І.В. Федак

ВІДКРИТІ ІВАНО-ФРАНКІВСЬКІ ОБЛАСНІ ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ 2018 – 2021 рр.

м. Івано-Франківськ
2021

ББК: 22.1
УДК: 51(031)
Ф 65

Федак І. В. Відкриті Івано-Франківські обласні олімпіади з математики 2018-2021 рр. – Івано-Франківськ: ПНУ ім. Василя Стефаника, 2021. – 44с.

.

Зібрані задачі відкритих Івано-Франківських обласних олімпіад з математики 2018 – 2021 років. Наведені відповіді та вказівки до розв’язування задач.

Для учнів загальноосвітніх шкіл, гімназій та ліцеїв, професійно-технічних навчальних закладів, учителів математики, керівників математичних гуртків та всіх любителів нестандартних математичних задач.

Передмова

Математичні олімпіади школярів проводяться в Україні з 1961-го року, коли була проведена перша Республіканська олімпіада юних математиків. Від неї беруть свій відлік Всеукраїнські олімпіади юних математиків, яким передують змагання юних талантів у всіх регіонах України.

З 1918 року Київським національним університетом імені Тараса Шевченка були започатковані Всеукраїнські олімпіади з математики для учнів 5 – 7 класів. Для відбору на них з ініціативи автора цього посібника стали проводитися відкриті Івано-Франківські обласні олімпіади з математики для учнів 5 – 8 класів. Перші дві з них пройшли в очному режимі, а третя у зв'язку з епідеміологічною ситуацією – у режимі онлайн.

Також у режимі онлайн відбулася і олімпіада 2021 року, розрахована на учнів 5 – 11 класів, оскільки у цьому році III етап Всеукраїнських учнівських олімпіад не проводився. Для участі у ній зареєструвалися майже 1200 учнів з восьми областей України та м. Києва.

За результатами таких олімпіад вдалося виявити талант юного математика із Калуша Юрія Псюка, який у четвертому класі став абсолютним переможцем за 5 клас, а через рік йому не було рівних на Всеукраїнській олімпіаді з математики серед п'ятикласників. Ще двічі він отримував дипломи II ступеня на всеукраїнських етапах олімпіади.

Успішно виступав цей учень і на традиційних математичних олімпіадах, перемагаючи на III етапі семикласників три роки поспіль (навчаючись у п'ятому, шостому та сьомому класах відповідно), а у сьомому класі до своїх перемог паралельно додав ще й диплом II ступеня за 8 клас.

У пропонованому вашій увазі навчальному посібнику зібрані завдання відкритих математичних олімпіад за 2018 – 2021 роки та наведені їх лаконічні розв'язання.

УМОВИ ЗАДАЧ
2018 рік

5 клас

1. У коробці багато червоних, синіх, зелених та жовтих ґудзиків. Яку найменшу кількість ґудзиків потрібно взяти навмання, щоб серед них обов'язково були 5 ґудзиків одного кольору?

2. Є 5 відрізків з довжинами 1, 2, 3, 4 та 5 сантиметрів. Треба вибрати з них 3 відрізки, з яких вдасться скласти трикутник. Скількома способами це можна зробити?

3. Бочку можна наповнити, якщо у неї налити 6 малих, 3 середніх та 1 велике відро води, чи 2 малих, 1 середнє та 3 великі відра води. А скільки лише великих відер потрібно для наповнення бочки?

4. У Миколки і Петруся є по 50 гирьок масами 1, 2, 3, … , 50 грамів. Вони по черзі (розпочинає Миколка) викладають гирі, кожен на свою шальку терезів. Петрусь виграє, якщо у деякий момент різниця між масами викладених гирьок дорівнюватиме 50 г. Як повинен грати Петрусь, щоб гарантовано перемогти?

5. Знайдіть найменше натуральне число, у записі якого є всі десять цифр, а сума цифр дорівнює 2018. Чи існує найбільше натуральне число з такими властивостями?

6. Таблицю 5×5 потрібно заповнити цифрами 1, 2, 3, 4, 5 так, щоб у кожному рядку, кожному стовпчику і на кожній з двох діагоналей були записані усі 5 цих цифр. Деякі клітинки таблиці уже заповнені, як на малюнку справа. Заповніть решту клітинок таблиці. Які три цифри, в які клітинки і чому ви вписали першими?

3	4			5
2				
				4

6 клас

1. Знайдіть чотири попарно різні цифри a, b, c, d такі, щоб виконувалася рівність $\dfrac{a}{b - c / d} = 72$.

2. Доведіть, що ребус ЗАДАЧА + ЗАДАЧА = ТУРНІР, в якому різні букви відповідають різним цифрам, не має розв’язків.

3. Груша, яблуко і слива лежали на вазі. Петрусь зняв з ваги грушу, вага показала 230г. Поклавши грушу назад, Петрусь зняв яблуко, – вага показала 200г. Коли ж Петрусь зняв з ваги лише сливу, вага показала 290г. Скільки грамів важать груша, яблуко і слива разом?

4. Прямокутник розділили на 9 менших прямокутників, як на малюнку справа. Периметри п’ятьох із них записані всередині відповідних прямокутників. Знайдіть периметр початкового прямокутника.

	6	
12	4	6
	8	

5. У турнірі з гри у «хрестики-нулики», який проводився за системою «програв – вибув» взяли участь 18 учнів. Кожного дня проводилась лише одна партія, учасники якої визначалися жеребкуванням із учнів, які ще не вибули. 6 школярів стверджують, що зіграли рівно 4 партії. Чи можливе таке?

6. Миколка помножив число 189 на 2018-цифрове число, всі цифри якого дорівнюють 6. Чому дорівнює сума цифр отриманого ним добутку?

7 клас

1. Миколка записав всі двоцифрові числа, використовуючи лише три різні цифри, потім обчислив їх суму S і виявив, що число S записується тими ж трьома цифрами. Доведіть, що таке насправді могло трапитися.

2. Кінь може з’їсти віз сіна за 1 місяць, коза – за 2 місяці, а овечка – за 3 місяці. За який час вони з’їдять віз сіна разом?

3. Прямокутник розділили на 9 менших прямокутників, як на малюнку справа. Площі п’ятьох із них записані всередині відповідних прямокутників. Знайти площу початкового прямокутника.

	6	
12	4	6
	8	

4. Знайти натуральне число, квадрат якого дорівнює сумі квадратів чисел 3030303 та 4040404. Поясніть, як ви отримали це число.

5. Відомо, що $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}=1$. Обчислити $\frac{a^6-2a^4}{1-a^2}$.

6. Натуральне число n має рівно 2 дільники, а число $n+1$ має рівно 3 дільники. Довести, що число $n+2018$ має рівно 4 дільники.

8 клас

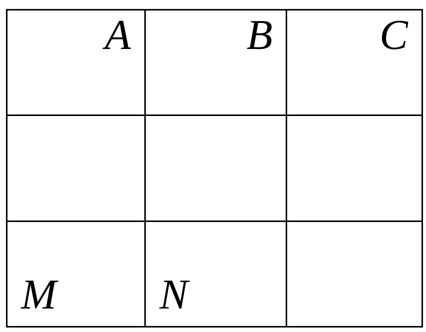
1. У 8 класі вистачає відмінників, але Михайлик вчиться краще від усіх. Якщо Михайлик стане вчитися гірше, то у класі буде 24% відмінників, а якщо він перейде до ліцею, то у класі стане 25% відмінників. Який відсоток відмінників у 8 класі зараз?

2. На гуртку вчитель розклав на шальки терезів 16 гирьок масами 1, 2, 3, … , 16 грамів так, що одна шалька переважила іншу. 15 членів гуртка по черзі виходили із класу і забирали з собою по одній гирьці, причому після виходу кожного учня переважувала протилежна шалька терезів. Доведіть, що описана ситуація можлива, і визначте, яка гирька залишилася на терезах після виходу останнього учня?

3. Миколка стверджує, що квадрат можна розрізати на 8 гострокутних трикутників, а Петрусь хвалиться, що зуміє розрізати його на 2018 таких трикутників. Хто з них має рацію?

4. Відомо, що існують натуральні числа n такі, що серед перших n натуральних чисел можна вибрати два числа, добуток яких дорівнює сумі всіх решти чисел. Знайдіть найменше таке n.

5. Квадрат розділили на 9 однакових квадратиків, як на малюнку справа. Доведіть, що сума кутів MAN, MBN та MCN дорівнює 45 градусів.



6. Розв’яжіть рівняння

$$\sqrt{2x+1}=\frac{x^2-1}{2}.$$

2019 рік

5 клас

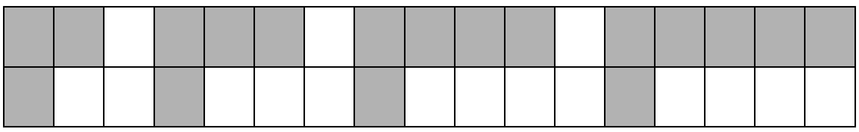
1. На паперовій стрічці записане число 121212…121, в якому 2019 цифр, і цифри 1, 2 чергуються. Чи можна цю стрічку розрізати на 50 частин так, щоб серед чисел, записаних на отриманих при цьому частинах, не виявилося двох однакових? Відповідь обґрунтуйте.

2. Скільки існує різних п’ятицифрових чисел вигляду $\overline{x0y0z}$, які діляться на 5, якщо цифри x, y, z не є обов’язково різними? Відповідь обґрунтуйте.

3. Незнайко хоче розбити квадрат 5×5 на 5 менших квадратів або прямокутників, сума периметрів яких дорівнювала би 50, але не знає, як це зробити. Допоможіть йому або доведіть, що такого розбиття не існує.

4. У виразі $1*2*3*4*5$ замініть зірочки знаками арифметичних дій так, щоб отримати 25. Вкажіть принаймні три способи, як цього добитися. За потреби можна використовувати дужки.

5. Миколка вирізав з паперу зафарбовані нижче фігурки і хоче викласти з них прямокутник. Допоможіть йому в цьому, якщо вирізані фігурки можна довільним чином повертати чи перевертати, але не можна згинати чи накладати одна на одну. Або ж доведіть, що його задум здійснити не вдасться.



6. У зображених нижче таблицях перша з них заповнена натуральними числами за певною закономірністю. Опишіть цю закономірність і, використовуючи її, заповніть другу таблицю, в якій два числа уже записані. Яку особливість можна помітити, порівнюючи рядки двох таких таблиць?

1	2	5	12	29
1	3	7	17	41

1				
2				

6 клас

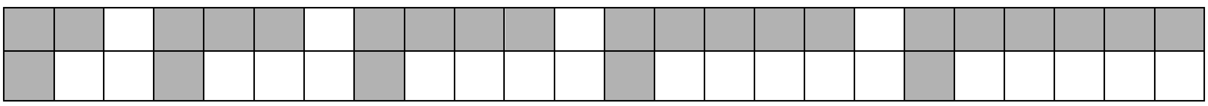
1. На паперовій стрічці записане число 121212…121, в якому 2019 цифр, і цифри 1, 2 чергуються. Чи можна цю стрічку розрізати на 60 частин так, щоб серед чисел, записаних на отриманих при цьому частинах, не виявилося двох однакових? Відповідь обґрунтуйте.

2. Скільки існує різних п'ятицифрових чисел вигляду $\overline{x0y0z}$, які діляться на 6, якщо цифри x, y, z не є обов'язково різними? Відповідь обґрунтуйте.

3. Незнайко хоче розбити квадрат 6×6 на 6 менших квадратів або прямокутників, сума периметрів яких дорівнювала би 60, але не знає, як це зробити. Допоможіть йому або доведіть, що такого розбиття не існує.

4. У виразі $1*2*3*4*5*6$ зірочки замінили знаками додавання або віднімання. Які додатні значення виразу могли при цьому отримати? Наведіть відповідні приклади і обґрунтуйте, що інших додатних значень отримати не вдасться.

5. Миколка вирізав з паперу зафарбовані нижче фігурки і хоче викласти з них прямокутник. Допоможіть йому в цьому, якщо вирізані фігурки можна довільним чином повертати чи перевертати, але не можна згинати чи накладати одна на одну. Або ж доведіть, що його задум здійснити не вдасться.



6. У зображених нижче таблицях перша з них заповнена натуральними числами за певною закономірністю. Опишіть цю закономірність і, використовуючи її, заповніть другу таблицю, в якій два числа уже записані. Яку особливість можна помітити, порівнюючи рядки двох таких таблиць?

1	2	5	12	29
1	3	7	17	41

				41
				58

7 клас

1. На паперовій стрічці записане число 121212…121, в якому 2019 цифр, і цифри 1, 2 чергуються. Чи можна цю стрічку розрізати на 70 частин так, щоб серед чисел, записаних на отриманих при цьому частинах, не виявилося двох однакових? Відповідь обґрунтуйте.

2. Скільки існує різних семицифрових чисел вигляду $\overline{x00y00z}$, які діляться на 9, якщо цифри x, y, z не є обов’язково різними? Відповідь обґрунтуйте.

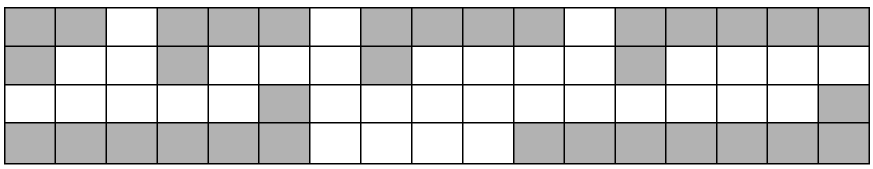
3. Незнайко вибрав на сторонах AB, BC, CA рівностороннього трикутника ABC точки M, N, K відповідно такі, що

$$AM : MB = BN : NC = CK : KA = 7.$$

Він виміряв транспортиром кути трикутника MNK і стверджує, що їхні величини дорівнюють 59°, 60° та 61°. Якими ж насправді могли бути величини цих кутів? Вкажіть усі можливі варіанти. Відповідь обґрунтуйте.

4. Цілі числа x та y задовольняють умову $xy = x + y + 1$. Знайдіть усі пари таких чисел і обґрунтуйте, що інших таких пар немає.

5. Миколка вирізав з паперу зафарбовані нижче фігурки і хоче викласти з них прямокутник. Допоможіть йому в цьому, якщо вирізані фігурки можна довільним чином повертати чи перевертати, але не можна згинати чи накладати одна на одну. Або ж доведіть, що його задум здійснити не вдасться.



6. У зображених нижче таблицях перша з них заповнена натуральними числами за певною закономірністю. Опишіть цю закономірність і, використовуючи її, заповніть другу таблицю, в якій

два числа уже записані. Яку особливість можна помітити, порівнюючи рядки двох таких таблиць?

1	3	10	34	116
1	4	14	48	164

2				
1				

8 клас

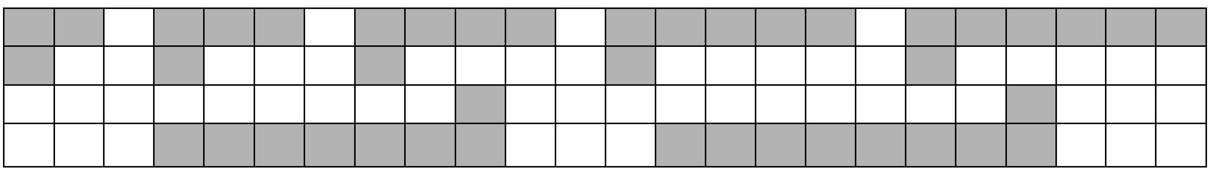
1. На паперовій стрічці записане число 121212…121, в якому 2019 цифр, і цифри 1, 2 чергуються. Чи можна цю стрічку розрізати на 80 частин так, щоб серед чисел, записаних на отриманих при цьому частинах, не виявилося двох однакових? Відповідь обґрунтуйте.

2. Скільки існує різних семицифрових чисел вигляду $\overline{x00y00z}$, які діляться на 27, якщо цифри x, y, z не є обов’язково різними? Відповідь обґрунтуйте.

3. З вершини A гострого кута паралелограма $ABCD$ проведені висоти AE та AH. Незнайко виміряв транспортиром кут між ними і стверджує, що його величина становить 88°. Чи можуть слова Незнайки бути правдою? Якщо так, то знайдіть величину гострого кута такого паралелограма.

4. Дійсні числа x та y задовольняють умову $x^3 + y^3 = 2019$. Чи можуть вони обидва одночасно бути цілими? Якщо так, то знайдіть усі пари таких чисел.

5. Миколка вирізав з паперу зафарбовані нижче фігурки і хоче викласти з них прямокутник. Допоможіть йому в цьому, якщо вирізані фігурки можна довільним чином повертати чи перевертати, але не можна згинати чи накладати одна на одну. Або ж доведіть, що його задум здійснити не вдасться.



6. У зображених нижче таблицях перша з них заповнена натуральними числами за певною закономірністю. Опишіть цю закономірність і, використовуючи її, заповніть другу таблицю, в якій два числа уже записані. Яку особливість можна помітити, порівнюючи рядки двох таких таблиць?

1	3	10	34	116
1	4	14	48	164

				164
				232

2020 рік

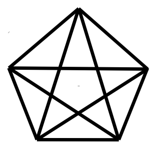
5 клас

1. Учень йде до школи пішки, а назад повертається транспортом, витрачаючи на весь шлях пів години часу. Якщо б він в обидва боки їхав транспортом, то на весь шлях витратив би лише 10 хвилин. Скільки часу йому потрібно, щоб пройти цей шлях в обидва боки пішки?

2. Миколка поділив порівну 5 однакових яблук між своїх шістьох товаришів, розрізавши кожне яблуко на рівні частини. Чи могло статися так, що жодне з яблук він не розрізував більше, ніж на 3 частини?

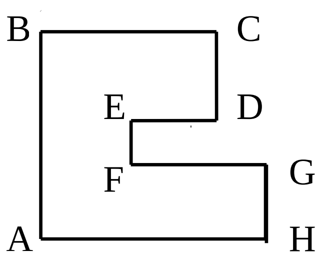
3. Серед 15 монет, однакових за зовнішнім виглядом, одна фальшива. Невідомо чи вона важча, чи легша, ніж решта монет. Як це з'ясувати, використавши лише два зважування на шалькових терезах без гир?

4. На малюнку справа зображена фігура. Порахуйте кількість трикутників у цій фігурі.



5. На дошці записані числа 1, 2, 3, …, 2020. Миколка підкреслив усі числа, які діляться на 3, потім – усі числа, які діляться на 5. Скільки чисел він підкреслив рівно один раз?

6. Знайдіть периметр фігури $ABCDEFGH$, зображеної на малюнку справа, якщо $AB = 6\ см$, $BC = 5\ см$, $FG = 4\ см$ і всі кути між її сусідніми сторонами прямі. Довжини решти сторін невідомі.

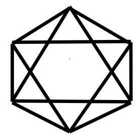


6 клас

1. Добуток двох двоцифрових чисел дорівнює A. Учень поміняв місцями цифри у кожному з цих чисел і, помноживши отримані двоцифрові числа, одержав у добутку число B. Доведіть, що $A-B$ ділиться на 99.

2. На піратському кораблі є декілька кішок, трохи матросів, кок й одноногий капітан Сільвер. В них усіх, разом узятих, 15 голів та 41 нога. Скільки на кораблі кішок?

3. На малюнку справа зображена фігура. Порахуйте кількість трикутників у цій фігурі.



4. На столі лежить 20 сірників. Двоє по черзі беруть їх зі столу. За один раз дозволяється взяти довільну кількість сірників від 1 до n. Програє той, хто змушений буде забрати останній сірник. Миколка розпочинає гру і обіцяє перемогти. Чи може Сергійко, який вступає у гру другим, але до початку гри повідомляє, яку максимальну кількість сірників можна забирати за один раз, завадити йому в цьому? Якщо так, то вкажіть усі значення n, для яких Сергійкові це вдасться.

5. На дошці записані числа 1, 2, 3, …, 2020. Миколка підкреслив усі числа, які діляться на 2, потім – усі числа, які діляться на 3, і, нарешті, – усі числа, які діляться на 5. Скільки чисел він підкреслив двічі?

6. На сторонах AB, BC, CD, DA прямокутника $ABCD$ вибрали точки M, N, K, L відповідно, які ділять кожну з цих сторін у відношенні $1:2$, рахуючи від вершини, записаної першою. Знайдіть відношення площі фігури $MNKL$ до площі прямокутника $ABCD$.

7 клас

1. Візьмемо очевидну рівність $6:6=7:7$. Після винесення за дужки спільного множника з кожної частини рівності будемо мати $6\cdot(1:1)=7\cdot(1:1)$, або, що те саме, $(2\cdot3)\cdot(1:1)=7\cdot(1:1)$. З останньої рівності одержуємо $2\cdot3=7$. Знайдіть помилку в цих міркуваннях.

2. Знайдіть принаймні три пари натуральних чисел m та n, для яких правильною є рівність $m!+1=n^2$. (Через $m!$ позначено добуток

всіх натуральних чисел від 1 до m). Чи може у цій рівності число n дорівнювати 2020?

3. Пішов батько з чотирма синами в ліс по гриби. Батько знайшов 45 грибів тоді, коли жодний з його синів не знайшов жодного гриба. Роздав батько зібрані ним гриби дітям і всі знову розійшлися по лісу. Коли зібралися йти додому, виявилося, що один із синів знайшов ще стільки ж грибів, скільки одержав від батька, другий знайшов два гриби, третій два гриби загубив, а четвертий – загубив половину тих грибів, що одержав від батька. При цьому в усіх синів грибів стало порівну. Скільки грибів дав батько кожному з них?

4. Вчитель перевірив роботи трьох учнів – Андрія, Василя та Сергія, але не приніс у клас. Учням він сказав: "Один із вас отримав "3", другий – "4", а третій – "5". У Сергія не "5", у Василя не "4", а в Андрія, здається, "4". Коли принесли зошити, то виявилось, що вчитель тільки одному учневі сказав правильну оцінку, двом іншим – неправильну. Які оцінки отримали учні?

5. Три товариші-мотоциклісти, маючи один двомісний мотоцикл, повинні за три години одночасно прибути до міста, розташованого за 60 км від них. Чи вдасться їм це зробити, якщо швидкість мотоцикла (з вантажем чи без нього) 50 км/год, а пішки кожен з них рухається зі швидкістю 5 км/год ?

6. Відрізок BD перетинає сторону AC трикутника ABC, причому $BD = AB = BC$ та $\angle ABD = 70^\circ$. Знайдіть у градусах величину кута ACD.

8 клас

1. Знайдіть усі трійки простих чисел $p_1 < p_2 < p_3$ таких, що $p_1 p_2 p_3 = 5(p_1 + p_2 + p_3)$.

2. Обчисліть $\sqrt{1+2019\sqrt{1+2020\sqrt{1+2021\cdot 2023}}}$.

3. Розкладіть вираз $x^8 + x + 1$ на два множники шостого та другого степенів.

4. Яке з чисел, $x - y$ чи $\frac{25}{4}$, більше, якщо

$$x = \frac{1^2}{1} + \frac{2^2}{3} + \frac{3^2}{5} + \ldots + \frac{12^2}{23}, \quad y = \frac{1^2}{3} + \frac{2^2}{5} + \frac{3^2}{7} + \ldots + \frac{12^2}{25} \ ?$$

5. На конгресі зустрілися математик, історик, біолог та хімік. Кожний із них володів двома іноземними мовами з числа таких: англійська, італійська, німецька та французька. Італійську мову знав лише один з них, але була одна мова, якою володіли троє. Хоч хімік і не розмовляє англійською, він може бути перекладачем, якщо захочуть поговорити біолог та історик. Історик не знає німецької, але знає французьку мову і може поговорити з математиком, хоч той і не володіє французькою. Які мови знав кожний із вчених?

6. Прямокутний трикутник ABC з гіпотенузою AB рухається у прямому куті з вершиною O так, що вершина A ковзає по одній, а вершина B – по іншій стороні цього кута. Доведіть, що при цьому вершина C рухається вздовж деякого відрізка.

2021 рік

5 клас

1. Площа прямокутника, довжини сторін якого виражаються цілим числом сантиметрів, дорівнює 2021 *см*^{2}. Знайдіть периметр цього прямокутника, якщо відомо, що він не перевищує 2 метри.

2. Визначте останню цифру числа

$$a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2020 \cdot 2021 - 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 2019 \cdot 2021.$$

Чи може передостання цифра числа a ділитися на 3, на 4 або на 5?

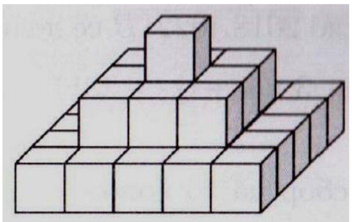
3. Калькулятор Миколки може працювати лише з цілими числами. Він має 4 клавіші, за допомогою яких ціле число a можна перетворити в одне з цілих чисел: $2a$, $\frac{a}{2}$, $3a+1$, $\frac{a-1}{3}$. Миколка ввів число 5 і, натиснувши після цього тричі на клавіші свого калькулятора, побачив на дисплеї число 6. Як, на вашу думку, таке могло статися, і чи зможе Миколка, продовживши натискати на клавіші, побачити на дисплеї число 7?

4. Марійка, Петрусь, Михайлик та Миколка взяли участь у відкритій олімпіаді з математики, під час якої вони розв’язували 5 задач. Кожен з них розв’язав різну кількість задач (принаймні одну), але кожна задача була розв’язаною однаковим числом цих учнів.

Визначте, яку найбільшу кількість задач могла розв'язати Марійка, і наведіть приклад, як таке насправді могло трапитися.

5. По колу стоять 15 дітей. Зліва кожного хлопчика стоїть дівчина, а у половини дівчат – зліва також дівчинка. Відповідно, у другої половини дівчат зліва стоїть хлопчик. Скільки хлопчиків та скільки дівчат у цій компанії? Відповідь обґрунтуйте.

6 клас



1. Археологи відкопали з піску піраміду складену з однакових кам'яних кубів, ребра кожного з яких дорівнювали 1 *м*. Верхні три шари піраміди зображено на рисунку справа. Інші її шари утворені за аналогічним принципом.

Миколка з вершини піраміди стверджує, що в основі піраміди лежить 2021 куб. Знайдіть висоту піраміди, якщо відомо, що Миколка помилився не більше, як на 6 кубів.

2. Марійка виписала усі натуральні дільники деякого натурального числа $n>1$ за зростанням: $1=d_1<d_2<...<d_k=n$. Обчисливши суму $\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+...+\frac{1}{d_k}$, вона дуже здивувалася, що така сума виявилася цілим числом. Для якого найменшого n таке могло статися?

3. За круглим столом сиділи шестеро, кожний з яких або є лицарем, який завжди каже правду, або брехуном, який завжди бреше. Скільки серед них могло бути брехунів, якщо усі шестеро заявили, що обидва їхні сусіди є брехунами?

4. Петрусь зобразив на площині 6 точок і стверджує, що кожна з них знаходиться на відстані 1 *см* рівно від трьох інших з цих точок. Чи можуть його слова бути правдою? Відповідь обґрунтуйте.

5. Суму $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{2}{2\cdot4}+\frac{3}{4\cdot7}+\frac{4}{7\cdot11}+\frac{5}{11\cdot16}+\frac{6}{16\cdot22}$ записали у вигляді одного правильного нескоротного дробу. Знайдіть різницю між знаменником та чисельником такого дробу?

7 клас

1. Про цілі числа m та n відомо, що $m<n$ та $m^2-n^2=2021$. А чи насправді існують цілі числа з цими властивостями. Якщо так, то вкажіть хоч одну пару таких чисел.

2. За 7 годин роботи господар розрахувався з трьома своїми працівниками. Отриману суму вони поділили таким чином: перший взяв $\frac{3}{10}$ всієї суми та ще 100 гривень, другий – $\frac{4}{15}$ всієї суми та ще 200 гривень, а третьому залишилося $\frac{7}{30}$ всієї суми та ще 300 гривень. Скільки гривень отримав кожний із працівників?

3. Знайдіть передостанню цифру числа, яке дорівнює добутку $1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot2019\cdot2021$.

4. На прямій відзначили чотири точки і виміряли шість відстаней між кожними двома з цих точок. П'ять із них дорівнюють 1, 2, 3, 4 та 5 сантиметрів відповідно. Якого найбільшого значення могла набувати шоста відстань?

5. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC проведена бісектриса AD. Виявилося, що $BD=AC$. Знайдіть величину кута ABC.

8 клас

1. Про цілі числа m та n відомо, що $m<n$ та $m^2-n^2=2021$. Знайдіть усі пари таких чисел, якщо, на вашу думку, вони існують.

2. Кожна з восьми однакових на вигляд монет зафарбована у різний колір. Миколці та Марійці відомо, що маси цих монет різні і дорівнюють 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 та 8 грамів відповідно. При цьому Марійка знає масу кожної конкретної монети, а Миколка не знає маси жодної з монет. Чи може Марійка за два зважування на терезах з двома шальками без гир допомогти Миколці визначити маси половини з цих монет?

3. Нехай a, b, c – такі цілі числа, що $a^2+b^2+c^2$ та $a^3+b^3+c^3$ діляться на 3. Доведіть, що $ab+bc+ca$ також ділиться на 3.

4. Розв'яжіть рівняння $|x-4|+|x|+|x+4|=8-x^2$.

5. У трапеції $ABCD$ бісектриса кута ABC перетинає середню лінію $MN \parallel AD$ у точці O. Доведіть, що AO – бісектриса кута BAD.

9 клас

1. Доведіть, що не існує цілих чисел m та n таких, що $m^3 - n^3 = 2021$.

2. Використовуючи по одному разові цифри від 0 до 9, запишіть найбільше натуральне число, яке ділиться на 99.

3. Учень при піднесенні до квадрату помилився і записав на дошці рівність $(a+b+2)^2 = a^2 + b^2 + 2^2$. Але для деяких цілих чисел a та b ця рівність виявилася правильною. Знайдіть усі пари (a,b) таких чисел.

4. Калькулятор Миколки має лише 4 клавіші, за допомогою яких раціональне число a можна перетворити в одне з чисел: $2a$, $\frac{a}{2}$, $3a+1$ чи $\frac{a-1}{3}$. Доведіть, що Миколка, ввівши першим число 9, після кількох натискань на клавіші зможе отримати будь-яке натуральне число від 1 до 8 включно?

5. Всередині кола довільним чином вибрали точку K, яка не лежить на діаметрі AB. Як, користуючись лише лінійкою, провести через K пряму, перпендикулярну до AB? (Нагадуємо, що у задачах на побудову лінійкою дозволяється лише проводити прямі лінії).

10 клас

1. Розставте у квадраті 10×10 дванадцять прямокутників розмірами 1×4 так, щоб кожен з них покривав повністю 4 клітинки квадрата, і жодні два прямокутники не перетиналися між собою та не торкалися один одного навіть вершинами. Або ж доведіть, що зробити це неможливо.

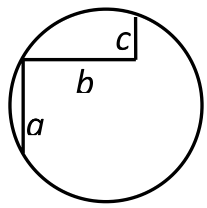
2. Знайдіть усі квадратні тричлени $f(x) = ax^2 + bx + c$, для яких при кожному значенні x правильною є рівність $f(x+1) = f(-x)$.

3. Серед 21 однакових на вигляд монет є 10 фальшивих. Усі справжні монети важать однаково, частина фальшивих монет на 1

грам легша, а інші фальшиві монети на 1 грам важчі за справжні. Марійка за одне зважування може покласти на кожну з двох шальок однакову кількість монет, і стрілка покаже різницю між їх масами у грамах. За яку найменшу кількість зважувань Марійка зможе дізнатися, чи вибрана нею навмання монета є справжньою?

4. Вкажіть найбільше натуральне число $k \le 2021$, для якого знайдуться натуральні числа m та n такі, що $2^{m+n} = 2^m + 2^n + k$.

5. Знайдіть радіус кола, зображеного на рисунку справа, якщо кути між сусідніми ланками заданої всередині нього ламаної є прямими, а їхні довжини дорівнюють a, b та c відповідно.



11 клас

1. Учитель записав на дошці n різних двоцифрових чисел і знайшов модулі всіх попарних їх різниць. При якому найменшому значенні n принаймні один з таких модулів гарантовано запишеться двома однаковими цифрами?

2. Миколка заповнив клітинки таблиці 3×3 натуральними числами, не обов’язково різними. Він стверджує, що суми чисел у кожному рядку, кожному стовпчику та на кожній з діагоналей отриманої таблиці дорівнюють 2021. Чи можуть його слова бути правдою? Якщо так, то наведіть приклад таблиці з такими властивостями.

3. Знайдіть усі значення параметрів a, b, c, при яких для всіх допустимих x правильною є рівність $a \cdot \mathrm{ctg} x + b \cdot \cos x + c \cdot \sin x = 0$.

4. Вкажіть хоч одне x таке, що $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1} = \left(1+\frac{1}{11}\right)^{11}$.

5. Всередині кола з центром у точці O довільним чином вибрали точки M та N, відмінні від O. Користуючись лише лінійкою, проведіть дві паралельні прямі, одна з яких проходить через точку M, а друга – через точку N. (Нагадуємо, що у задачах на побудову лінійкою дозволяється лише проводити прямі лінії).

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

2018 рік

5 клас

1. 17 ґудзиків. 16 ґудзиків буде недостатньо, бо в такому разі може статися так, що взяли по 4 ґудзики кожного кольору.

2. Трьома: (2, 3, 4), (2, 4, 5) та (3, 4, 5). Врахуйте, що сума довжин двох сторін трикутника більша за довжину третьої сторони.

3. 4 великі відра. З умови задачі випливає, що 4 малі та 2 середні відра можна замінити двома великими. Тому у другому випадку достатньо замінити 2 малі та 1 середнє відро на одне велике.

4. У Петруся є принаймні такі дві виграшні стратегії:

а) він повторює ходи Миколки, очікуючи, поки той не поставить гирьку в 50г, а отже, програє;

б) він відкладає набік гирьку в 50г і робить ходи іншими 49-ма гирьками довільним чином. Після останнього ходу Миколки різниця між масами викладених гирьок дорівнюватиме 50г.

5. Найменшим шуканим числом є 10223456789…9 з 220-ма цифрами 9 вкінці, записаними підряд. Врахуйте, що таке число повинно мати найменшу кількість цифр, не може починатися з нуля, менші цифри мають передувати більшим, і остача від ділення 2018 на 9 дорівнює 2. Тому цифра 2 записана двічі.

Найбільшого натурального з такими властивостями не існує. Припустивши протилежне, допишемо справа ще один нуль і отримаємо більше від нього число з такими ж властивостями.

6. Заповнена таблиця зображена на малюнку справа. Заповнення слід розпочати з нижньої лівої кутової клітинки, потім перейти до центральної клітинки, тоді – до інших клітинок цієї ж діагоналі і т.д., вибираючи кожен раз клітинку, в якій записати цифру можна однозначно.

3	4	1	2	5
2	5	3	4	1
4	1	2	5	3
5	3	4	1	2
1	2	5	3	4

6 клас

1. Наприклад, $a=9, b=1, c=7, d=8$. Тоді $\dfrac{9}{1-\dfrac{7}{8}}=72$.

2. Додавання А + А виконується у трьох різних розрядах, при цьому результати записуються трьома різними буквами У, Н та Р. Але це неможливо, бо А + А може набувати лише два різні значення: ця сума є деяким парним числом, якщо не було перенесення одиниці з попереднього розряду, або наступним за ним непарним числом, якщо таке перенесення відбулося.

3. 360 грамів. Якщо груша, яблуко і слива разом важать S грамів, то додавши ці три показники ваги, отримаємо, що

$$3S-S=230+200+290.$$

4. $P=12+6+6+8-4=28$. Врахуйте, що периметр початкового прямокутника дорівнює довжині контуру, який обмежує виділені 5 клітинок. При додаванні перших чотирьох периметрів додатково був порахований ще й периметр центрального прямокутника.

5. Ні. Зігравши 4 партії, учень виграв принаймні у трьох інших учасників турніру (переможець міг виграти у чотирьох). Отже, принаймні 18 учасників турніру зазнали поразок. Але це неможливо, бо переможець турніру не програв нікому.

6. 18162. Для знаходження добутку заданих чисел представимо 189 як різницю чисел 200 та 11 і порахуємо різницю отриманих добутків другого множника, записаного цифрами 6, на ці числа. У результаті дістанемо число 12599…99874, в якому кількість дев'яток, записаних посередині, дорівнює 2015.

7 клас

1. Наприклад, $S=594=55+59+54+99+95+94+44+49+45$. Якщо ж вважати, що й у двоцифрових числах цифри не повторюються, то отримаємо $S=132=13+31+32+23+12+21$.

2. $\dfrac{6}{11}$ місяця. За 6 місяців вони разом з'їдять $6+3+2=11$ возів сіна. Тому на один віз вони витратять в 11 разів менше часу.

3. $S = 99$. Спочатку доводимо рівність $xt = yz$ для площ довільних чотирьох прямокутників зображеної нижче таблиці зліва. Далі знаходимо площі інших чотирьох прямокутників на малюнку справа.

x	y
z	t

18	6	9
12	4	6
24	8	12

4. 5050505. Врахуйте що $\overline{a0a0a0a} = a \cdot 1010101$ та скористайтеся рівністю $3^2 + 4^2 = 5^2$.

5. З умови задачі випливає, що $a^3 = 1 + a$. Тому

$$\frac{a^6 - 2a^4}{1 - a^2} = \frac{(1+a)(1+a) - 2a(1+a)}{1 - a^2} = \frac{(1+a)(1-a)}{1 - a^2} = 1.$$

6. Натуральне число n має 2 дільники тоді і тільки тоді, коли воно є простим числом. Число $n+1$ має 3 дільники тоді і тільки тоді, коли воно є квадратом простого числа. Обидві ці умови задовольняє лише число $n = 3$. Тому $n + 2018 = 2021$, дільниками якого є такі 4 числа: 1, 43, 47 та 2021.

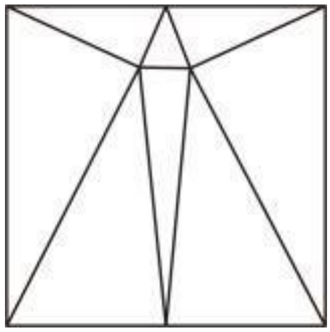
8 клас

1. 28%. Якщо зараз у класі Михайлика є n учнів, серед яких x відмінників, то отримуємо рівності $\frac{x-1}{n} = \frac{24}{100}$ та $\frac{x-1}{n-1} = \frac{25}{100}$. Звідси знаходимо $n = 25$, $x = 7$.

2. Таке, наприклад, можливе, якщо на одній шальці всі гирьки важать непарну, а на іншій – парну кількість грамів, а кожен учень, який виходить, забирає гирьку найбільшої маси з тих, що залишилися. Останньою залишиться гирька масою 1г. Інша гирька залишитися не зможе, бо, якщо гирька в 1г буде забрана, то після цього протилежна шалька не переважить.

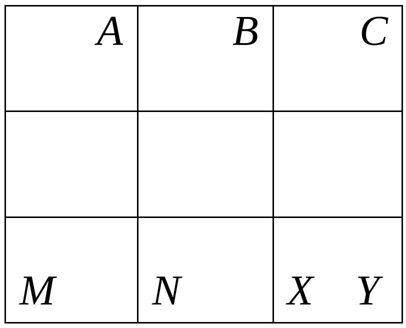
3. Вони обидва мають рацію. Приклад для Миколки наведений нижче на малюнку справа. Далі відзначимо, що довільний гострокутний трикутник можна розрізати на 4 гострокутні трикутники, провівши у ньому середні лінії.

Оскільки $2018-8=2010$ ділиться на 3, то здійснивши таку процедуру з проведенням середніх ліній 670 разів, Петрусь, відштовхуючись від малюнка Миколки, отримає 2018 гострокутних трикутників.



4. $n=10$. При цьому добуток чисел 6 та 7 дорівнює сумі решти восьми чисел. Якщо сума перших n таких чисел дорівнює S, а вибраними двома числами є x та y, то отримуємо рівняння $xy=S-x-y \Leftrightarrow (x+1)(y+1)=S+1$. Для $n=10$ маємо $S=55$.

5. Врахуйте, що $\angle MAN=\angle XCY$, $\angle MBN=\angle NCX$ (див. малюнок справа). Тому вказана сума кутів дорівнює куту MCY, тобто дорівнює 45 градусів.



6. $x=1+\sqrt{2}$. Прирівнявши обидві частини рівняння до $y\geq 0$, отримаємо систему рівнянь $\begin{cases} 2x+1=y^2, \\ x^2-1=2y. \end{cases}$. Додавши рівняння цієї системи, знайдемо $y=x$ або $y=-x-2$, звідки отримуємо два квадратні рівняння $x^2-2x-1=0$ та $x^2+2x+3=0$. Від'ємний корінь першого з них є стороннім, а друге з цих рівнянь дійсних коренів не має.

Можна було також піднести обидві частини заданого рівняння до квадрату і звести його до рівняння

$$\left(x^2-2x-1\right)\left(x^2+2x+3\right)=0.$$

Можна й використати властивості взаємно обернених функцій.

2019 рік

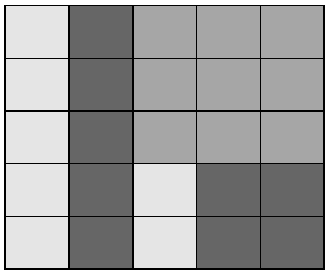
5 клас

1. Можна. Будемо відрізувати послідовно частини зліва направо так, щоб на перших сорока дев'яти із них була різна кількість цифр – від однієї до сорока дев'яти відповідно. Разом на цих частинах буде відрізано $1+2+3+...+49=1225$ цифр початкового числа, а число, яке залишиться на останній, 50-тій, частині буде 794-цифровим. Зрозуміло, що при цьому двох частин з однаковими записаними на них числами не виявиться.

2. Щоб таке число ділилося на 5, його остання цифра z має бути або 0, або 5. Для кожного з цих випадків цифра x може набувати 9 різних значень від 1 до 9, а цифра y – 10 різних значень від 0 до 9. Тому всього отримаємо $9\cdot 10\cdot 2=180$ шуканих чисел.

Можна було міркувати ще й так. Такі ж умови задовольняють і трицифрові числа вигляду $\overline{xyz}$, які діляться на 5. Найбільшим з них є число 995. Віднімемо від нього 95 – найбільше двоцифрове число, яке ділиться на 5. Враховуючи, що кратним 5 є кожне п'яте натуральне число, отримаємо, що кількість шуканих чисел дорівнює $(995-95):5=180$.

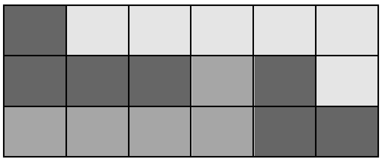
3. Приклад потрібного розбиття наведено на малюнку справа. При розв'язуванні задачі врахуйте, що кожен проведений всередині квадрата 5×5 відрізок шуканого розбиття збільшує суму периметрів на його подвоєну довжину.



4. Наприклад:

$$1\times 2+3+4\times 5=25;\ (1\times 2+3)\times 4+5=25;\ ((1+2)\times 3-4)\times 5=25.$$

5. Оскільки сума площ вирізаних фігурок дорівнює 18, то з них можна пробувати викладати лише прямокутники розмірами 1×18, 2×9 чи 3×6. Перші два з них викласти не вдасться. Приклад викладання третього прямокутника наведений на малюнку:



6. Розглянемо фрагмент такої таблиці з двох сусідніх стовпчиків:

x	z
y	t

Аналізуючи першу з таблиць, можна побачити таку закономірність в утворенні наступного стовпчика таблиці з попереднього: $z = x + y$, $t = x + z = 2x + y$.

Тому друга таблиця матиме вигляд як на малюнку справа.

1	3	7	17	41
2	4	10	24	58

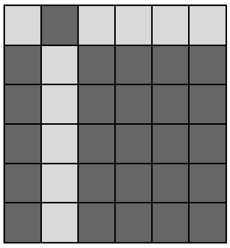
Перший її рядок співпадає з другим рядком першої таблиці, а елементи другого рядка вдвічі більші відповідних елементів першого рядка першої таблиці.

6 клас

1. Можна. Будемо відрізувати послідовно частини зліва направо так, щоб на перших п’ятдесяти дев’яти із них була різна кількість цифр – від однієї до п’ятдесяти дев’яти відповідно. Разом на цих частинах буде відрізано $1+2+3+...+59=1770$ цифр початкового числа, а число, яке залишиться на останній, 60-тій, частині буде 249-цифровим. Зрозуміло, що при цьому двох частин з однаковими записаними на них числами не виявиться.

2. Щоб таке число ділилося на 6, сума його цифр повинна ділитися на 3, причому цифра x не може дорівнювати 0, а цифра z повинна бути парною. Такі ж умови задовольняють і трицифрові числа вигляду $\overline{xyz}$, які діляться на 6. Найбільшим з них є число 996. Віднімемо від нього 96 – найбільше двоцифрове число, яке ділиться на 6. Враховуючи, що кратним 6 є кожне шосте натуральне число, отримаємо, що кількість шуканих чисел дорівнює $(996-96):6=150$.

3. Приклад потрібного розбиття наведено на малюнку нижче. Врахуйте, що кожен проведений всередині квадрата 6×6 відрізок цього розбиття збільшує суму периметрів на його подвоєну довжину.



4. Оскільки у заданому виразі є три непарні числа, то при довільній розстановці знаків додавання та віднімання значення такого виразу будуть непарними. Найбільше з них отримаємо так: $1+2+3+4+5+6=21$. Значення 19 отримати не вдасться, бо для цього потрібен був би знак «–» перед 1. Всі можливі способи отримання інших непарних додатних значень, менших за 19, наведено нижче:

$$1-2+3+4+5+6=17,$$
$$1+2-3+4+5+6=15,$$
$$1+2+3-4+5+6=13,$$
$$1+2+3+4-5+6=1-2-3+4+5+6=11,$$
$$1+2+3+4+5-6=1-2+3-4+5+6=9,$$
$$1-2+3+4-5+6=1+2-3-4+5+6=7,$$
$$1+2-3+4-5+6=1-2+3+4+5-6=5,$$
$$1+2+3-4-5+6=1+2-3+4+5-6=1-2-3-4+5+6=3,$$
$$1+2+3-4+5-6=1-2-3+4-5+6=1.$$

Врахуйте, що для зменшення максимальної можливої суми 21 на $2n$ знаки «–» треба поставити перед числами, сума яких дорівнює n.

5. Сума площ вирізаних фігурок дорівнює 25, тому з них можна пробувати викладати лише прямокутник розміром 1×25 або квадрат 5×5. Обидва з них викласти не вдасться, бо, наприклад, у жоден з них не поміститься найбільша з вирізаних фігурок.

6. Див. розв’язання задачі 6 за 5 клас. Додатково врахуйте, що при цьому $x=t-z$, $y=z-x$.

7 клас

1. Можна. Спочатку послідовно зліва направо відріжемо 16 частин з числами 1, 21, 2, 12, 121, 2121, 212, 1212, 12121, 212121, 21212, 121212, 1212121, 21212121, 2121212, 12121212. Разом на них буде відрізано 72 цифри початкового числа. Наступні 53 частини

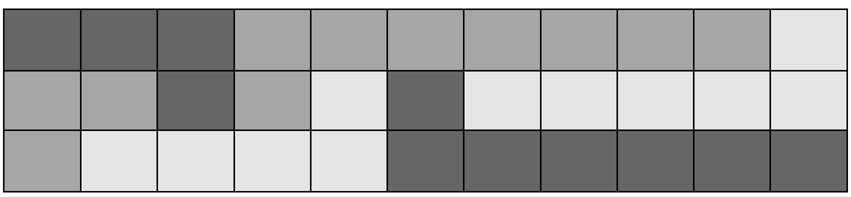
будемо відрізати так, щоб числа на них мали різну кількість цифр – від 9 до 61. Разом на них буде відрізано $9+10+11+...+61=1855$ цифр, а число, яке залишиться після цього на останній 70-тій частині буде 92-цифровим. Зрозуміло, що при цьому двох частин з однаковими записаними на них числами не виявиться.

2. Вказане число ділиться на 9, якщо сума його цифр ділиться на 9, причому його перша цифра x не дорівнює 0. Такі ж умови задовольняють і трицифрові числа вигляду $\overline{xyz}$, які діляться на 9. Найбільшим з них є число 999. Віднімемо від нього 99 – найбільше двоцифрове число, яке ділиться на 9. Враховуючи, що кратним 9 є кожне дев'яте натуральне число, отримаємо, що кількість шуканих чисел дорівнює $(999-99):9=100$.

3. Оскільки вибраними Незнайком точками M, N, K сторони рівностороннього трикутника ABC діляться в однакових відношеннях, то трикутники AMK, BNM, CKN рівні між собою за двома сторонами і кутом 60° між ними. Тому їхні відповідні сторони MK, NM та KN також рівні. Отже, трикутник MNK теж є рівностороннім, і всі його кути дорівнюють 60°.

4. Запишемо задану рівність у вигляді $(x-1)(y-1)=2$. Оскільки x та y є цілими числами, то це можливе лише у таких чотирьох випадках: 1) $x-1=1, y-1=2$; 2) $x-1=2, y-1=1$; 3) $x-1=-1, y-1=-2$; 4) $x-1=-2, y-1=-1$. Звідси отримуємо такі чотири пари цілих чисел x та y: 1) $x=2, y=3$; 2) $x=3, y=2$; 3) $x=0, y=-1$; 4) $x=-1, y=0$.

5. Оскільки сума площ вирізаних фігурок дорівнює 33, то з них можна пробувати викладати лише прямокутники розмірами 1×33 або 3×11. Перший з них викласти не вдасться. Приклад викладання другого з прямокутників наведено на малюнку:



7.6. Розглянемо фрагмент такої таблиці з двох сусідніх стовпчиків:

x	z
y	t

Аналізуючи першу з таблиць, можна побачити таку закономірність в утворенні наступного стовпчика таблиці з попереднього: $z = 2x + y$, $t = y + z = 2(x + y)$.

Тому друга таблиця матиме вигляд як на малюнку справа.

1	4	14	48	164
2	6	20	68	232

Перший її рядок співпадає з другим рядком першої таблиці, а елементи другого рядка вдвічі більші відповідних елементів першого рядка першої таблиці.

8 клас

1. Можна. Доведемо навіть більше – таку стрічку вдасться розрізати й на 88 частин з різними написаними на них числами. Для цього спочатку відріжемо зліва стрічки частини з числами 1 та 2, а далі будемо відрізувати послідовно зліва направо частини четвірками з числами 12, 121, 21, 212; 1212, 12121, 2121, 21212; … поки не отримаємо четвірку частин, яка складається з двох 42-цифрових та двох 43-цифрових чисел: 121…12, 121…21, 212…21, 212…12. При цьому разом на перших 86 утворених у такий спосіб частинах буде відрізано $2(1+2+3+4+...+43)=1892$ цифр початкового числа, а число, яке залишиться, буде 127-цифровим. Залишається лише розрізати цю частину стрічки на дві частини з кількістю цифр, не меншою за 44 у кожній. Зрозуміло, що для отримання 80 потрібних частин достатньо буде відмовитися від останніх восьми розрізань.

Більше 88 частин з такими властивостями не існує.

2. З рівності

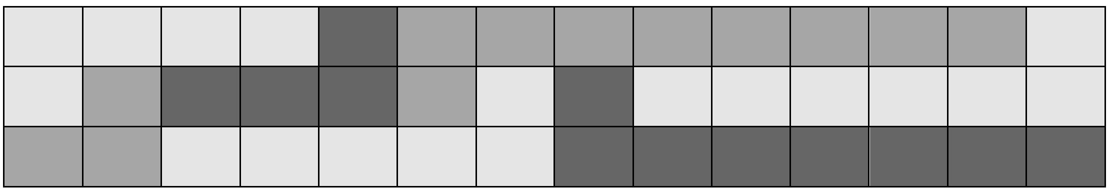
$$\overline{x00y00z} = 999999x + 999y + (x+y+z) =$$
$$= 27 \cdot (37037x + 37y) + (x+y+z),$$

випливає, що таке число ділиться на 27 лише за умови, що сума його цифр ділиться на 27, причому цифра x не дорівнює 0. Це можливо лише у випадку $x = y = z = 9$. Тому 9009009 – єдиний розв’язок.

3. Не можуть. Розглянемо чотирикутник $AECH$. У ньому кути при вершинах E та H є прямими. Тому сума кутів при двох інших вершинах дорівнює 180°. Але при цьому кут ECH є гострим. Отже, кут EAH між проведеними висотами повинен бути тупим, і він не може дорівнювати 88°.

4. Таких пар цілих чисел x та y не існує. Справді, при діленні на 9 куби цілих чисел можуть давати лише остачі 0, 1 або 8 (якщо самі числа при діленні на 3 дають остачі 0, 1 або 2 відповідно). Тому для цілих x та y ліва частина заданої рівності при діленні на 9 може давати лише остачі 0, 1, 2, 7 або 8. Але остача при діленні на 9 числа 2019 дорівнює 3. Зауважимо також, що для розв'язування можна було скористатися й тим, що при діленні на 7 куби цілих чисел можуть давати лише остачі 0, 1 або 6.

5. Оскільки сума площ вирізаних фігурок дорівнює 42, то з них можна пробувати викладати лише прямокутники розмірами 1×42, 2×21, 3×14 або 6×7. Перші два та останній з них викласти не вдасться. Приклад викладання третього з таких прямокутників наведено на малюнку:



6. Див. розв'язання задачі 6 за 7 клас. Додатково врахуйте, що при цьому $y=t-z$, $x=\frac{z-y}{2}=z-\frac{t}{2}$.

2020 рік

5 клас

1. 50 хвилин. Справді, дорога транспортом в обидва боки займає 10 хвилин, тому в один бік вона займе 5 хвилин. Таким чином, на дорогу до школи учень витрачає $30-5=25$ хвилин і стільки ж часу йому буде потрібно, щоб повернутися пішки назад.

2. Могло. Наприклад, якщо 3 яблука він розрізав пополам, а 2 яблука – на 3 рівні частини. Тоді кожен з друзів отримав по одній половині та одній третині яблука.

3. Поділимо монети на 3 купки по 5 монет у кожній. Порівняємо маси перших двох купок. Якщо вони однакові, то фальшива монета у третій купці. Порівнюємо масу цієї купки з масою першої купки. Якщо вона менша, то фальшива монета легша. В іншому разі – важча. Якщо ж при першому зважуванні переважила одна з купок, то порівнюємо її масу з масою третьої купки. У випадку рівноваги фальшива монета легша. В іншому разі – вона важча.

4. 35. Сторонами п'яти з них є сторона та дві діагоналі п'ятикутника, ще п'яти – дві сторони та одна діагональ, п'ятнадцяти – сторона та частини двох діагоналей, п'яти – діагональ та частини двох інших діагоналей та ще п'яти – частини трьох діагоналей.

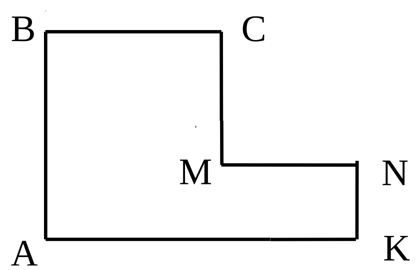
5. 809 чисел. Рівно один раз ним підкреслені числа, які діляться на 3 та на 5, але не діляться на 15. Останні будуть підкреслені Миколкою двічі. Отже, їх потрібно вилучити як зі списку підкреслених чисел, які діляться на 3, так і зі списку підкреслених чисел, кратних 5. Всього отримуємо

$$\frac{2019}{3}+\frac{2020}{5}-2\cdot\frac{2010}{15}=673+404-268=809.$$

У чисельниках дробів записані найбільші натуральні числа, які не перевищують 2020 і діляться націло на 3, 5 та 15 відповідно.

Можна було міркувати ще й так. Серед кожних 15 послідовних натуральних чисел підкресленими рівно один раз будуть 6 чисел, які при діленні на 15 дають остачі 3, 5, 6, 9, 10 та 12. Від 1 до 2010 таких груп по 15 чисел є 134. Крім них, рівно один раз будуть підкреслені ще й числа 2013, 2015, 2016, 2019 та 2020. Разом: $6\cdot 134+5=809$.

6. Перемістимо фрагмент $EFGH$ трьох сторін заданої фігури вправо на довжину відрізка ED, а сам цей відрізок поставимо на прямій AH впритул до точки H справа від неї. У результаті отримаємо фігуру



$ABCMNK$ (див. мал. справа), периметр якої дорівнює периметру фігури $ABCDEFGH$. Оскільки при цьому $AK = BC + MN = 9\,см$ та $CM + NK = AB = 6\,см$, то шуканий периметр дорівнює 30 см.

6 клас

1. Нехай спочатку такими двома двоцифровими числами були числа $\overline{ab}$ та $\overline{cd}$. Тоді

$$A - B = (10a + b)(10c + d) - (10b + a)(10d + c) = 99(ac - bd)$$

ділиться на 99.

2. 6 кішок. Якщо не рахувати Сільвера, то у решти з них разом 14 голів та 40 ніг. Якщо б у всіх з них було по дві ноги, то всього отримали би лише 28 ніг. «Зайві» 12 ніг ділимо на 2 і знаходимо кількість кішок.

3. 32. Сторонами шести з них є дві сторони та одна діагональ шестикутника, вісімнадцяти – сторона та частини двох діагоналей, двох – три діагоналі шестикутника, та ще шести – частини трьох діагоналей.

4. Лише для $n = 18$. При цьому, скільки б сірників не забрав Миколка своїм першим ходом, Сергійко у відповідь зможе залишити на столі 1 сірник, отже, перемогти. Якщо ж $n \le 17$, то Миколка своїм першим ходом забирає кількість сірників, яка дорівнює остачі від ділення 19 на $n+1$. Далі, яку б кількість k сірників не забирав Сергійко, Миколка у відповідь забиратиме $n+1-k$ сірників поки на столі не залишиться 1 сірник. А якщо $n \ge 19$, то залишити Сергійкові на столі 1 сірник Миколка зможе уже першим своїм ходом.

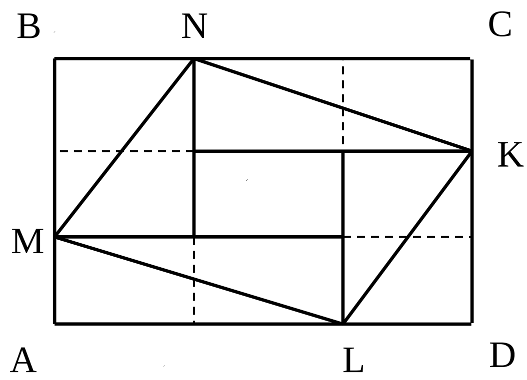
5. 471 число. Двічі ним підкреслені числа, які діляться на 6, на 10 та на 15, але не діляться на 30. Останні будуть підкреслені Миколкою тричі. Отже, їх потрібно вилучити як зі списку підкреслених чисел, які діляться на 6, так і зі списків підкреслених чисел, кратних 10 та 15. Всього отримуємо

$$\frac{2016}{6} + \frac{2020}{10} + \frac{2010}{15} - 3 \cdot \frac{2010}{30} = 336 + 202 + 134 - 201 = 471.$$

У чисельниках дробів записані найбільші натуральні числа, які не перевищують 2020 і діляться націло на 6, 10, 15 та 30 відповідно.

Можна було міркувати ще й так. Серед кожних 30 послідовних натуральних чисел підкресленими двічі будуть 7 чисел, які при діленні на 30 дають остачі 6, 10, 12, 15, 18, 20 та 24. Від 1 до 2010 таких груп по 30 чисел є 134. Крім них, двічі будуть підкреслені ще й числа 2016 та 2020. Разом: $7 \cdot 67 + 2 = 471$.

6. 9 виділених жирним на малюнку справа фігурок (вісім прямокутних трикутників та один прямокутник у центрі) мають однакові площі. 5 із цих фігурок містяться у фігурі $MNKL$. Тому відношення площі фігури $MNKL$ до площі прямокутника $ABCD$ дорівнює $5:9$.



7 клас

1. Помилка була допущена при винесенні за дужки спільного множника з кожної частини початкової рівності. Замість $6 \cdot (1:1) = 7 \cdot (1:1)$ треба було записати $6 \cdot (1:6) = 7 \cdot (1:7)$.

2. Такими, наприклад, є пари чисел: $(4; 5)$, $(5; 11)$, $(7; 71)$. Дорівнювати 2020 у цій рівності число n не може, бо $2020^2 - 1 = 2019 \cdot 2021 = 3 \cdot 673 \cdot 43 \cdot 47$ ділиться, наприклад, на просте число 43. Тому $m \geq 43$. Але $43! + 1$ значно більше за 2020^2.

Можна було міркувати ще й так. Число n не може дорівнювати 2020, бо $10! + 1 = 3628801 < 4080400 = 2020^2 < 39916801 = 11! + 1$.

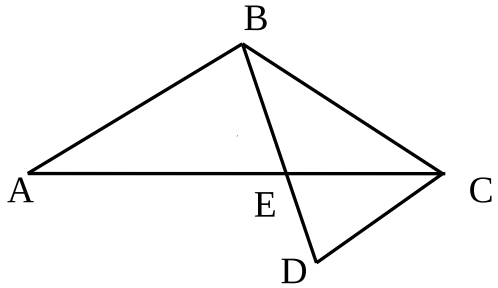
3. Батько віддав синам 5, 8, 12 та 20 грибів відповідно. Якщо позначити кількості грибів, які він дав своїм синам, через x, y, z та $2t$, то з умови задачі отримаємо рівності $x + y + z + 2t = 45$ та $2x = y + 2 = z - 2 = t$. Отже, $x + (2x - 2) + (2x + 2) + 4x = 45$, тобто $x = 5$, $y = 2x - 2 = 8$, $z = 2x + 2 = 10$, $2t = 4x = 20$.

4. Можливі 6 варіантів розташування оцінок 5, 4, 3: АВС, АСВ, ВАС, ВСА, САВ та СВА. Кожен запис означає, що "5" отримав перший учень, "4" – другий, "3" – третій. Букви у записах – перші літери імен учнів. З цих записів лише перший підходить до умови

задачі: в твердженнях вчителя одна оцінка правильна, а дві інші – ні. Тому Сергій отримав "3", Василь – "4", Андрій – "5".

5. Вдасться. Наприклад, так. Один мотоцикліст за одну годину відвозить одного з товаришів на відстань 50 км. Решту 10 км той за дві години встигне пройти пішки. Так само за дві години другий товариш пройде 10 км від початку маршруту, де його вже чекатиме мотоцикліст, який менше ніж за одну годину подолає відстань у 40 км, повертаючись назад. Ще одну годину вони витратять, щоб вдвох прибути на мотоциклі до міста одночасно з їх третім товаришем.

6. Трикутники ABC та BCD (див. мал. справа) – рівнобедрені. Нехай $\angle ACD = x$, $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$. Тоді $\angle BDC = \angle BCD = \alpha + x$, і для зовнішнього кута BEC трикутників ABE та DCE отримуємо, що $\angle BEC = 70^\circ + \alpha$ та $\angle BEC = 2x + \alpha$. Звідси маємо $2x = 70^\circ$, $x = 35^\circ$. Отже, $\angle ACD = 35^\circ$.



Можна було міркувати ще й так: точки A, C, D лежать на колі з центром у точці B. Тому вписаний кут ACD дорівнює половині центрального кута ABD.

8 клас

1. $p_1 = 2$, $p_2 = 5$, $p_3 = 7$. Справді, добуток $p_1p_2p_3$ ділиться на 5, тому принаймні одне з цих чисел дорівнює 5. Позначимо два інші з них через p та q. Тоді з рівності $pq = p + q + 5 \Leftrightarrow (p-1)(q-1) = 6$ знаходимо ще два шукані прості числа 2 та 7.

2. Скориставшись рівністю $1 + (n-1)(n+1) = n^2$, отримаємо

$$\sqrt{1 + 2019\sqrt{1 + 2020\sqrt{1 + 2021 \cdot 2023}}} =$$

$$= \sqrt{1 + 2019\sqrt{1 + 2020 \cdot 2022}} = \sqrt{1 + 2019 \cdot 2021} = 2020.$$

3. $x^8 + x + 1 = x^8 - x^2 + x^2 + x + 1 = x^2\left(x^3 - 1\right)\left(x^3 + 1\right) + x^2 + x + 1 =$

$$= \left(x^2\left(x^3+1\right)(x-1) + 1\right)\left(x^2 + x + 1\right) = \left(x^6 - x^5 + x^3 - x^2 + 1\right)\left(x^2 + x + 1\right).$$

4. Друге число більше. Справді,

$$x-y=\frac{1^2}{1}+\frac{2^2-1^2}{3}+\frac{3^2-2^2}{5}+\ldots+\frac{12^2-11^2}{23}-\frac{12^2}{25}=$$

$$=12-\frac{12^2}{25}=\frac{12\cdot 13}{25}=6,24<6,25=\frac{25}{4}.$$

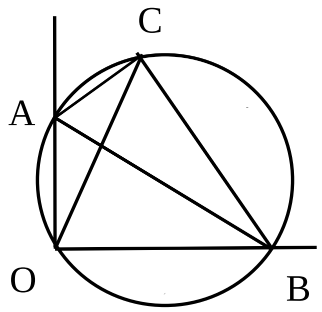
5. Математик не знає французької мови, якою володіє історик. Якщо припустити, що історик знає також італійську, то для спілкування з ним і математик мав би володіти італійською мовою, що суперечить умові задачі. Тому історик не знає італійської мови, зате знає англійську, яку внаслідок цього повинен знати і математик.

Оскільки біологу для розмови з істориком потрібен перекладач, то він не знає ні англійської, ні французької, отже, знає німецьку та італійську. Враховуючи, що таким перекладачем повинен бути хімік, останній, не знаючи англійської, а також італійської, якою володіє лише біолог, повинен знати німецьку та французьку мови.

А поговорити втрьох однією мовою – німецькою – зможуть лише хімік, біолог і математик за умови, що математик знатиме її.

Остаточно отримуємо: математик знає англійську та німецьку, історик – англійську та французьку, біолог – німецьку та італійську, а хімік – німецьку та французьку мови.

6. Зрозуміло, що точки O та C знаходяться з різних сторін прямої AB, бо інакше трикутник ABC не міг би рухатися вказаним способом. Два протилежні кути O та C чотирикутника $OACB$ (див. мал. справа) прямі, тому навколо нього можна описати коло. При вказаних в умові задачі рухах величина його діаметра AB не змінюється. Так само не змінюється і довжина хорди BC. Тому не змінюються й величини вписаних кутів BOC, які спираються на дуги BC. Це означає, що вершина C рухається вздовж відрізка прямої, яка проходить через точку O.



2021 рік

5 клас

1. Оскільки $2021 = 1 \cdot 2021 = 43 \cdot 47$, то умову задачі задовольняє лише прямокутник зі сторонами 43 *см* та 47 *см*. Його периметр дорівнює 180 *см*.

2. Оскільки перший з добутків ділиться на 10, а другий є непарним і ділиться на 5, то останньою цифрою числа a є цифра 5.

Крім того, кожний з добутків ділиться на 25, а їх різниця є непарним числом. Тому число a може закінчуватися або на 25, або на 75. Отже, його передостання цифра не може ділитися ні на 3, ні на 4, ні на 5.

3. Наприклад:

$$5 \xrightarrow{(1)} 10 \xrightarrow{(4)} 3 \xrightarrow{(1)} 6; \quad 6 \xrightarrow{(3)} 19 \xrightarrow{(1)} 38 \xrightarrow{(1)} 76 \xrightarrow{(4)} 25 \xrightarrow{(4)} 8 \xrightarrow{(2)} 4 \xrightarrow{(2)} 2 \xrightarrow{(3)} 7.$$

4. Найбільше ці учні разом могли розв'язати $5+4+3+2=14$, а найменше $4+3+2+1=10$ задач. Оскільки кожна з п'яти задач розв'язана однаковим числом цих учнів, то загальна кількість розв'язаних задач повинна ділитися на 5. Отже, вона може дорівнювати лише 10. Тому Марійка розв'язала не більше чотирьох задач. Приклад із чотирма задачами наведений у наступній таблиці:

Учень \ задача	1	2	3	4	5
Марійка	+	+	+	-	+
Петрусь	-	+	-	+	+
Михайлик	+	-	-	+	-
Миколка	-	-	+	-	-

5. Оскільки у кожного хлопчика сусід зліва – дівчинка, то з обох боків кожного хлопчика можуть стояти лише дівчата. Для тих дівчат, які стоять праворуч хлопчиків, внаслідок другої умови має бути ще стільки ж дівчат, які стоять правіше дівчат. Тому всіх дівчат – вдвічі більше ніж хлопчиків. Отже, у цій компанії може бути лише 5

хлопчиків та 10 дівчат. Умови задачі задовольняють, наприклад, такі розташування дітей по колу зліва направо (крайня справа дівчина у колі стоїть поруч з крайньою зліва):

1) ДХДДХДДХДДХДДХД, 2) ДХДХДХДХДХДДДДД.

6 клас

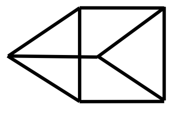
1. Неважко побачити, що довжини сторін шарів, починаючи з верхнього, виражаються непарним числом метрів: 1, 3, 5, …, $2n-1$. Тому кількість кубів в основі піраміди є квадратом непарного натурального числа. Умову задачі задовольняє лише $n=23$, для якого $(2n-1)^2=45^2=2025$, бо $43^2=1849$ та $47^2=2289$ відрізняються від 2021 більше, ніж на 6. Отже, сторона основи піраміди дорівнює 45 *м*, а шукана висота піраміди становить 23 *м*.

2. Для $n=6$. Для нього ця сума дорівнює $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=2$. Для менших $n>1$ такі суми відповідно дорівнюють:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},\quad \frac{1}{1}+\frac{1}{3}=\frac{4}{3},\quad \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4},\quad \frac{1}{1}+\frac{1}{5}=\frac{6}{5}.$$

3. Серед кожних трьох, які сидять поруч, принаймні один є лицарем, інакше середній з них брехун сказав би правду. Тому лицарів не менше двох, а брехунів – не більше чотирьох. Крім того, лицарів не може бути більше, ніж брехунів, бо, наприклад, праворуч кожного лицаря точно сидить брехун. Отже, лицарів не більше трьох, а брехунів – не менше трьох. Умову задачі задовольняють такі два варіанти: 1) БЛБЛБЛ, 2) БЛББЛБ. Таким чином, у цій компанії можуть бути 3 або 4 брехуни.

4. Можуть. Див. рисунок справа, на якому довжини всіх проведених відрізків дорівнюють 1 *см*.



5. Подамо цю суму у вигляді

$$\frac{2-1}{1\cdot 2}+\frac{4-2}{2\cdot 4}+\frac{7-4}{4\cdot 7}+\frac{11-7}{7\cdot 11}+\frac{16-11}{11\cdot 16}+\frac{22-16}{16\cdot 22}=$$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{22}\right)=1-\frac{1}{22}=\frac{21}{22}.$$

Отже, шукана різниця дорівнює 1.

7 клас

1. Оскільки $2021=2025-4=45^2-2^2=\left(-45\right)^2-2^2=\left(-45\right)^2-\left(-2\right)^2$, то умови задачі задовольняють, наприклад, такі пари цілих чисел $m=-45$, $n=2$ та $m=-45$, $n=-2$. Підійдуть також пари $m=-1011$, $n=1010$ та $m=-1011$, $n=-1010$. Інших пар цілих чисел з такими властивостями немає (див. розв'язання задачі 8.1).

2. Нехай вся отримана ними сума становила x гривень. Тоді

$$\frac{3}{10}x+100+\frac{4}{15}x+200+\frac{7}{30}x+300=x.$$

З цього рівняння знаходимо $x=3000$ та

$$\frac{3}{10}x+100=\frac{4}{15}x+200=\frac{7}{30}x+300=1000.$$

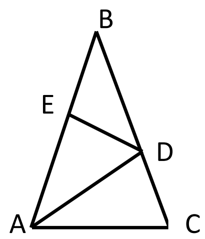
Таким чином, кожний з працівників отримав по 1000 гривень.

3. Зауважимо, що це число є непарним і ділиться на 25. Тому воно може закінчуватися лише на 25 або 75. При діленні на 4 непарні числа можуть давати лише остачі 1 або 3. Серед записаних 1011 множників чисел з остачею 1 є 506, а з остачею 3 – 505. Отже, їхній добуток при діленні на 4 дає остачу 3. Тому передостанньою цифрою поданого числа є цифра 7.

4. Нехай ці точки розташовані на прямій зліва направо у такому порядку: A, B, C, D. Покажемо, що шоста відстань може бути більшою за 5 см. Тоді також $AD>5\,см$. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що $AC=5\,см$. Якщо при цьому $AB=1\,см$, то жодним вибором точки D не вдасться одночасно реалізувати виміри 2 та 3 см. Якщо $AB=2\,см$, то умову задачі задовольняє $AD=6\,см$. Якщо $AB=3\,см$, то жодним вибором точки D не вдасться одночасно реалізувати виміри 1 та 4 см. А якщо $AB=4\,см$, то $AD=7\,см$. Отже, шоста відстань може набувати найбільшого значення 7 сантиметрів.

Відповідний приклад пропонуємо читачам навести самостійно.

5. <u>I спосіб</u>. Відкладемо на стороні AB точку E таку, що $AE = AC$ (див. рисунок справа). Трикутники ADE та ADC рівні за двома сторонами і кутом між ними. Оскільки $AB = BC$ та $BD = AC$, то $BE = DC = DE$. Якщо $\angle ABC = \beta$, то також $\angle BDE = \beta$. Тому $\angle BAC = \angle ACB = \angle AED = 2\beta$. Отже, $5\beta = 180^{\circ}$, звідки $\beta = 36^{\circ}$.



<u>II спосіб</u>. Очевидно, що $\beta = 36^{\circ}$ задовольняє умову задачі, бо при цьому матимемо два рівнобедрені трикутники ABD та ADC, для яких $BD = AD = AC$. Для доведення відсутності інших розв'язків врахуємо, що у трикутнику навпроти меншого кута лежить менша сторона. Припустимо, що $\beta > 36^{\circ}$. Тоді $\angle BAC = \angle ACB < 72^{\circ}$, $\angle BAD = \angle CAD < 36^{\circ}$, $\angle ADC > 72^{\circ}$. Отже, $BD < AD < AC$, що суперечить умові $BD = AC$. Якщо ж $\beta < 36^{\circ}$, то всі записані вище нерівності поміняються на протилежні.

8 клас

1. Оскільки $2021 = 2025 - 4 = 45^2 - 2^2 = (-45)^2 - 2^2 = (-45)^2 - (-2)^2$, то умови задачі задовольняють, наприклад, такі пари цілих чисел $m = -45,\ n = 2$ та $m = -45,\ n = -2$. Крім того, враховуючи рівність $m^2 - n^2 = (m-n)(m+n)$ та розклад на множники $2021 = (-2021)\cdot(-1)$, отримаємо ще дві пари шуканих чисел $m = -1011,\ n = 1010$ із співвідношень $m - n = -2021,\ m + n = -1$ та $m = -1011,\ n = -1010$ із рівнянь $m - n = -1,\ m + n = -2021$. Наведені вище перші дві пари отримуються аналогічно із розкладу $2021 = (-47)\cdot(-43)$. Інших пар з такими властивостями немає, бо 43 та 47 – прості числа.

2. Може. У першому зважуванні, поклавши на одну шальку монети з масами 1, 2, 3, 4, 5 грамів, а на другу – монети з масами 7 та 8 грамів, вона допоможе Миколці визначити колір монети масою 6 грамів, яка не брала участь у зважуванні, та кольори двох найважчих монет. Це справді так, бо розподіл монет, при якому маси п'яти з них дорівнюють масам деяких двох інших, єдиний. Другим зважуванням

монет з масами 1 та 7 грамів на одній шальці і з масою 8 грамів на іншій вона дасть змогу Миколці уточнити конкретні кольори монет з масами 7 та 8 грамів і дізнатися колір монети масою 1 грам. Таким чином Миколка знатиме кольори чотирьох монет з масами 1, 6, 7 та 8 грамів.

3. <u>І спосіб</u>. З рівності $n^3-n=(n-1)n(n+1)$ і того, що добуток трьох послідовних цілих чисел ділиться на 3, отримуємо, що разом з $a^3+b^3+c^3$ на 3 ділиться й $a+b+c$. Тому на 3 ділиться також

$$2(ab+bc+ca)=(a+b+c)^2-\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

Звідси випливає, що й $ab+bc+ca$ ділиться на 3.

<u>ІІ спосіб</u>. Оскільки при діленні на 3 квадрати цілих чисел можуть давати лише остачі 0 або 1, то з подільності $a^2+b^2+c^2$ на 3 випливає, що або на 3 ділиться кожне з чисел a, b, c, або жодне з них на 3 не ділиться. У першому випадку подільність $ab+bc+ca$ на 3 очевидна. А у другому $a^3+b^3+c^3$ може ділитися на 3 лише за умови, що кожне з чисел a, b, c при діленні на 3 дає остачу 1, або кожне – остачу 2. В обох варіантах усі доданки суми $ab+bc+ca$ при діленні на 3 дають остачу 1, тому така сума ділиться на 3.

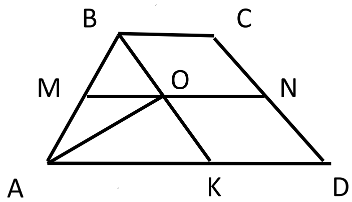
4. <u>І спосіб</u>. Розкриваючи модулі, отримаємо, що:

$$|x-4|+|x|+|x+4|=\begin{cases}-x+4-x-x-4=-3x, & x\le -4,\\ -x+4-x+x+4=8-x, & -4\le x\le 0,\\ -x+4+x+x+4=8+x, & 0\le x\le 4,\\ x-4+x+x+4=3x, & x\ge 4.\end{cases}$$

На кожному з цих проміжків ліва частина рівняння не менша за 8. Водночас для правої частини рівняння маємо $8-x^2\le 8$. Тому рівність можлива лише за умови, що вони обидві дорівнюють 8. Справа це значення набувається лише при $x=0$. Оскільки при цьому значенні x ліва частина рівняння також дорівнює 8, то $x=0$ – єдиний корінь поданого рівняння.

<u>ІІ спосіб</u>. Враховуючи геометричний зміст модуля, ліву частину рівняння можна розглядати як суму відстаней від точки x до точок 4,

0 та -4 числової прямої. Нескладно переконатися, що за будь-якого розташування точки x на числовій прямій така сума не менша відстані між точками 4 та -4, тобто не менша за 8. А далі завершуємо розв'язання як і у першому способі.



5. <u>І спосіб</u>. Нехай для конкретності $AD > BC$, а точка M лежить на бічній стороні AB (див. рисунок справа). Позначимо через K точку перетину прямої BO з основою AD. Тоді MO – середня лінія трикутника ABK. Тому AO – його медіана. Вона ж є і бісектрисою кута BAD, бо трикутник ABK рівнобедрений внаслідок рівностей $\angle ABK = \angle CBK = \angle AKB$. Суть міркувань не зміниться і для випадку $BC > AD$.

<u>ІІ спосіб</u>. Внаслідок $\angle MBO = \angle CBO = \angle MOB$ та $AM = MB$ маємо $AM = MO$. Тому $\angle MAO = \angle MOA = \angle DAO$, тобто AO – бісектриса кута BAD.

9 клас

1. Оскільки $(3k)^3 = 27k^3$ та $(3k \pm 1)^3 = 27k^3 \pm 27k^3 + 9k \pm 1$, то куби цілих чисел при діленні на 9 можуть давати лише остачі 0, 1 та 8. Отже, остачі їхньої різниці належать множині $\{0,1,2,7,8\}$. Але остача 5, отримана при діленні 2021 на 9, до цієї множини не належить. Тому вказаних цілих чисел m та n не існує.

2. Оскільки сума всіх цифр від 0 до 9 дорівнює 45, то за будь-якого їх порядку записане ними число буде ділитися на 9. Тому потрібно, щоб воно ділилося і на 11. Для цього на 11 повинна ділитися різниця між сумами цифр, записаних на парних та непарних позиціях відповідно. Враховуючи, що 45 – непарне число, ця різниця також має бути непарною. Дорівнювати за абсолютною величиною 33 або більше вона не може, бо сума навіть п'яти найменших цифр більша за 6, отже, вона може бути лише 11. З іншого боку, шукане число буде найбільшим, якщо його перші 5 цифр є такими: 98765. Тоді для досягнення потрібної різниці сума решти двох цифр на непарних позиціях має дорівнювати 7, а сума решти трьох цифр на

парних позиціях – дорівнювати 3. Такі набори з цифр від 0 до 4 отримуються єдиним способом. Записуючи їх на відповідних позиціях за спаданням, отримаємо шукане число 9876524130.

3. Оскільки насправді $(a+b+2)^2 = a^2+b^2+2^2+2ab+4a+4b$, то для знаходження шуканих пар (a,b) запишемо рівність $ab+2a+2b=0$ у вигляді $(a+2)(b+2)=4$. Обидва множники у лівій частині останньої рівності мають бути дільниками числа 4. Враховуючи, що

$$4=1\cdot 4=2\cdot 2=4\cdot 1=(-1)\cdot(-4)=(-2)\cdot(-2)=(-4)\cdot(-1),$$

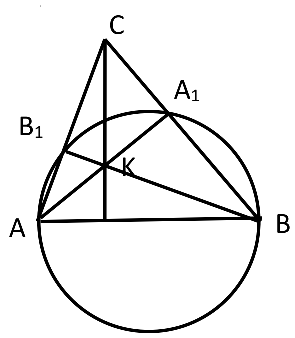
знайдемо такі 6 пар (a,b): $(-1,2)$, $(0,0)$, $(2,-1)$, $(-3,-6)$, $(-4,-4)$, $(-6,-3)$.

4. Спочатку доведемо, що число 1 Миколці отримати вдасться:

$$9\xrightarrow{(3)}28\xrightarrow{(2)}14\xrightarrow{(2)}7\xrightarrow{(4)}2\xrightarrow{(2)}1.$$

Далі наводимо спосіб збільшення кожного натурального числа на 1:

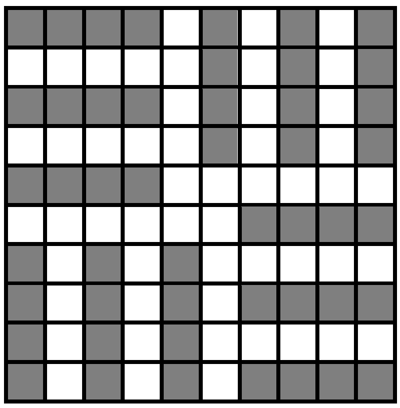
$$n\xrightarrow{(2)}\frac{n}{2}\xrightarrow{(2)}\frac{n}{4}\xrightarrow{(3)}\frac{3n}{4}+1\xrightarrow{(1)}\frac{3n}{2}+2\xrightarrow{(1)}3n+4\xrightarrow{(4)}n+1.$$



5. Проведемо прямі AK та BK до перетину з колом у точках A_1 та B_1 відповідно і позначимо точку перетину прямих AB_1 та BA_1 через C (див. рисунок справа). Оскільки кути, які спираються на діаметр, є прямими, то K – точка перетину двох висот трикутника ABC, отже, і третьої його висоти. Тому шуканою прямою, перпендикулярною до AB, є пряма CK.

10 клас

1. Це можна зробити, наприклад, так:



2. Підставимо у подану рівність $x=0$. Тоді $f(1)=f(0)$, тобто $a+b+c=c$. Отже, усі такі тричлени задовольняють умову $b=-a$.

Доведемо, що при кожному $a\neq 0$ та довільному значенні c квадратні тричлени

$f(x)=ax^2-ax+c$ є шуканими. Справді, при цьому $f(x+1)=a(x+1)^2-a(x+1)+c=ax^2+ax+c=f(-x)$.

До цього ж висновку можна прийти, прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x у тотожності

$$f(x+1)=a(x+1)^2+b(x+1)+c\equiv a(-x)^2+b(-x)+c=f(-x).$$

3. Зрозуміло, що без зважувань зробити це не вдасться. А ось одного зважування може бути достатньо. Нехай маса справжньої монети дорівнює a грамів, n фальшивих на 1 грам легші, а решта – на 1 грам важчі за справжні. Вибравши навмання одну монету, Марійка поставить решту 20 монет по 10 на кожну із шальок.

Якщо вибрана монета справжня і на одній із шальок всі монети виявилися справжніми, а на другій – фальшивими, то стрілка покаже різницю у грамах $n(a-1)+(10-n)(a+1)-10a=10-2n$, яка є парним числом.

Якщо поміняти на шальках одну фальшиву монету місцями зі справжньою, то одна з шальок стане на 1 грам важчою, а друга на 1 грам легшою. При цьому показник стрілки зміниться на 2, але залишиться парним числом.

Такими замінами врешті решт вдасться добитися будь-якого розміщення монет на шальках, і кожного разу стрілка показуватиме парне число грамів. А у випадку випадкового вибору Марійкою фальшивої монети стрілка покаже непарне число грамів.

4. Запишемо рівність $2^{m+n}=2^m+2^n+k$ у вигляді

$$\left(2^m-1\right)\left(2^n-1\right)=k+1.$$

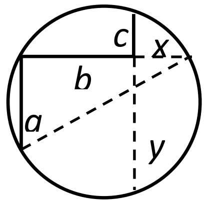
Оскільки $k+1\le 2022$, а $2^{11}-1=2047>2022$, то числа m та n менші за 11. Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що $m\ge n$.

Далі, для фіксованих $m\le 10$ знайдемо максимальні значення $n\le m$ такі, що $\left(2^m-1\right)\left(2^n-1\right)\le 2022$:

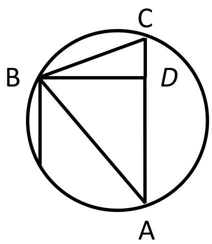
$$\left(2^{10}-1\right)\left(2^1-1\right)=1023,\quad \left(2^9-1\right)\left(2^2-1\right)=1533,\quad \left(2^8-1\right)\left(2^3-1\right)=1785,$$

$$\left(2^7-1\right)\left(2^4-1\right)=1905,\quad \left(2^6-1\right)\left(2^5-1\right)=1953.$$

Таким чином, найбільшим значенням такого добутку є 1953. Відповідно, шукане значення $k=1952$. Йому відповідають пари натуральних чисел $m=6, n=5$ та $m=5, n=6$.



5. <u>I спосіб</u>. Проведемо додатково ще три відрізки пунктирними лініями (див. рисунок справа). Оскільки $y=a+c$, $cy=bx$, то $b+x=b+\frac{c(a+c)}{b}$. Тоді з прямокутного трикутника з катетами a та $b+x$ за теоремою Піфагора знаходимо його гіпотенузу – діаметр заданого кола, половина якого – шуканий радіус $R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+\left(b+\frac{c(a+c)}{b}\right)^2}$.



<u>II спосіб</u>. Розглянемо трикутник ABC, висота якого $BD=b$, та $CD=c$, $AD=a+c$ (див. рисунок справа). Записуючи його площу двома способами, отримаємо рівність $AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABC=BD\cdot AC$.

Але $AC=2R\cdot\sin\angle ABC$, тому $R=\frac{AB\cdot BC}{2BD}=\frac{1}{2b}\sqrt{\left(b^2+(a+c)^2\right)\left(b^2+c^2\right)}$.

Нескладно переконатися, що ці два вирази для R є тотожними.

11 клас

1. Щоб такий модуль був записаний двома однаковими цифрами, він повинен ділитися на 11. При діленні на 11 можливі лише 11 різних остач. Тому для $n\geq 12$ знайдуться принаймні два записані вчителем числа, модуль різниці яких ділиться на 11, отже, записується двома однаковими цифрами.

Для $n\leq 11$ такого гарантувати не вдасться. Достатньо розглянути набір чисел: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20. Модуль різниці кожних двох із них не перевищує 10, отже, не може бути записаний двома однаковими цифрами. Тому $n=12$ – найменше шукане значення.

2. Не можуть. Розглянемо загальнішу задачу, вважаючи, що кожна з таких восьми сум дорівнює цілому числу S, а у центрі

таблиці знаходиться натуральне число a. При обчисленні вказаних сум воно пораховане 4 рази, числа у кутових клітинках – тричі, а в інших чотирьох клітинках – двічі. Тому, додавши ще дві суми по рядку та стовпчику, які містять центральну клітинку таблиці, отримаємо разом 10 сум, у яких число a пораховане 6 разів, а числа в усіх інших клітинках – тричі. Таким чином, матимемо рівність $10S = 9S + 3a$, звідки $S = 3a$, тобто S ділиться на 3. Оскільки ж 2021 на 3 не ділиться, то слова Миколки не можуть бути правдою.

3. Підставивши у подану рівність $x = \frac{\pi}{2}$, знайдемо $c = 0$. Далі, підставляючи $x = \frac{\pi}{4}$ та $x = -\frac{\pi}{4}$, для визначення коефіцієнтів a та b отримаємо рівняння $a + \frac{b}{\sqrt{2}} = 0$ та $-a + \frac{b}{\sqrt{2}} = 0$ відповідно. З них знаходимо $a = b = 0$. Остаточно отримуємо $a = b = c = 0$.

4. Запишемо ліву частину рівняння у вигляді

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1} = \left(\frac{x}{x+1}\right)^{-(x+1)} = \left(\frac{(x+1)-1}{x+1}\right)^{-(x+1)} = \left(1+\frac{1}{-(x+1)}\right)^{-(x+1)}.$$

Покладаючи $-(x+1) = 11$, знаходимо $x = -12$.

Зрозуміло, що наведених міркувань недостатньо для того, щоб зробити висновок про єдиність знайденого x.

5. Спочатку проведемо через точку O довільний діаметр AB цього кола так, щоб він не проходив через жодну з точок M та N і не був перпендикулярний до прямої MN. Далі, використовуючи ідею розв'язання задачі 9.5, проводимо через точки M та N прямі, перпендикулярні до AB. Зрозуміло, що такі прямі будуть паралельними.

<u>Примітка</u>. Замість візуальної перевірки, що діаметр AB не є перпендикулярним до MN, можна провести два діаметри. Принаймні один з них гарантовано задовольнятиме цю умову.

Зміст