиницю. Тому при додаванні двох чисел $1000n$, одного числа $10n$ і одного числа n (тобто при множенні n на 2011) у старші розряди або було перенесено одну одиницю, або нічого, що дає наступні можливості для значення суми цифр числа $2011n$: $1607 = 4 \cdot 404 - 9$

$1616 = 4 \cdot 404$. Обидва ці значення можуть бути реалізованими. Нехай $A-$ чотириста цифрове число, у записі якого 100 разів підряд записано 4000. Тоді сума цифр кожного з чисел $n_0 = A + 400$, $n_1 = A + 40$ становить 404, сума цифр кожного з чисел $2012n_0$, $2012n_1$ дорівнює 2011, а суми цифр чисел $2011n_0$ та $2011n_1$ дорівнюють відповідно 1616 та 1607.

10.3. Продовжимо відрізок DK поза точку K до точки M такої, що $KM = KC$. Тоді $\Delta BKM = \Delta BKC$. За теоремою синусів $\dfrac{BC}{KC} = \dfrac{\sin\angle BKC}{\sin\angle KBC} = \dfrac{\sin\angle AKD}{\sin\angle KAD} = \dfrac{AD}{KD}$, тому $\dfrac{KM}{KD} = \dfrac{KC}{KD} = \dfrac{BC}{AD} = \dfrac{BO}{OD}$, де $O-$ точка перетину діагоналей трапеції $ABCD$. Звідси випливає, що $\dfrac{KO}{BC} = \dfrac{KO}{MB} = \dfrac{OD}{BD} = \dfrac{AD}{BC+AD}$, тобто $KO = \dfrac{BC \cdot AD}{BC+AD}$. Аналогічно доводимо, що й $LO = \dfrac{BC \cdot AD}{BC+AD}$. Отже, $KO = LO$.

10.4. Розглянемо перетворення $f : (x, y) \to \left(\dfrac{x+1}{y}, x\right)$. П'ять його послідовних виконань дають такі результати:

$$(x,y) \to \left(\frac{x+1}{y}, x\right) \to \left(\frac{x+y+1}{xy}, \frac{x+1}{y}\right) \to$$

$$\to \left(\frac{y+1}{x}, \frac{x+y+1}{xy}\right) \to \left(y, \frac{y+1}{x}\right) \to (x,y).$$

а). $2012 = 5 \cdot 402 + 2$, то після 2012 операцій Андрійко одержить числа $\dfrac{a+b+1}{ab} = \dfrac{20+12+1}{20 \cdot 12} = \dfrac{33}{240} = \dfrac{11}{80}$ та $\dfrac{a+1}{b} = \dfrac{20+1}{12} = \dfrac{21}{12} = \dfrac{7}{4}$.

б). Щоб одержані після першої та четвертої таких операцій пари складалися з натуральних чисел, необхідно і достатньо, щоб $a+1 = kb$, $b+1 = na$, де $k, n-$ натуральні числа. Звідси отримуємо $(n-1)a + (k-1)b = 2$, що для натуральних чисел a, b, k, n можливо лише у випадках: $n=1, k=2$; $n=1, k=3$ $n=2, k=1$ $n=2, k=2$; $n=3, k=1$. Тоді з двох попередніх рівностей відповідно знаходимо такі пари натуральних чисел (a,b): $(3,2)$; $(2,1)$; $(2,3)$; $(1,1)$; $(1,2)$.

З ланцюжка $(1,1)\to(2,1)\to(3,2)\to(2,3)\to(1,2)\to(1,1)$ випливає, що всі знайдені пари чисел справді мають бажану властивість.

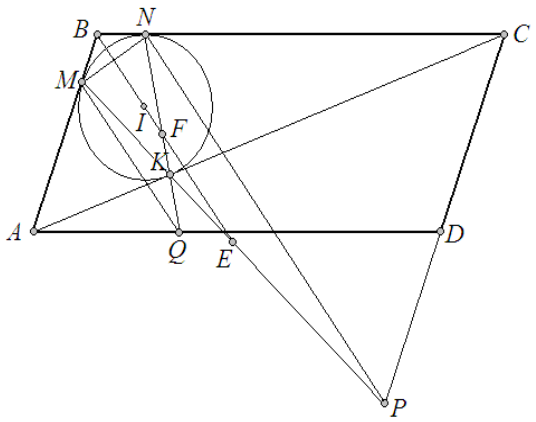
11.1. Див. розв'язання задачі 10.1.

11.2. Оскільки $\sin^2\alpha+\sin^2\beta<1=\sin^2\alpha+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, а $\sin^2 x$ зростає при $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, то $\beta<\frac{\pi}{2}-\alpha$. Отже, отримуємо

$$\sin^2(\alpha+\beta)-\left(\sin^2\alpha+\sin^2\beta\right)=\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 2\beta)-\cos^2(\alpha+\beta)=$$
$$=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\cos^2(\alpha+\beta)=$$
$$=\cos(\alpha+\beta)\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)=2\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha\sin\beta>0,$$

звідки і випливає потрібна нерівність.

11.3. Див. розв'язання задачі 10.2.



11.4. За властивістю дотичних до кола $AM=AK$, $BM=BN$, $CN=CK$. Отже, $\angle AQK=\angle CNK=\angle CKN=\angle AKQ$, тому $AQ=AK=AM$. Нехай I – центр кола, вписаного у трикутник ABC. Оскільки BI – бісектриса кута ABC, то

$\angle AMQ=\dfrac{180^\circ-\angle MAQ}{2}=\dfrac{\angle ABC}{2}=\angle ABI$, тобто $MQ\parallel BI$. Аналогічно доводиться, що $NP\parallel BI$. Крім того, BI проходить через середину MN, тому за теоремою Фалеса BI проходить через середини відрізків MP та NQ, що і завершує доведення.

2013 рік

7.1. З умови задачі маємо рівність $1111a+111b+11c+d=2013$. Оскільки $1111\cdot 2=2222>2013$, то $a=1$. Тоді $111b+11c+d=902$. Враховуючи, що $11c+d\le 108<111$, послідовно отримуємо $b=8$, $11c+d=14$, $c=1$, $d=3$. Отже, єдиним таким числом є $\overline{abcd}=1813$.

7.2. Відокремимо деяку монету A, а решту монет розіб'ємо на 12 пар. Далі послідовно кладемо кожну пару монет у скриньку. Розглянемо можливі випадки: 1). Скринька один раз показала «2». Отже, обидві фальшиві монети визначені не більше, ніж за 12 операцій. 2). Скринька один раз показала «1», наприклад, у парі монет B і C. Тоді монета A фальшива. Поклавши її у скриньку разом з монетою B, визначимо, котра з монет B чи C є другою фальшивою. 3). Скринька двічі показала «1», наприклад, у парах монет B і C, D і E. Тоді перевіряємо пари монет A і B та A і D. Оскільки тепер монета A справжня, то за отриманими результатами однозначно робимо висновок, котрі з монет у парах B і C, D і E є фальшивими.

7.3. Якщо Оленка зайняла місце 3, то Андрійко й Сергійко отримали місця 2 і 4, Миколка – місце 1, а Даринка — місце 5. Якщо ж місце Оленки відмінне від третього, то вона не зможе однозначно визначити розподіл місць для цієї п'ятірки учнів, що суперечить умові задачі. Отже, Даринка зайняла п'яте місце.

7.4. Остачі від ділення числа n на 10 і 20 або співпадають, або відрізняються на 10. Перший випадок неможливий, бо за умовою задачі друга з цих остач є більшою. У другому випадку між цими остачами буде 9 інших різних остач, а це можливо лише за умови, що всі остачі є послідовними натуральними числами. Зауважимо, що потрібну умову задовольняють усі числа $n \equiv -9 \pmod{m}$, де m – найменше спільне кратне чисел 10, 11, …, 20.

7.5. Периметр всього прямокутника дорівнює як сумі периметрів, записаних у чотирьох клітинках, розташованих на обох його діагоналях, так і сумі інших чотирьох записаних периметрів. З рівності $7+11+10+x=10+5+13+7$ знаходимо $x=7$. Відзначимо, що описана ситуація цілком можлива. Наприклад, якщо розміри кімнат по горизонталі зліва направо дорівнюватимуть 1, 1.5, 4, 2.5 відповідно, а по вертикалі знизу вверх – 1, 4, 1, 2.5.

8.1. Чебурашка їсть удвічі повільніше за Крокодила Гену, тому за першу хвилину він мав з'їсти стільки ж, скільки з'їв одночасно з Крокодилом Геною. Оскільки всього він з'їв половину торта, то за хвилину Чебурашкою була з'їдена четверта його частина. Отже, весь торт Чебурашка з'їв би за 4 хвилини.

8.2. Найбільшим числом вигляду $\overline{1bcd}$ є число 1789. Замінивши $b=7$ на $b=6$, отримаємо число 1689 плюс 2 менші числа 1678 та 1679. Разом – 3 числа вигляду $\overline{16cd},\ c \geq 7.$ Замінивши $b=6$ на $b=5,$ отримаємо 3 числа вигляду $\overline{15cd},\ c \geq 7,$ плюс 3 менші числа вигляду $\overline{156d}.$ Разом – 6 чисел вигляду $\overline{15cd},\ c \geq 6.$ Замінивши $b=5$ на $b=4,$ отримаємо 6 чисел вигляду $\overline{14cd},\ c \geq 6,$ плюс 4 менші числа вигляду $\overline{145d}.$ Разом – 10 чисел вигляду $\overline{14cd},\ c \geq 5.$ Замінивши $b=4$ на $b=3,$ отримаємо 10 чисел вигляду $\overline{13cd},\ c \geq 5,$ плюс 5 менших чисел вигляду $\overline{134d}.$ Разом – 15 чисел вигляду $\overline{13cd},\ c \geq 4.$ І, нарешті, замінивши $b=3$ на $b=2,$ отримаємо 15 чисел вигляду $\overline{12cd},\ c \geq 4,$ плюс 6 менших чисел вигляду $\overline{123d}.$ Разом – 21 число вигляду $\overline{12cd},\ c \geq 3.$ Отже, до числа 1589 включно будуть виписані $21+15+10+6=52$ числа. Тому на 53-му місці виявиться число 1678. Зауважимо також, що нескладно було й виписати перші 53 елементи вказаної послідовності чисел.

8.3. Так, зможе. Розіб'ємо числа на 2014 пар: (1, 2) , (3, 4) , … , (4027, 4028) . Якщо Миколка своїм ходом закреслює число однієї з пар, то Андрійко відповідає закресленням іншого числа у тій же парі. Після 2013-го ходу Андрійка залишаються два числа з однієї пари, різниця яких дорівнює 1.

8.4. Нехай $H -$точка перетину висот трикутника $ABC.$ Враховуючи, що кут між хордою і дотичною дорівнює вписаному куту, який спирається на дугу, що стягується цією хордою, і навколо чотирикутника $AKHL$ можна описати коло, отримуємо $\angle BAP + \angle CAQ = \angle CBP + \angle BCQ = \angle CBH + \angle BCH = \angle CHK = \angle BAC.$ Оскільки точки P та Q знаходяться всередині кута $BAC,$ то звідси випливає, що точки A, P, Q лежать на одній прямій.

8.5. Нехай $p^3+q^2=n^3.$ Тоді $(n-p)\left(n^2+np+p^2\right)=q^2.$ Оскільки $n-p<n^2+np+p^2,$ а число q просте, то $n-p=1,$ $n^2+np+p^2=q^2.$ Звідси отримуємо $(p+1)^2+(p+1)p+p^2=q^2,$ тобто $3p^2+3p+1=q^2,$ $3p(p+1)=(q-1)(q+1).$ Тому $q-1$ або $q+1$ має ділитися на $p.$ Оскільки $(p+1)^2<3p^2+3p+1=q^2<(2p+1)^2,$ то $p+1<q<2p+1,$ $p<q-1<2p,$ $p+2<q+1<2p+2.$ Отже, на p може ділитися лише $q+1$ за умови, що $q+1=2p.$ У такому разі отримуємо рівняння $3p^2+3p+1=(2p-1)^2$, з якого знаходимо $p=7$. Тоді $q=2p-1=13$.

9.1. Нехай $n-$ менше з цих чисел, а $x-$ закреслена цифра у більшому з них. Тоді $n+(10n+x)=20132013$, $11n+x=20132013$. Оскільки 20132013 ділиться на 11, то $x=0$, $n=18301830$. Отже, шуканими є числа 1830183 та 18301830.

9.2. Віднявши від першого рівняння друге, отримаємо рівняння $(a-b)\left(x^{2013}-1\right)=0$. Оскільки $a\neq b$, то спільним коренем заданих двох рівнянь може бути лише $x_0=1$. Отже, $a+1+b=0$, $a+b=-1$.

9.3. У трикутниках AEF та EDF кут F спільний. Оскільки кут між хордою BE і дотичною EF дорівнює вписаному куту BCE, отримуємо $\angle DEF=\angle BCE=\angle FAE$. Отже, ці два трикутники подібні, причому $\dfrac{EF}{DF}=\dfrac{AF}{EF}$. Тому $EF=\sqrt{DF\cdot AF}=\sqrt{a(a-b)}$.

9.4. Справді, $\dfrac{x(y-x)}{x+y}+\dfrac{y(z-y)}{y+z}=(y-x)\left(\dfrac{x}{x+y}-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{y-x}{2}+$

$$+(z-y)\left(\frac{y}{y+z}-\frac{1}{2}\right)+\frac{z-y}{2}=-\frac{(x-y)^2}{2(x+y)}-\frac{(y-z)^2}{2(y+z)}+\frac{z-x}{2}\leq\frac{z-x}{2}.$$

9.5. Доведемо, що це можливо. Серед чисел 1, 2, … , 900 кожну з остач 0, 1, 2 від ділення на 3 дають по 300 чисел. Розіб’ємо таблицю на 100 квадратиків розміру 3×3 і будемо по черзі заповнювати кожен з них. Спочатку по діагоналі запишемо довільні три числа, які при діленні на 3 дають остачу 2, а потім у решту клітинок впишемо довільні шість чисел так, щоб у кожному рядку та кожному стовпці квадратика було по три числа з різними остачами від ділення на 3.

10.1. Можна. Наприклад, умову задачі задовольняють відрізки $[0,1]$, $[0,2]$, $[0,3]$, $[2,5]$, $[3,5]$, $[4,5]$.

10.2. З умови задачі маємо $mn-7=\sqrt{m^2+n^2}>0$. Звідси послідовно отримуємо $(mn-7)^2=m^2+n^2$, $(m+n)^2-(mn-6)^2=13$, $(m+n-mn+6)(m+n+mn-6)=13$. Оскільки 13 – просте число, а $mn-6>0$, то $m+n-mn+6=1$, $m+n+mn-6=13$. З отриманої системи знаходимо $m+n=7,\quad mn=12.$ Отже, $m=4, n=3$ або $m=3, n=4$ як корені квадратного рівняння $x^2-7x+12=0.$

10.3. За нерівністю Коші-Буняковського отримуємо

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2x}+\frac{1}{\sqrt{7}}\cdot\sqrt{7y}\le\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{7}}\cdot\sqrt{2x+7y}\le\sqrt{\frac{9}{14}}\cdot\sqrt{14}=3.$$

10.4. Маємо $\angle APC=\angle AQC=90^\circ\Rightarrow MP=MQ=0,5AC,$ $\angle BPH=\angle BQH=90^\circ\Rightarrow NP=NQ=0,5BH.$ З рівності трикутників MPN та MQN (за трьома сторонами) випливає, що $MN\perp PQ.$ Далі, враховуючи умову $KQ=HQ,$ можливість описати навколо чотирикутника $CLHQ$ коло та рівність вписаних кутів, які спираються на одну дугу, отримаємо

$$\angle QKD=\angle QKH=\angle QHK=\angle QCL=\angle BCA=\angle BDA.$$

Отже, $PQ\,||\,AD.$ Тому $MN\perp AD.$

10.5. Розглянемо 672 числа $A_1=a_1,\quad A_2=a_1+a_2,...,$ $A_{672}=a_1+a_2+...+a_{672}=2013.$ Оскільки таких чисел більше, ніж остач від ділення на 671, то серед них знайдуться два числа A_m та $A_n,\, m>n,$ різниця яких $A_m-A_n=a_{n+1}+...+a_m,\, 0<A_m-A_n<2013,$ ділиться на 671, а отже, дорівнює 1342 або 671. Враховуючи, що $a_k\ne 1342$ для всіх $k,\, 1\le k\le 672,$ у першому випадку шуканими будуть записані поспіль принаймні два числа $a_{n+1},...,a_m.$ А у другому випадку такими є решта записаних поспіль чисел.

11.1. Оскільки

$$(\sin x-\sin y)+(\cos y-\cos x)=2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}+2\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2}=$$

$$=2\sin\frac{x-y}{2}\left(\cos\frac{x+y}{2}-\cos\frac{\pi+x+y}{2}\right)=4\sin\frac{x-y}{2}\sin\left(\frac{x+y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right),$$

то, враховуючи умову задачі, потрібно зобразити дві сукупності паралельних прямих $y=x+2\pi k,\, k\in Z,$ та $y=-x-\frac{\pi}{2}+2\pi m,\, m\in Z,$ які отримуємо з рівнянь $\sin\frac{x-y}{2}=0$ та $\sin\left(\frac{x+y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=0.$

11.2. З умови задачі випливає, що $x^{2013}(1-x)\ge 0.$ Тому $0\le x\le 1.$ Числа $x=0$ та $x=1$ є коренями заданого рівняння. А

для $x \in (0,1)$ отримуємо $[x] = 0,$ $\left\{ \frac{2015 + x}{1 + [x]} \right\} = \{2015 + x\} = \{x\} = x.$
Оскільки при цьому $x^{2013} < x < x + x^{2014},$ то інших коренів немає.

11.3. Розв'яжемо поставлену задачу для довільного трикутника зі сторонами $BC = a,$ $AC = b,$ $AB = c,$ $b > c.$ Нехай $I -$ центр, $r -$ радіус кола, вписаного у трикутник $ABC,$ $K -$ точка дотику цього кола до сторони $BC,$ $p -$ півпериметр, $S -$ площа трикутника $ABC.$ Відкладемо на відрізку AD таку точку $Q,$ що $AQ = IK = r.$ Точки перетину прямої QI та бісектриси AI зі стороною BC позначимо через N та L відповідно. Тоді чотирикутник $AQKI$ буде паралелограмом, а з подібності трикутників QKN та ILN отримаємо $\frac{KN}{LN} = \frac{QK}{IL} = \frac{AI}{IL} = \frac{b+c}{a},$ тобто $\frac{KC - NC}{LC - NC} = \frac{b+c}{a}.$ Враховуючи, що $KC = p - c,$ $LC = \frac{ab}{b+c},$ звідси знаходимо $NC = \frac{a}{2}.$ Таким чином, точка N співпадає з точкою $M.$ Отже, і точка Q співпадає з точкою $P.$ Тому

$$AP = AQ = r = \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Зокрема, для трикутника ABC зі сторонами $AB = 16$ *см*, $BC = 25$ *см*, $AC = 39$ *см* знайдемо

$$AP = \sqrt{\frac{(40-25)(40-39)(40-16)}{40}} = 3(см).$$

Зауважимо, що у випадку $c > b,$ міркуючи аналогічно, доведемо рівність $BN = \frac{a}{2}.$ Отже, також отримаємо $AP = r.$ А якщо $c = b,$ то прямі AD та MI не перетинаються, а співпадають.

11.4. З умови задачі маємо:

$$x = y = 0 \Rightarrow f(0) + f(f(0)) - f(0) = 0 \Rightarrow f(f(0)) = 0;$$

$$x = y = 1 \Rightarrow f(f(1)) + f(1 + f(1)) - f(1 + f(1)) = 1 \Rightarrow f(f(1)) = 1;$$

$$x = 1, y = 0 \Rightarrow f(f(0)) + f(f(1)) - f(1) = 1 \Rightarrow 0 + 1 - f(1) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow f(0) = f(f(1)) = 1.$$

Враховуючи тепер значення $f(1)=0$ та $f(0)=1$, отримаємо:

$$x=1, y=t, t\in R \Rightarrow f(f(t))+f(t)=1 \Rightarrow f(f(t))\equiv 1-f(t);$$

$$x=t, t\in R, y=0 \Rightarrow f(t)+f(f(t))-f(t)=t \Rightarrow f(f(t))\equiv t.$$

Звідси випливає, що $1-f(t)=t$ для всіх $t\in R.$ Перевірка показує, що функція $f(x)=1-x,\ x\in R,$ справді є розв'язком рівняння.

11.5. Доведемо, що, насправді, ірраціональних чисел не менше, ніж 1006. Якщо $x_n=0,$ то $x_{n+1}=4>0,$ а з ним і всі наступні елементи послідовності додатні. Тому серед чисел $x_1, x_2, ..., x_{2013}$ не більше одного нуля. Далі, з умови задачі випливають рівності

$$\left(x_{n+1}-\sqrt{7}x_n\right)^2=4\left(x_n^2+4\right) \Leftrightarrow 2\sqrt{7}x_n x_{n+1}=3x_n^2+x_{n+1}^2-16.$$

Враховуючи, що число $\sqrt{7}$ ірраціональне, така рівність для раціональних x_n та x_{n+1} можлива лише для $x_n=0$ або $x_{n+1}=0.$ У першому випадку знаходимо $x_{n+1}=4,$ а у другому будемо мати $x_n=-\dfrac{4}{\sqrt{3}}.$ Звідси випливає, що $(0,4)-$ єдина можлива пара двох сусідніх раціональних чисел у даній послідовності. Таким чином:

а). Якщо жодне з чисел $x_1, x_2, ..., x_{2013}$ не дорівнює нулю або $x_{2k}=0,$ то ірраціональних чисел не менше 1006, принаймні по одному у кожній з пар $(x_1,x_2),(x_3,x_4),...,(x_{2011},x_{2012}).$

б). Якщо $x_{2k-1}=0,$ то ірраціональних чисел також не менше 1006, принаймні по одному у парах $(x_2,x_3),(x_4,x_5),...,(x_{2012},x_{2013}).$

2014 рік

7.1. Могла. Наприклад, якщо її автомобіль півгодини рухався зі швидкістю 140 км/год, наступні півгодини – зі швидкістю 20 км/год, а потім ще півгодини – знову зі швидкістю 140 км/год Тоді його середня швидкість протягом будь-якої години складає 80 км/год. А середня швидкість на усьому шляху дорівнює 100 км/год.

7.2. Шуканим є число 333333. Воно ділиться на чотири числа з наведеної множини: 1, 3, 7 та 9. Якщо використовувати лише одну цифру 4, то отримаємо число 4, яке ділиться на 1, 2, 4. Якщо використовувати і цифри 3, і цифру 4, то таке число не може ділитись на 3, 6, 9, бо сума його цифр не ділиться на 3, та на 4, 5 та 8, бо останні дві цифри можуть бути лише 33, 34 або 43. Отже, воно може ділитись максимум на три числа: 1, 2 та 7. І, нарешті, якщо використовувати лише цифри 3, то отримані числа можуть ділитися хіба що на 1, 3, 7, 9. При цьому кількість використаних трійок має бути кратною трьом. Залишилось лише зауважити, що 333 не ділиться на 7, а 333333 – ділиться.

7.3. Оскільки у кожному з шести рядків має бути не більше, ніж 3 зірочки, то більше 18 зірочок поставити не вдасться. Приклад розстановки 18 зірочок наведений у таблиці справа.

*			*	*	
		*	*	*	
*	*				*
	*	*			*
		*	*	*	
*	*				*

7.4. Нехай $AC = x$. Тоді за нерівністю для сторін трикутника маємо $x < AB + BC = 3 + 7 = 10$ та $x + AD > CD \Leftrightarrow x + 3 > 11 \Leftrightarrow x > 8$. Єдиним цілим числом, яке задовольняє обидві нерівності є $x = 9$. Отже, $AC = 9$см, причому сторона AC є середньою у трикутнику ACD та найбільшою у трикутнику ABC.

8.1. Див. розв'язання задачі 7.1.

8.2. Позначимо через $S(K)$ суму цифр числа K. Нехай $N = \overline{abcd},\ a \neq 0,\quad M = N + 1 \leq 9999$. Розглянемо чотири можливі випадки: 1) якщо $d \neq 9$, то $S(M) - S(N) = 1$; 2) якщо $N = \overline{abc9},\ c \neq 9$, то $S(N) - S(M) = 8$; 3) якщо $N = \overline{ab99},\ b \neq 9$, то $S(N) - S(M) = 17$; 4) якщо $N = \overline{a999},\ a \neq 9$, то $S(N) - S(M) = 26$. Останній варіант є шуканим.

8.3. а). Можна. Дивись таблицю справа. Сума чисел у кожному рядку дорівнює 40, а у кожному стовпчику – 24.

1	11	5	14	9
8	3	12	4	13
15	10	7	6	2

б). Не можна. Сума всіх чисел таблиці дорівнює 120. Тому у рядках рівні суми можуть дорівнювати лише 40, а у стовпчиках – лише 24.

8.4. За умовою задачі $py + qx \,\vdots\, xy \;\Rightarrow\; py + qx \,\vdots\, x \;\Rightarrow\; py \,\vdots\, x$. Тому $y \,\vdots\, x$. Аналогічно доводимо, що $x \,\vdots\, y$. Отже, $x = y$.

8.5. Проведемо $MN \parallel CK$ – середню лінію трикутника BCK. Тоді $\angle NFM = \angle AFK = \angle AKF = \angle MNF$. Отже, $MF = MN = \frac{1}{2} BK$.

9.1. Оскільки $n=\overline{ab}-\overline{ba}=\left(10a+b\right)-\left(10b+a\right)=9(a-b)>0$, то $n=9k$. Очевидно, що максимальна кількість пар ненульових цифр, різниця між якими дорівнює k, буде при $k=1$, для якого існує 8 пар шуканих цифр. Тому $n=9$.

9.2. Якщо AB – діаметр кола c, то кола c_1 та c_2 дотикаються у точці $O\in AB$. В іншому разі AO та BO – діаметри кіл c_1 та c_2 відповідно. Якщо при цьому M – друга точка їх перетину, то $\angle AMO=\angle BMO=90°$, звідки випливає, що $M\in AB$.

9.3. а). Можна. Див. розв'язання задачі 8.3.а).

б). Не можна. Сума всіх чисел таблиці дорівнює 210 і не ділиться на 4. Тому в усіх чотирьох рядках суми рівними бути не можуть.

9.4. Позначимо $a^2=12n-119$ та $b^2=75n-539$. Виключивши n із цих рівностей, отримаємо

$$\frac{a^2+119}{12}=\frac{b^2+539}{75}\Leftrightarrow 25(a^2+119)=4(b^2+539)\Leftrightarrow 4b^2-25a^2=819.$$

Запишемо останню рівність у вигляді $(2b-5a)(2b+5a)=3^2\cdot 7\cdot 13$. Оскільки $819=1\cdot 819=3\cdot 273=7\cdot 117=9\cdot 91=13\cdot 63=21\cdot 39$ та $0<2b-5a<2b+5a$, то сума таких множників має ділитися на 4, а різниця – на 10. Отже, цілі значення a та b отримаємо лише у трьох із шести можливих варіантів:

$$\begin{cases}2b-5a=3,\\2b+5a=273,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=27,\\b=69,\end{cases}\Rightarrow n=\frac{a^2+119}{12}=\frac{848}{12}\notin \mathrm{Z}.$$

$$\begin{cases}2b-5a=7,\\2b+5a=117,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=11,\\b=31,\end{cases}\Rightarrow n=\frac{a^2+119}{12}=20.$$

$$\begin{cases}2b-5a=13,\\2b+5a=63,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=5,\\b=19,\end{cases}\Rightarrow n=\frac{a^2+119}{12}=12.$$

9.5. Якщо $a^2+b^2=0$, то нерівність доведена. А для $a^2+b^2>0$ з врахуванням умови задачі вона випливає з очевидної нерівності

$$\left(a^{2014}+b^{2014}\right)\left(a^2+b^2\right)-2\left(a^{2016}+b^{2016}\right)=\left(a^{2014}-b^{2014}\right)\left(b^2-a^2\right)\le 0.$$

10.1. Перепишемо нерівність у вигляді

$$(x-1)\left(\frac{(x+1)^4}{(x-1)^4}+\frac{1}{16}-\frac{(x+1)^2}{2(x-1)^2}\right)\ge 0\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}-\frac{1}{4}\right)^2\ge 0.$$

Звідси випливає, що розв'язками нерівності будуть всі значення $x>1$ та корені рівняння $\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}-\frac{1}{4}=0$, з якого маємо $\frac{x+1}{x-1}=\pm\frac{1}{2}$ та $x=-3,\ x=-\frac{1}{3}$ відповідно. Отже, $x\in\left(1;+\infty\right)\cup\left\{-3;-\frac{1}{3}\right\}$.

10.2. Звівши другу умову до спільного знаменника, з врахуванням першої умови отримаємо

$$\frac{cd+bd+ad}{abcd}=\frac{bc+ac+ab}{abcd}\Rightarrow ab+bc+ca=\left(a+d+c\right)d\Rightarrow$$

$$\Rightarrow ab+bc+ca=\left(a+b+c\right)^2\Rightarrow\left(a+b\right)^2+\left(b+c\right)^2+\left(a+c\right)^2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+b=b+c=c+a=0\Rightarrow a=b=c=0,$$

що суперечить другій заданій умові.

10.3. З першого рівняння системи маємо, що z парне та $x>y$, $x>z$. Тоді з другого рівняння випливає, що число x непарне та $13x<4x+3x+29$. Тому $x<5$. Враховуючи сказане, отримуємо $x=3,\ z=2$, а з другого рівняння системи знаходимо $y=1$.

10.4. За властивістю бісектриси трикутника з умови задачі маємо $\frac{AL}{LC}=\frac{AB}{BC}=\frac{AK}{MC}$. Крім того, $AK+MC=\frac{1}{2}\left(AB+BC\right)=AC$, тому $AK=AL,\ CM=CL$. Отже,

$$\angle KLM=180^\circ-\frac{180^\circ-\angle A}{2}-\frac{180^\circ-\angle C}{2}=\frac{\angle A+\angle C}{2}=90^\circ-\frac{1}{2}\beta.$$

10.5. Олеся перемагає. Якщо Андрій міняє деяку зірочку, окрім першої, на якусь цифру c, то Олеся міняє на таку ж цифру c будь-яку (окрім першої) зірочку, яка стоїть на місці іншої парності. Якщо ж Андрій не останнім ходом міняє першу зірочку на цифру $d\neq 0$, то Олеся міняє довільну зірочку на парній позиції на число $d-1$, а далі дотримується описаної вище стратегії. Таким чином, перед останнім ходом Андрія різниця між сумами цифр на непарних і сумами цифр на парних позиціях або дорівнює 0, і він не має права останнім ходом записати 0 на першій позиції, або така різниця дорівнює 1, і не стане кратною 11, що б не записав Андрій на непарній позиції.

11.1. Оскільки $\sin x\geq 0$ для всіх $x\in[0;\pi)$, то на цьому проміжку $2^{\sin x}\geq 2^0=1$, а $\sin 2^x\leq 1$. Таким чином рівність можлива лише якщо обидві функції одночасно набувають значення 1. Але

$2^{\sin x}=1$ лише при $x=0$, а при цьому значенні $\sin 2^0=\sin 1<1$. Отже, на проміжку $[0;\pi)$ задане рівняння розв'язків не має.

11.2. а). Якщо $d=0$, то усі члени задовольняють умову, а при $d<0$ серед членів прогресії не усі будуть натуральними числами. Нехай прогресія має різницю $d>0$ і $a_l=m^k$ для деяких натуральних $m>1$ та l. Тоді для кожного натурального n

$$(m+dn)^k=m^k+dN=a_l+dN=a_{N+l}.$$

б) Існує. Наприклад, $a_n=p+p^2(n-1)$, де p – довільне просте число. Кожний її член ділиться на p, але не ділиться на p^2. Тому є не вище, ніж першим степенем натурального числа.

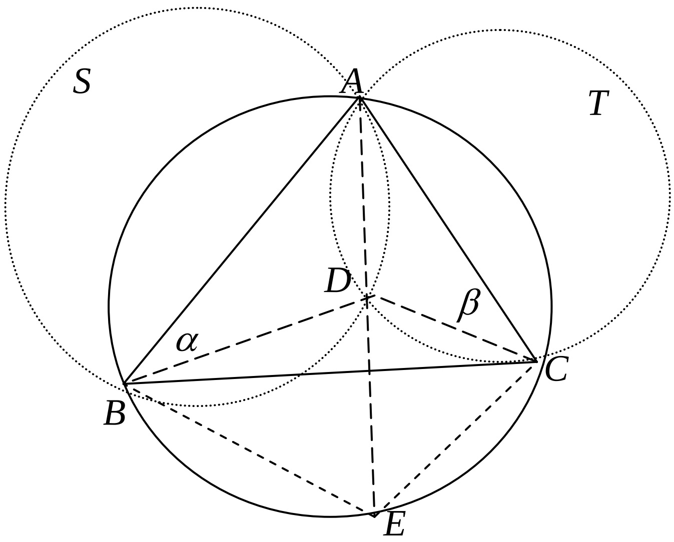
11.3. Позначимо $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ - кути трикутника, які лежать навпроти сторін $a,\ b,\ c$ відповідно. Запишемо теорему косинусів для кожного доданка у лівій частині та застосуємо нерівність Коші-Буняковського:

$$\sqrt{a^2+b^2-c^2}+\sqrt{b^2+c^2-a^2}+\sqrt{c^2+a^2-b^2}=$$
$$=\sqrt{2ab\cos\gamma}+\sqrt{2bc\cos\alpha}+\sqrt{2ca\cos\beta}=$$
$$=\sqrt{ab}\cdot\sqrt{2\cos\gamma}+\sqrt{bc}\cdot\sqrt{2\cos\alpha}+\sqrt{ca}\cdot\sqrt{2\cos\beta}\le$$
$$\le\sqrt{ab+bc+ca}\cdot\sqrt{2\left(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\right)}.$$

Таким чином, задана нерівність буде доведена, якщо справджується нерівність $2\left(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\right)\le 3$. Для кутів гострокутного трикутника вона безпосередньо випливає з нерівності Єнсена:

$$\frac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{3}\le\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}.$$

Її також легко отримати для кутів довільного трикутника векторним способом з нерівності $\left(\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3\right)^2\ge 0$, де $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ – одиничні вектори, відкладені на його сторонах.



11.4. Нехай $\angle ABD=\alpha$, $\angle ACD=\beta$ (див. рисунок). З властивостей вписаних кутів $\angle CAD=\angle ABD=\alpha$,

$\angle BAD = \angle ACD = \beta$, $\angle BED = \angle BEA = \angle BCA$. Крім того, $\angle BAC = \angle BDE = \alpha + \beta$. Отже, $\Delta ABD \sim \Delta CAD$ та $\Delta ABC \sim \Delta DBE$. З пропорційності відповідних сторін подібних трикутників отримуємо рівності $\frac{AB}{CA} = \frac{BD}{AD}$ та $\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{DE}$ відповідно. Звідси маємо $DE = \frac{AC \cdot BD}{AB} = AD$, що й треба було довести.

11.5. Див. розв'язання задачі 10.5.

2015 рік

7.1. Щоб з'єднати між собою нові міста, потрібно побудувати 10 доріг. Решта 2005 доріг з'єднають нові міста зі старими, яких, таким чином, було $2005:5=401$. Тому міст у царстві стало 406.

7.2. Водій повинен провезти чотирьох солдатів 18 км і висадити їх за 12 км від кінцевого пункту. Потім повернутися назад на 12 км, щоб підібрати наступних чотирьох солдатів із восьми, які за цей час пройдуть 6 км, та провезти їх також на 18 км, висадивши за 6 км до кінцевого пункту. Тоді ще раз повернутись назад на 12 км за останніми чотирма солдатами, які у даний час опиняться на відстані 12 км від початкового пункту, і везти їх 18 км до пункту призначення. Таким чином, усі прибудуть до місця призначення одночасно. При цьому автомобіль проїде 78 км за 2 год 36 хв. Стільки ж часу затратять і солдати на свою передислокацію.

7.3. Не може. Для перемоги Миколці потрібно першою покласти гирю масою 4г. Решту 6 гир розіб'ємо на пари: (1г, 7г), (2г, 6г), (3г, 5г). Кожним наступним ходом Миколка відповідає вибором гирі з тієї ж пари, з якої перед цим взяв гирю Петрусь. При цьому після третього ходу Миколки стрілка покаже масу 20г. Тому, зробивши свій третій хід, Петрусь програє.

7.4. Оскільки $13\cdot 13=169=33\cdot 5+4,$ то більше 33 таких прямокутників отримати не вдасться. Щоб отримати 33 прямокутники, відріжемо від квадрата смугу розмірами $13\times 5,$ яку можна розрізати на 13 потрібних фігурок. Від решти відріжемо смугу розмірами $8\times 5,$ з якої отримаємо 8 прямокутників розмірами $1\times 5.$ І, нарешті, квадрат розміром $8\times 8,$ який залишився, розріжемо на 4 прямокутники розмірами 3×5 та один квадратик у його центрі розміром 2×2. З останніх чотирьох прямокутників у сукупності отримаємо ще 12 фігурок потрібної форми і розмірів.

8.1. Нехай два коні, дві корови та дві кози, розбившись на пари, як в умові задачі, з'їдають по декілька аналогічних стіжків протягом 36 днів. Перша пара за цей час з'їсть 4 стіжки, друга – 3, третя – 2. Разом – 9 стіжків. Таким чином, об'єм сіна в один стіжок вони разом з'їдають за 4 дні. Відповідно, один кінь, одна корова та одна коза разом з'їли би такий стіжок за 8 днів.

8.2. Оскільки

$$\overline{aba}-\overline{bab}=(100a+10b+a)-(100b+10a+b)=91(a-b)$$

ділиться на 7, то й $\overline{bab}$ ділиться на 7. Крім того,

$$\overline{aba}=100a+10b+a=7(14a+b)+3(a+b).$$

Тому обидва ці числа діляться на 7 тоді і тільки тоді, коли $a+b$ ділиться на 7. Для $a+b=7$ таких пар отримаємо три, а для $a+b=14$ їх є дві. Разом маємо 5 пар, а саме: $(434,343)$, $(525,252)$, $(616,161)$, $(959,595)$, $(868,686)$.

8.3. Оскільки $x^2+4\ge4x,\ y^2+4\ge4y,\ z^2+4\ge4z,$ то

$$xyz^2+xy^2+x^2+4\ge xyz^2+xy^2+4x=x\left(yz^2+y^2+4\right)\ge$$

$$\ge x\left(yz^2+4y\right)=xy\left(z^2+4\right)\ge xy\cdot4z=4xyz.$$

8.4. Може. Нехай висота CH ділить гіпотенузу на відрізки з довжинами 9см та 4см. Тоді з подібності трикутників ACH та CBH знайдемо $CH=6$см. Розрізавши трикутник ABC вздовж CH, отримаємо два прямокутні трикутники. Сторони більшого з них поділимо на 3 рівні частини, а меншого – пополам. Далі, розрізуючи кожен з цих трикутників по прямих, які проходять через точки поділу паралельно до їхніх сторін, отримаємо з більшого 9, а з меншого 4 однакові прямокутні трикутники з катетами 3см та 2см. Разом – 13 однакових трикутників.

8.5. Виграє Миколка. Першим ходом він докладає до купи 1 монету. Їх у купі стане 2016. Далі, якщо Петрусь бере 4 монети, то Миколка докладає одну, і навпаки, якщо Петрусь докладає одну мотету, то Миколка забирає 4. Таким чином, після кожного ходу Миколки кількість монет у порівнянні з його попереднім ходом зменшується на 3 і ділиться на 3. Звідси випливає, що саме він забере останню монету.

9.1. Піднімаючись на 2 м по стовбуру дерева, білка долає шлях довжиною 2,5 м, що легко отримати за теоремою Піфагора, розглянувши розгортку стовбура. Тому, піднявшись на висоту 8 м, вона подолає шлях довжиною 10 м.

9.2. Найменшим натуральним значенням такого виразу є 2. Справді, $3m^2 - mn^2 - 2n - 4 = 2$ для $m = 4,$ $n = 3.$ А рівність $3m^2 - mn^2 - 2n - 4 = 1$ неможлива, бо її ліва частина є непарним числом лише для непарних m та парних $n.$ Але тоді її остача при діленні на 4 дорівнює 3.

9.3. Додавши рівняння системи, отримаємо

$$(a + 2016)\left(x^2 + x + 1\right) = 0.$$

Оскільки другий множник у лівій частині отриманого рівняння дійсних коренів не має, то підходить тільки $a = -2016.$ При цьому всі три рівняння матимуть спільний дійсний корінь $x = 1.$

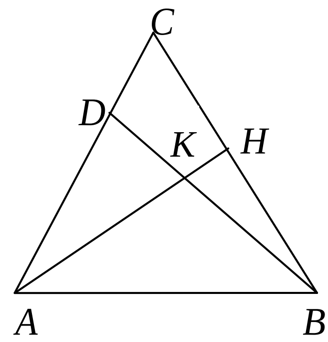
9.4. Нехай $\angle ABD = \varphi,$ $\angle CAB = \angle CBA = \alpha$. Тоді з умови задачі та властивості зовнішнього кута трикутника ABK (див. рис.) маємо

$$\angle ADB = \angle ADK = \angle AKD = \angle KAB + \angle KBA = \left(90^\circ - \alpha\right) + \varphi.$$

З іншого боку,

$$\angle ADB = 180^\circ - \angle DAB - \angle DBA = 180^\circ - \alpha - \varphi.$$

З цих двох рівностей знаходимо $\varphi = 45^\circ.$



9.5. Позначимо трьох місіонерів через М м м, а трьох канібалів через К к к; великими буквами позначені місіонер і канібал, які уміють гребти. Умову задачі задовольняє, наприклад, така схема переправи: 1) переправляються К к; 2) К повертається на човні назад; 3) переправляються К к; 4) К повертається; 5) переправляються М м; 6) повертаються М к; 7) переправляються М К; 8) повертаються М к; 9) переправляються М м; 10) К повертається; 11) переправляються К к; 12) К повертається; 13) переправляються К к.

10.1. Оскільки

$$2015 = S = 9\left[11\left(a_1 + a_4 + a_7\right) + \left(a_2 + a_5 + a_8\right)\right] +$$
$$+\left(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9\right),$$

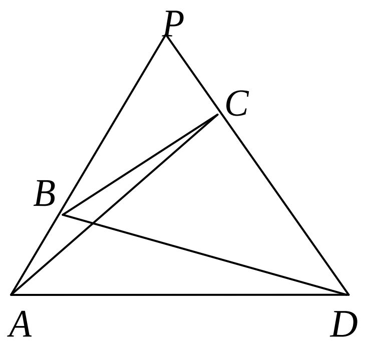
то число A при діленні на 9 дає остачу 8. Враховуючи, що сума всіх десяти цифр від 0 до 9 дорівнює 45, робимо висновок, що у записі числа A відсутня цифра 1. Умову задачі задовольняє, наприклад, число 907863245. Зрозуміло, що воно не єдине. Зокрема, перестановками трійок цифр з нього отримуємо ще 5 таких чисел: 907245863, 863907245, 863245907, 245907863, 245863907.

10.2. Віднявши від другого рівняння системи перше, отримаємо $y-x+x^2-y^2=x^3-y^3$. Розклавши на множники різниці квадратів та кубів, запишемо цю рівність у вигляді

$$(x-y)\left(x^2+xy+y^2-x-y+1\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left[(x+y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2\right]=0.$$

Оскільки доданки у квадратних дужках не можуть одночасно дорівнювати нулю, то $x=y$. Тоді з рівняння $x^3-x^2-x=0$ знаходимо $x_1=0$, $x_{2,3}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Тому система має 3 розв'язки (x, y): (0; 0), $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$.



10.3. Продовжимо сторони AB та CD до перетину у точці P (див. рис.). Утворився рівносторонній трикутник ADP, тому $\Delta ABD=\Delta PCA$ за рівними сторонами $AD=AP$ та відповідними рівними кутами: $\angle ADB=60^\circ-\angle CDB=60^\circ-\angle CAD=\angle PAC$ й $\angle BAD=\angle CPA=60^\circ$. Отже, $AB=PC$, звідки $AB+CD=PC+CD=PD=AD$.

10.4. Позначимо суму у лівій частині нерівності через S. Маємо

$$S=\frac{1}{2}\left[\frac{2\cdot3-1\cdot2}{1\cdot2\cdot2\cdot3}+\frac{3\cdot4-2\cdot3}{2\cdot3\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{(n+1)\cdot(n+2)-n\cdot(n+1)}{n\cdot(n+1)\cdot(n+1)\cdot(n+2)}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot3}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n\cdot(n+1)}-\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}\right)<\frac{1}{4}.$$

10.5. Могло. Розташуємо команди по колу. Нехай кожна команда виграє у п'яти команд, які йдуть по колу після неї, і програє п'ятьом командам, які йдуть по колу перед нею, а решту 5 ігор завершує внічию. Тоді у кожної команди виявиться по 5 перемог та нічиїх.

11.1. Нехай задумане число $a = 3m + x = 5n + y = 7k + z.$ Тоді сума

$$70x + 21y + 15z = 70(a - 3m) + 21(y - 5n) + 15(a - 7k) =$$
$$= a + 105(a - 2m - n - k)$$

або співпадає із задуманим числом, або відрізняється від нього на величину, кратну 105. Враховуючи нерівності $0 \le x \le 2,$ $0 \le y \le 4,$ $0 \le z \le 6,$ нескладно зрозуміти, що

$$70x + 21y + 15z \le 70 \cdot 2 + 21 \cdot 4 + 15 \cdot 6 = 314.$$

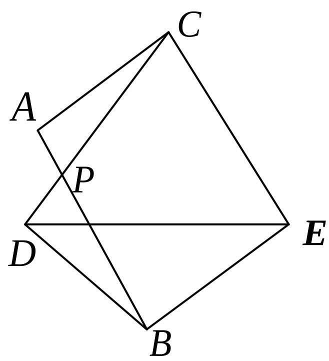
Тому фокусникові доведеться щонайбільше двічі віднімати 105 від обчисленої ним суми.

11.2. Запишемо задану систему у вигляді

$$\begin{cases} (x - 0,5)^2 + y^2 \le 0,25(1 - 0,5a), \\ x^2 + (y - 0,5)^2 \le 0,25(1 - 0,5a). \end{cases}$$

При $a \ge 2$ обидві нерівності системи не мають розв’язків. При $a = 2$ єдині розв’язки кожної з нерівностей існують, але не співпадають між собою. Якщо ж $a < 2,$ то нерівності заданої системи визначають круги радіуса $R = 0,5\sqrt{1 - 0,5a}$ з центрами у точках $A(0,5;0)$ та $B(0;0,5)$ відповідно. Тому для єдиності розв’язку необхідно і достатньо, щоб ці круги дотикалися. З рівності $2R = AB,$ тобто $\sqrt{1 - 0,5a} = 0,5\sqrt{2},$ знаходимо $a = 1.$

11.3. Побудуємо паралелограм $ACEB$ (див. рис.). Оскільки $CE = AB = CD = 1,$ а $\angle DCE = \angle DPB = 60°,$ то трикутник CDE рівносторонній. Тому $AC + BD = BE + BD \ge DE = 1.$



11.4. Очевидно, що многочлен $P(x) \equiv 0$ задовольняє умову. Нехай тепер $P(x)$ не є тотожнім нулем і має степінь $n, n \ge 0.$ Тоді у заданій рівності многочлен зліва має степінь n^2, а справа – степінь $n + 2.$ З рівності $n^2 = n + 2$ знайдемо $n = 2.$ Підставивши у задану рівність замість x довільний (дійсний чи комплексний) корінь квадратного тричлена $P(x),$ отримаємо $P(0) = 0.$ Звідси випливає, що обидва його корені є дійсними і $P(x)=ax\left(x+q\right)$, $a\neq 0$. Враховуючи умову задачі, отримуємо тотожність

$$a\cdot ax\left(x+q\right)\cdot\left(ax\left(x+q\right)+q\right)\equiv(x^2+2015x+2015)\cdot ax\left(x+q\right),$$

яка рівносильна тотожності $a^2x^2+a^2qx+aq\equiv x^2+2015x+2015$, справедливій лише при $a=1$, $q=2015$. Отже, $P(x)=x\left(x+2015\right)$.

Зауважимо, що $P(x)$ можна було також шукати у вигляді

$$P(x)=ax^2+bx+c,$$

де a,b,c – дійсні коефіцієнти, $a\neq 0$, прирівнюючи коефіцієнти біля однакових степенів x у виразах:

$$P(P(x))=a^3x^4+2a^2bx^3+(ab^2+2a^2c+ab)x^2+$$
$$+(2abc+b^2)x+(ac^2+bc+c)$$

та

$$(x^2+2015x+2015)P(x)=ax^4+(b+2015a)x^3+$$
$$+(2015a+2015b+c)x^2+2015(b+c)x+2015c.$$

11.5. Могло. Припустимо, що одна команда програла всі свої матчі. Тоді у неї 0 перемог та 0 нічиїх. Решту 11 команд розташуємо по колу. Нехай кожна команда виграє у трьох команд, які йдуть по колу після неї, і програє трьом командам, які йдуть по колу перед нею, а інші 4 ігри завершує внічию. Тоді у кожної з цих одинадцяти команд виявиться по 4 перемоги та нічиї.

Критерії оцінювання

7 – задача розв’язана повністю;

6 – задача розв’язана, але є незначні недоліки чи відсутні необхідні для повноти розв’язання зауваження;

5 – задача в основному розв’язана, але допущена механічна помилка, яка не вплинула корінним чином на відповідь, чи наявний інший легко усувний недолік;

4 – чітко виражена не менше як половина розв’язання задачі; або наявний рівносильний їй частковий випадок; або із двох складових задачі розв’язана складніша;

3 – розв’язано близько половини задачі, можливо з незначними недоліками; або із двох складових задачі розв’язана простіша;

2 – запропонована ідея розв’язання і зроблено деякий поступ в її реалізації; або розглянуто деякий нетривіальний частковий випадок;

1 – виражена ідея розв’язання чи записана правильна відповідь при обов’язковій наявності спроб, можливо і невдалих, їх реалізації; або розглянуто тривіальний частковий випадок;

0 – задача розв’язувалася цілком неправильно; або записана лише готова відповідь, отримання якої не є очевидним;

$\varnothing$ (прирівнюється до 0 балів) – задача не розв’язувалася взагалі.

Примітка: при рівній кількості балів перевага надається учням, в яких кращою є сума балів за задачі, оцінені у 5–7 балів.

Список рекомендованої літератури

1. Вышенский В.А., Карташов Н.В., Михайловский В.И., Ядренко М.И.. Сборник задач Киевских математических олимпиад. – К.: Вища школа., 1984. – 240с.
2. Вишенський В.А., Карташов М.В., Михайловський В.І., Ядренко М.Й.. Київські математичні олімпіади 1984–1993 рр. Збірник задач: Навчальний посібник. – К.: Либідь, 1993. – 144с.
3. Вишенський В.А., Ганюшкін О.Г., Карташов М.В., Михайловський В.І., Призва Г.Й., Ядренко М.Й. Українські математичні олімпіади. Довідник. – К.: Вища школа., 1993 – 415с.
4. Лейфура В.М., Мітельман І.М., Радченко В.М., Ясінський В.А. Математичні олімпіади школярів України 1991 - 2000. Навчально-методичний посібник. – К.: Техніка, 2003. – 541с.
5. Лейфура В.М., Мітельман І.М., Радченко В.М., Ясінський В.А. Математичні олімпіади школярів України 2001 - 2006. Навчально-методичний посібник. – Львів: Каменяр, 2008. – 352с.
6. Математичні змагання школярів України: 2007-2008 та 2008-2009. Навчально-методичний посібник / за ред. Б.В. Рубльова. – Львів: Каменяр, 2008. – 552с.
7. Федак І.В. Готуємося до олімпіади з математики. – Кам’янець-Подільський: Абетка, 2006. – 420с.
8. Федак І.В. Обласні олімпіади з математики 1987-2005рр. – Івано-Франківськ: ОІППО, 2005. – 164с.
9. Федак І.В. Івано-Франківські обласні олімпіади з математики 2001-2010рр. – Івано-Франківськ: ОІППО, 2010. – 84с.
10. Федак І.В. Розв’язування задач підвищеної складності з математики. Спеціальний курс. – Івано-Франківськ: Голіней, 2010. – 100с.
11. Ясінський В.А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв’язування. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2005. – 208с.
12. I – VII Соросівські олімпіади для учнів 9 – 11 класів загальноосвітніх шкіл. Математика. – К.: Міжнародний фонд “Відродження”, 1995 – 2001.

Зміст

Підписано до друку 27 лютого 2015р.
Формат 61x84 1/16, папір офсетний, друк цифровий.
Ум. обсяг 4,00 друк. арк. Наклад 300 пр.
Замовлення № 145 від 26.02.2015

Друк: підприємець Голіней О.М.
м. Івано-Франківськ, вул. Галицька, 128
тел. (0342) 58 04 32