

І.В. ФЕДАК

**ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ:
1987-2016 РОКИ
Завдання. Відповіді**

Харків
Видавнича група «Основа»
– 2016 –

ББК: 22.1я7

УДК: 51(031)

Ф 76

Рекомендовано до друку вченою радою Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника (протокол №8 від 29 березня 2016 р.)

Федак І. В. Олімпіади з математики: 1987 – 2016 роки. Завдання відповіді. – Харків: Видавнича група «Основа», 2016. – 252 с.

Рецензенти:

Заторський Р.А., доктор фізико-математичних наук, професор (Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника)

Кукуш О. Г., доктор фізико-математичних наук, професор (Київський національний університет ім. Тараса Шевченка),

Никифорчин О. Р., доктор фізико-математичних наук, професор (Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника)

Зібрані задачі тридцяти Івано-Франківських обласних олімпіад з математики за 1987 – 2016 роки, до проведення яких автор посібника мав безпосереднє відношення як член чи голова журі. Наведені відповіді та вказівки до їх розв'язування, а також критерії оцінювання.

Для учнів 7–11 класів загальноосвітніх шкіл, гімназій та ліцеїв, професійно-технічних навчальних закладів, студентів, які навчаються за напрямом підготовки «математика», учителів математики, керівників математичних гуртків та всіх любителів нестандартних математичних задач.

ISBN 978-617-00-2829-7.

© Федак І. В., 2016

© ТОВ «Видавнича група «Основа»», 2016

Передмова

Математичні олімпіади школярів – дуже популярні змагання в Україні і мають уже понад вісімдесятилітню історію. Перша міська математична олімпіада була проведена у Києві з ініціативи видатного математика академіка М. П. Кравчука у 1935 році. А у 1961 році пройшла перша Республіканська олімпіада з математики, від якої беруть свій відлік Всеукраїнські олімпіади юних математиків, членом журі яких автор даного посібника є з 1990 року.

Мені, тоді учневі звичайної сільської школи с. Парище Надвірнянського району Івано-Франківської області, також тричі пощастило бути учасником таких змагань, а в 1974 році – ще й випробувати свої сили на VIII Всесоюзній олімпіаді юних математиків у Єревані, за що я дуже вдячний своїй вчительці математики Петрик Ірині Василівні.

Цікавість до математичних олімпіад і нестандартних задач лише посилилася під час викладацької роботи у Прикарпатському національному університеті імені Василя Стефаника. Олімпіадна тематика стала ключовою у позакласній роботі з учнями, лекціях на курсах підвищення кваліфікації вчителів математики, при читанні спеціальних курсів «Розв’язування задач підвищеної складності з математики», «Олімпіадні задачі» на факультеті математики та інформатики.

Пропонований вашій увазі посібник є своєрідним підсумком тридцятирічної роботи його автора з обдарованими дітьми. У ньому наведені умови задач III етапу Всеукраїнських олімпіад з математики, які проходили в Івано-Франківській області у 1987 – 2016 роках, до проведення яких автор посібника мав безпосереднє відношення як член чи голова журі. Зокрема, ним повністю були сформовані комплекти завдань таких олімпіад 1990 – 1993, 1996, 1997, 2002, 2003, 2005 – 2007 та 2015 років.

До кожної з задач подані розв’язання (чи вказівки щодо їх розв’язування для найпростіших з них).

Сподіваюся, що, разом з посібниками «Готуємося до олімпіади з математики», «Розв’язування задач підвищеної складності з математики» та ще понад п’ятдесятьма іншими публікаціями автора на олімпіадну тематику, він буде цікавим як учням, студентам та вчителям математики, так і всім любителям нестандартних задач.

**УМОВИ ЗАДАЧ ІВАНО-ФРАНКІВСЬКИХ ОБЛАСНИХ
ОЛІМПІАД З МАТЕМАТИКИ 1987 – 2016 рр.**

1987 рік

6 клас

1. Для нумерації сторінок підручника використали 6869 цифр. Скільки сторінок має підручник?
2. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 36 см. Медіана, проведена до бічної сторони, ділить його на два трикутники з периметрами 30 см і 24 см. Визначте довжину медіани і сторін заданого трикутника.
3. Потрібно упакувати самовари у ящики, з яких одні вміщують 4 самовари, а інші – 5. Скільки потрібно взяти тих та інших ящиків, щоби упакувати 41 самовар?
4. Задано ряд цілих чисел, складений за законом: 4, 7, 12, 21, 38, Продовжіть цей ряд до отримання восьмого числа.

7 клас

1. Встановіть, при яких натуральних n вираз $\frac{n^3 - 2n^2 + 3}{n - 2}$ є цілим числом.
2. Побудуйте трикутник ABC , в якому вершина кута знаходиться у заданій точці, а бісектриси двох інших кутів лежать на двох заданих прямих, які перетинаються.
3. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\frac{xy}{x+y} = c, \quad \frac{yz}{y+z} = a, \quad \frac{zx}{z+x} = b.$$
4. На площині розташовано k зубчатих коліс так, що перше зчеплене з другим, друге – з третім і так далі, а останнє – з першим. У яких випадках колеса такої системи можуть рухатися?

8 клас

1. Доведіть, що сума квадратів медіан трикутника дорівнює $\frac{3}{4}$ суми квадратів його сторін.

2. Із кожної вершини п'ятикутника провели вектори до середин трьох не суміжних з даною вершиною сторін. Доведіть, що сума всіх 15 побудованих таким чином векторів дорівнює нулю.

3. Розв'яжіть рівняння $\frac{y^2}{3} + \frac{48}{y^2} = 10\left(\frac{y}{3} - \frac{4}{y}\right)$.

4. На дошці записані 5 чисел. Склавши їх попарно, отримали такі 10 сум: 0, 2, 4, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 15. Які числа були записані?

9 клас

1. Розв'яжіть нерівність $\frac{x^2 - 5|x| + 4}{x - 3} < 0$.

2. У змаганнях взяли участь три бігуни: Андрейчук, Петренко і Сидоренко, зайнявши три різні місця. Перед забігом перший глядач сказав, що першим буде Андрейчук. Другий глядач сказав, що Сидоренко не буде останнім. Третій глядач сказав, що Петренко не прибіжить першим. Після забігу виявилось, що лише один з глядачів вгадав, а два інші помилилися. У якому порядку фінішували бігуни?

3. Задані рівняння $ax^2 + x + 1 = 0$ та $x^2 + ax + 1 = 0$. знайдіть всі a , при яких ці рівняння мають принаймні один спільний корінь.

4. Чи існує 1987-кутник, сторони якого послідовно дорівнюють 1, 2, 3, ..., 1987, і в який можна вписати коло?

10 клас

1. Знайдіть найбільше та найменше значення інтеграла $\int_a^b \cos^2 x dx$, ($a, b \in R$).

2. Розв'яжіть рівняння

$$11\sin^2 7x - 3\sin 7x \cdot \cos 7x + 5\cos^2 7x = a - b.$$

3. Доведіть, що у кожній трикутній піраміді є вершина, що з ребер, які виходять з неї, можна побудувати трикутник.

4. У квадраті зі стороною 1 довільно розташовані 126 точок. Доведіть, що деякі 6 із них лежать всередині круга з радіусом $\frac{1}{7}$.

1988 рік

6 клас

1. Івась їхав в автобусі і побачив на кілометровому стовпі двоцифрове число. Через годину він побачив на кілометровому стовпі трицифрове число, перша цифра якого така, як друга цифра годину тому, друга цифра нуль, а третя – та сама, що й перша годину тому. Ще через дві години він побачив трицифрове число, яке відрізнялося від попереднього тільки другою цифрою. Яка швидкість автобуса?

2. Після зниження ціни на іграшку, яка коштувала 50 коп., магазин виручив за продані іграшки 31 крб. 93 коп. На скільки процентів знижено ціну?

3. Знайдіть x із рівняння

$$10101 \cdot \left(\frac{5}{111111} - \frac{4}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37} + \frac{5}{2002x} \right) = \frac{7}{22}.$$

4. Через точку M проведено чотири прямі так, що $AM \perp MD$, $ME \perp MC$, і проведена пряма AC , причому $AM = MC$. AC перетинає MD в точці D , а ME – в точці E . Довести, що $\triangle AME = \triangle CMD$.

7 клас

1. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) на катеті AC як на діаметрі побудовано коло, яке перетинає гіпотенузу AB в точці K . Через точку K проведено дотичну до кола, яка перетинає катет BC у точці D . Доведіть, що трикутник BDK рівнобедрений.

2. Знайдіть усі пари цілих невід'ємних чисел x , y , які задовольняють рівняння $xy - 3x + 5y = 25$.

3. Доведіть, що для всіх натуральних чисел a число

$$\frac{a^5}{120} + \frac{a^4}{12} + \frac{7a^3}{24} + \frac{5a^2}{12} + \frac{a}{5}$$

також натуральне.

4. Доведіть, що різниця основ трапеції менша суми бічних сторін, а сума основ – менша суми діагоналей.

8 клас

1. Не розв'язуючи рівняння $ax^2 + x - 2 = 0$, визначити, при яких a різниця коренів дорівнює 3.

2. У гострокутному трикутнику ABC висота CK ділить сторону AB у відношенні 2:1, рахуючи від точки A , а висота BD – сторону AC у відношенні 3:1, рахуючи також від точки A . Визначити сторону BC , якщо $AB = a$.

3. a, b, c – цілі числа, $a + b + c$ ділиться на 6. Довести, що й $a^5 + b^3 + c$ ділиться на 6.

4. Побудувати графік функції $y = |x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x|$.

9 клас

1. У рівнобедреному трикутнику ABC довжина основи AB дорівнює 2 см, висота – 2 см. Пряма, перпендикулярна до AB і віддалена від точки A на x см, відтинає від трикутника ABC деяку фігуру. Знайти площу цієї фігури як функцію від x . Намалювати графік цієї функції.

2. Розв'язати рівняння $\frac{4 \sin x}{(x - 3)^2} + |\sin x| = 0$.

3. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ сторони AB та CD паралельні, $AB + BC = CD + DA$. Довести, що $BC = AD$.

4. Розв'язати нерівність

$$\operatorname{tg}^2 x_1 + \operatorname{ctg}^2 x_1 + \operatorname{tg}^2 x_2 + \operatorname{ctg}^2 x_2 + \dots + \operatorname{tg}^2 x_{994} + \operatorname{ctg}^2 x_{994} \leq 1988.$$

10 клас

1. Задача 1, 10 клас, 1987 рік.

2. Три учні склали по 2 екзамени. A заявив, що він одержав дві четвірки, B – що п'ятірку і трійку, B – що трійку і четвірку. Але кожен з них повідомив не свої оцінки, а одного з двох інших. Визначити оцінки кожного, якщо один з учнів назве правильно одну зі своїх оцінок. Котрий з них повинен це зробити?

3. Чи може сума відстаней від певної точки в трикутнику до його вершин бути меншою від півпериметра цього трикутника?

4. Для яких дійсних значень параметра a рівняння $\sqrt{x-2} + \sqrt{8-2x} = a$ має розв'язок?

1989 рік

6 клас

1. Два учні, високий і низенький, вийшли одночасно з одного і того ж дому в одну школу. В одного крок був на 20% коротший, ніж у другого, але він встигав за цей час зробити на 20% кроків більше, ніж другий. Хто з них раніше прийшов до школи?

2. Чи може $5^n + 1$ ділитись на $5^k - 1$, якщо n, k – натуральні числа?

3. Знайти значення виразу $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1988 \cdot 1989}$.

4. В чемпіонаті країни з футболу беруть участь 16 команд, кожна з яких має свій стадіон. Усі команди повинні зіграти між собою, причому в кожному турі відбуваються всі 8 ігор. Чи можна скласти розклад турів так, щоб кожна команда чергувала ігри вдома та на виїзді?

7 клас

1. Дано коло, точка A на колі і точка K всередині кола. Знайти на колі такі точки B та C , щоб точка K була точкою перетину бісектрис трикутника ABC .

2. Довести, що коли дві останні цифри цілого числа непарні, то це число не може бути точним квадратом.

3. Розв'язати систему рівнянь:
$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x^2 - xy + y^2 = x^3. \end{cases}$$

4. Довести, що для довільних дійсних чисел виконується нерівність $x^2 - 2xy + 1989y^2 \geq 0$.

8 клас

1. Довести, що коли чотирикутники $ACPH$, $AMBE$, $AHBT$, $BKXM$, $CKXP$ – паралелограми, вершини яких перелічені в

одному напрямку, то ламана $ABTEA$ не має самоперетинів і обмежує паралелограм.

2. Нехай a, b, c – додатні числа. Довести, що

$$\frac{a+b}{a^2+b^2} + \frac{b+c}{b^2+c^2} + \frac{a+c}{a^2+c^2} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

3. Довжини a та b двох сторін трикутника задовольняють умову $a \geq b$, а довжини відповідних висот дорівнюють H_a та H_b . Довести, що $a + H_a \geq b + H_b$. При якій умові досягається рівність?

4. Знайти найменше значення виразу

$$\sqrt{x^2 + (1 - y^2)} + \sqrt{y^2 + (1 - x^2)}.$$

9 клас

1. Задача 4, 8 клас.

2. Серед чотирикутників із довжинами діагоналей 2 та 4 і кутом 45° між ними знайти чотирикутник із найменшим периметром (досить вказати, в якому відношенні його діагоналі діляться точкою перетину).

3. На сторонах AB та AC довільного трикутника ABC для кожного натурального n вибираються точки K_n та M_n так, що

$$AK_n = \frac{AB}{n}, \quad AM_n = \frac{AC}{n+1}.$$

Довести, що всі прямі K_nM_n перетинаються в одній точці.

4. Довести, що коли x, y – додатні числа, які задовольняють рівняння $x^3 + y^3 = x - y$, то $x^2 + y^2 < 1$.

10 клас

1. Задача 2, 8 клас.

2. Довести, що коли діагоналі вписаного опуклого чотирикутника перпендикулярні, то середини його сторін і основи перпендикулярів, опущених з точки перетину діагоналей на сторони, лежать на одному колі.

3. Числа a, b, c лежать на інтервалі $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ і задовольняють

рівності $\cos a = a$, $\sin \cos b = b$, $\cos \sin c = c$. Розташувати ці числа у порядку зростання.

4. На території країни, яка має форму квадрата зі стороною 1000 км, знаходиться 51 місто. Країна має можливості для прокладання 11000 км шосейних доріг. Чи зможе вона з'єднати сіткою шосейних доріг всі свої міста?

1990 рік

7 клас

1. Як двома відрами місткістю 9 л та 4 л набрати з річки 6 л води?

2. Дві вантажівки одночасно виїхали із пункту A в пункт B . Перша з них половину затраченого часу їхала зі швидкістю 50 км/год, а другу половину – зі швидкістю 40 км/год. Друга – половину шляху зі швидкістю 50 км/год, а половину – зі швидкістю 40 км/год. Котра з них швидше прибула у пункт B ?

3. Доведіть, що серед довільних 1990 цілих чисел знайдуться два, різниця яких ділиться на 1989.

4. На столі стоять три однакові ящики. В одному з них 2 чорні кульки, в другому – 2 білі, в третьому – 1 чорна та 1 біла. На ящиках про це зроблено відповідні надписи, але відомо, що жоден з них не відповідає істині. Як, вийнявши лише одну кульку, встановити, де які кульки знаходяться?

5. Доведіть, що для простих чисел $p > 3$ число $p^2 - 1$ ділиться на 24.

8 клас

1. Всередині опуклого чотирикутника знайти точку, сума відстаней від якої до вершин чотирикутника є найменшою.

2. Дев'ять грибників зібрали 220 грибів, причому кожен два з них зібрали різну кількість грибів. Довести, що знайдуться п'ятеро грибників, які зібрали разом грибів не більше, ніж четверо інших.

3. Доведіть, що відрізок, який з'єднує вершину прямого кута з центром квадрата, побудованого зовні на гіпотенузі, ділить прямий кут пополам. Виразіть довжину цього відрізка через катети.

4. Знайдіть суму

$$\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1989+\sqrt{1990}}}.$$

5. Розв'яжіть у цілих числах рівняння $x^3 - 3y^3 - 9z^3 = 0$.

9 клас

1. 48 ковалів повинні підкувати 60 коней. Який найменший час вони затратять на роботу, якщо кожен коваль витрачає на одну підкову 5 хвилин. (Врахуйте, що кінь стояти на двох ногах не може).

2. Розв'яжіть рівняння $(x+1)^4 + (x-3)^4 = 32$.

3. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, в якого центри вписаного та описаного кіл симетричні відносно основи трикутника.

4. Дано 1990 додатних чисел. Відомо, що добуток довільних 19 із них більший за одиницю. Доведіть, що і добуток довільних 90 із них теж більший за одиницю.

5. Доведіть, що якщо a, b – катети, c – гіпотенуза прямокутного трикутника, то $c \geq \frac{a+b}{\sqrt{2}}$.

10 клас

1. Вся площина розмальована у два кольори. Доведіть, що знайдуться дві точки одного кольору, розташовані на відстані 1 м одна від одної.

2. Доведіть, що якщо p та n – прості числа, більші трьох, то $p^2 - n^2$ ділиться на 24.

3. У трикутнику дві медіани m_a та m_b перпендикулярні. Обчислити площу цього трикутника.

4. Розкладіть на множники вираз $x^4 + 1990x^2 + 1989x + 1990$.

5. Чи існує трикутник із висотами 24, 40 та 60 см?

11 клас

1. Вся площина розмальована у два кольори. Доведіть, що знайдуться дві точки різного кольору, розташовані на відстані 1 м одна від одної.

2. Розв'яжіть систему рівнянь:
$$\begin{cases} y^2 = x^3 - 3x^2 + 2x, \\ x^2 = y^3 - 3y^2 + 2y. \end{cases}$$

3. Середини сторін двох опуклих чотирикутників попарно співпадають. Доведіть, що площі цих чотирикутників рівні.

4. Розв'яжіть рівняння $\sin^2 x + \frac{x}{2} + \frac{1}{2x} = \cos^2 3x$.

5. На площині дано 1990 точок і коло радіуса 1. Доведіть, що на колі знайдеться точка, сума відстаней від якої до заданих точок не менша за 1990.

1991 рік

8 клас

1. Бактерії розмножуються поділом. За одну секунду із однієї утворюються дві. Одна бактерія разом зі своїм потомством заповнює пробірку за одну годину. За який час заповняться цю пробірку дві бактерії?

2. Числа 1, 2, 3, ... записані підряд. Яка цифра стоїть на 1991-му місці?

3. Сума кількох цілих чисел ділиться на 6. Доведіть, що і сума їх кубів ділиться на 6.

4. У квадраті $ABCD$ точки M та K лежать відповідно на сторонах AB та BC , причому $AM : MB = 1 : 11$, $BK : KC = 181 : 1991$. Доведіть, що $AK \perp MD$.

5. У трикутнику центри вписаного та описаного кіл співпадають. Доведіть, що такий трикутник правильний.

9 клас

1. Їхав дід на ярмарку і віз гирю вагою 40 кг. По дорозі гиря впала і розбилася на 4 частини. Визначте вагу цих частин, якщо відомо, що ними можна зважити будь-яке ціле число кілограмів від одного до сорока.

2. Чи є число $1988 \cdot 1989 \cdot 1990 \cdot 1991 + 1$ точним квадратом?

3. Розв'яжіть рівняння $x^4 + 7x^2 - 12x + 5 = 0$.

4. Дано коло і точка M поза ним. Провести через M пряму, на якій би колом відтиналась хорда довжини a .

5. Чи можуть середини висот трикутника лежати на одній прямій?

10 клас

1. На шкільному математичному вечорі Незнайко заявив, що довів нову теорему: «Якщо в шестикутнику, вписаному в коло, всі кути рівні, то такий шестикутник правильний». «Подумаєш, у шестикутнику, – втрутився Невмійко. – Я можу довести аналогічну теорему навіть для 1991-кутника». Доведіть або спростуйте їхні твердження.

2. У трикутнику дві сторони дорівнюють a та b . Бісектриси, проведені до цих сторін, перетинаються під кутом 15° . Обчислити площу трикутника.

3. Яку найбільшу кількість прямих кутів може мати опуклий 1991-кутник?

4. Розв'яжіть рівняння $3x^2 + 2\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2 - 15x$.

5. Доведіть, що при $a = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2} + \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{2}}{8}}$ значення виразу $A = a^2 + \sqrt{a^4 + a + 1}$ дорівнює $\sqrt{2}$.

11 клас

1. При яких x із чисел $\lg 2$, $\lg(2^x - 1)$, $\lg(2^x + 1)$ можна утворити арифметичну прогресію?

2. Знайдіть дві останні цифри числа 2^{1991} .

3. Обчисліть $\int_2^4 \sqrt{16 - x^2} dx$.

4. Чи може квадрат бути розгорткою деякої піраміди?

5. Сказав Кощій Безсмертний богатиреві: «Завтра я задумаю вектор (x, y, z) , всі координати якого є цифрами. Ти маєш право назвати довільний вектор (a, b, c) . Але, коли я оголошу їх скалярний добуток, ти повинен одразу сказати, який вектор я задумав. Інакше – смерть!» Допоможіть богатиреві врятуватися.

1992 рік

8 клас

1. Знайдіть закономірність у побудові послідовності: 111, 213, 141, 516, 171,...
2. Розв'яжіть у натуральних числах рівняння $xу \cdot \overline{xу} = 1992$.
3. Обчисліть суму всіх натуральних чисел від 1 до 1992.
4. Всередині квадрата зі стороною 44 розміщено 1992 точки. Доведіть, що знайдуться дві точки, відстань між якими не перевищує $\sqrt{2}$.
5. З якого найменшого числа прямокутних трикутників можна скласти трапецію?

9 клас

1. По великому колесі радіуса 20 котиться мале колесо радіуса 6. У велике колесо вбито цвях. Скільки отворів зробить він у малому колесі?
2. На сторонах AB та BC гострокутного трикутника ABC як на діаметрах побудовані кола. Доведіть, що вони перетинаються на стороні AC .
3. Розв'яжіть у натуральних числах рівняння $1992 - xy^2 = 10x^2y$.
4. Обчисліть $19911991 \cdot 199219921992 - 19921992 \cdot 199119911991$.
5. Мишка гризе куб, складений із 27-ми одиничних кубиків. З'ївши один кубик, вона переходить до сусіднього з ним через спільну грань. Чи може мишка з'їсти весь куб, крім центрального кубика?

10 клас

1. Чи існує замкнена крива, всі точки якої віддалені від заданої точки на 1992, яка не є колом?
2. Всередині трикутника є дві точки, віддалені від сторін трикутника відповідно на 1, 3, 15 та 4, 5, 11. Знайдіть радіус кола, вписаного в цей трикутник.

3. Доведіть, що якщо a, b, c – сторони трикутника, то рівняння $b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$ не має дійсних коренів.

4. Обчисліть без таблиць і обчислювальної техніки $4\sin 18^\circ \cos 36^\circ$.

5. Перевірте, чи є число, записане нулями та 1992-ма одиницями, точним квадратом.

11 клас

1. Чи існує чотирикутна піраміда, в якій дві протилежні грані перпендикулярні до площини основи?

2. Нехай M – центр кола, описаного навколо трикутника ABC . На відрізках AM , BM , CM як на діаметрах побудовані кола, які попарно перетинаються в точках A_1, B_1, C_1 , відмінних від M . Знайдіть площу трикутника A_1, B_1, C_1 , якщо площа трикутника ABC дорівнює 1992.

3. Доведіть, що на колі $x^2 + y^2 = 1$ є нескінчене число точок, обидві координати яких раціональні.

4. У записі числа використано 1992 одиниці, а решта цифр – нулі. Чи може таке число бути точним квадратом?

5. Спростіть вираз $\sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}}$.

1993 рік

8 клас

1. Розв'язати у цілих числах рівняння $x^2 + 2x = y^2 - 2y + 1993$.

2. Довести нерівність $a^3 + 2b^3 \geq 3ab^2$, якщо $a \geq 0$, $b \geq 0$.

3. Через точку M всередині кута провести пряму так, щоб відрізок, який відтинається на ній сторонами кута, ділився точкою M пополам.

4. Стальну плитку розмірами 19×93 обвели олівцем на листку паперу. Знайти центр одержаного прямокутника, користуючись лише олівцем і даною плиткою.

5. Одна людина кожного місяця записувала свої прибутки і видатки. Чи може бути так, що за кожні 5 місяців підряд сума

видатків перевищувала суму прибутків, а за рік в цілому сума прибутків перевищила суму видатків?

9 клас

1. Знайдіть многочлен $p(x)$ найменшого степеня з цілими коефіцієнтами, для якого $p(0)=19$, $p(1)=93$, $p(2)=1993$.

2. Доведіть нерівність $a + 2\sqrt{b} \geq 3\sqrt[3]{ab}$, якщо $a \geq 0$, $b \geq 0$.

3. Всередині трикутника ABC знайдіть точку, з якої всі сторони трикутника видно під кутами 120° .

4. Доведіть, що пряма, яка з'єднує основи двох висот гострокутного трикутника, відтинає подібний йому трикутник.

5. Чи можна на площині розмістити 1993 кола однакового радіуса так, щоб кожне з них дотикалося до трьох інших кіл?

10 клас

1. Яке найменше натуральне число після закреслювання однієї чи кількох перших цифр зменшується у 1993 рази?

2. Сума кількох чисел дорівнює 1. Чи може сума їх кубів бути більшою за 1, якщо кожне з чисел менше 1?

3. У колі проведено два радіуси. Побудувати хорду, яка ділиться ними на три рівні частини.

4. Три кола радіуса R попарно дотикаються одне одного. Знайдіть радіус кола, яке дотикається до трьох заданих кіл.

5. Доведіть, що шашкову дошку 10×10 не можна заповнити 25-ма плитками 4×1 .

11 клас

1. Розв'яжіть рівняння $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 4$.

2. Визначте, для яких a рівняння $x^4 + ax^2 = 1993$ та $x^3 + ax = 1993$ мають спільний корінь.

3. Довжини сторін трикутника утворюють арифметичну прогресію. Доведіть, що середини найбільшої та найменшої сторін, вершина кута між ними і центр кола, вписаного в трикутник, лежать на одному колі.

4. Кожна з чотирьох куль радіуса R дотикається до трьох інших. Знайдіть радіус кулі, яка дотикається до всіх чотирьох заданих куль.

5. На площині лежать три шайби: A, B, C . Хокеїст б'є по одній з них так, щоб вона пройшла між двома іншими. Чи можуть після 1993 ударів, виконаних по шайбах у довільному порядку, всі шайби опинитися на своїх початкових місцях?

1994 рік

7 клас

1. Відрізки AB та CD , які не лежать на одній прямій, перетинаються в точці E . Доведіть, що відрізок AC не перетинає пряму BD .

2. У записі натурального числа K використовуються лише одиниці та двійки, причому одиниць на одну більше, ніж двійок. Доведіть, що число $K + 1994$ складене.

3. У виразі $\frac{6*5*4*3*2*1}{8*7} = 9$ розставте замість зірочок знаки „+” та „-” так, щоб одержати правильну рівність. Скільки розв'язків має дана задача?

4. Знайдіть всі пари натуральних чисел x та y , для яких $19x + 94y = 1994$.

5. Є чотири пакети різної маси і терези з двома шальками без гир. За допомогою п'яти зважувань розмістити пакети у порядку зростання їх мас.

8 клас

1. У трикутнику ABC проведено медіани AA_1 та BB_1 які перетинаються в точці M . У трикутнику AMB проведено середню лінію PK . Чи правильно, що чотирикутник A_1B_1PK – паралелограм?

2. Дано рівнобедрений трикутник ABC ($AC = BC$). Коло K з центром у точці O дотикається до прямої BC в точці V і до продовження сторони AC за точку C в точці D . Довести, що

точка перетину прямих AB і DO лежить на колі K .

3. 1994 карбованці необхідно виплатити купюрами по 3 та 5 карбованців. Скількома способами це можна зробити?

4. Чи можна квадрат розрізати: а) на 1993; б) на 1994 менші квадрати?

5. Довести нерівність $(a+b) \cdot (a^3 + b^3) \leq (a^4 + b^4)$

9 клас

1. Розв'язати систему рівнянь:
$$\begin{cases} xy + x + y = 80, \\ yz + y + z = 80, \\ zx + z + x = 80. \end{cases}$$

2. Чи можна занумерувати ребра куба натуральними числами від 1 до 12, використовуючи кожне число лише один раз, так, щоб суми номерів ребер, які сходяться в кожній вершині, були однаковими?

3. Доведіть, що не існує натуральних чисел m та n , які задовольняють рівність $\sqrt{m} + \sqrt{n} = \sqrt{1994}$.

4. Знайдіть всі функції $f: R \rightarrow R$, для яких при будь-яких дійсних x, y виконується рівність $f(x - f(y)) = 1 - x - y$.

5. Нехай коло Γ описане навколо трикутника ABC , пряма l дотикається Γ в точці A . На стороні AB позначено точку D , на стороні AC – точку E так, що $AD = 6$ см, $AE = 5$ см, $EC = 7$ см, і пряма DE паралельна до прямої l . Знайти довжину відрізка BD .

10 клас

1. Доведіть, що остача від ділення простого числа на 30 буде або простим числом, або одиницею.

2. Знайдіть всі функції $f: R \rightarrow R$, для яких при будь-яких дійсних x виконується рівність $x(f(x) + f(-x) + 2) + 2f(-x) = 0$.

3. Відомо, що $0 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq e$, $a + b + c + d + e = 100$. Яке найменше можливе значення виразу $a + c + e$?

4. В країні M міст ($M \geq 3$). Деякі із міст сполучені шляхом, кожен з яких з'єднує рівно два міста. Відомо, що коли два міста не сполучені шляхом, то знайдеться третє місто, сполучене шляхом із

кожним із цих двох. Якою може бути найменша кількість шляхів у цій країні?

5. Точки M , N , K позначено на сторонах AB , BC , CA гострокутного трикутника так, що $\angle AMK = \angle BMN = \angle ACB$. Точку перетину відрізків AN та BK позначено через L . Доведіть, що точки C , K , L , N лежать на одному колі.

11 клас

1. Квадрат вписано в круг. На сторонах квадрата як на діаметрах всередині квадрата побудовано півкруги. Чотири попарних перетини цих півкругів утворюють фігуру «квітка». Доведіть, що загальна площа «квітки» дорівнює площі частини описаного круга, що лежить поза квадратом.

2. Переставивши в деякому порядку числа $1, 2, \dots, 1994$, одержали послідовність $a_1, a_2, \dots, a_{1994}$. Доведіть, що найбільше з чисел $(n-1) \cdot a_n$, $1 \leq n \leq 1994$, не менше за 997^2 .

3. Знайдіть всі функції $f: R \rightarrow R$, які при будь-яких дійсних x, y задовольняють рівність $f(x^2 + y) = f(x) + f(y^2)$.

4. Трикутник $A_1B_1C_1$, є у просторі ортогональною проекцією правильного трикутника ABC із довжиною сторони 1. Відомо, що $A_1B_1 < \frac{\sqrt{3}}{2}$, $A_1C_1 < \frac{1}{2}$. Доведіть, що кут між площинами ABC та $A_1B_1C_1$, більший за 60° .

5. Для всіх дійсних x доведіть нерівність

$$x^2 \sin x + x \cos x + x^2 + \frac{1}{2} > 0.$$

1995 рік

7 клас

1. Із 24 бочок однакового об'єму 5 заповнені водою повністю, 11 – наполовину, 8 – порожні. Розділити їх між трьома особами так, щоб кожній з них дісталася по 8 бочок і однакова кількість води (переливання води не допускається).

2. Білка за 20 хв. приносить горіх у гніздо. Яку відстань вона при цьому пробігає, якщо без горіха білка біжить зі швидкістю 5 м/с, а з горіхом – 3 м/с?

3. Два села розташовані з однієї сторони від річки. Де потрібно встановити міст, щоб сума відстаней від центрів обох сіл до моста була найменшою? (Мимо сіл річка протікає по прямій лінії).

4. Визначте, якою цифрою закінчується число 2^{1995} .

5. Обчисліть суму $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1994 \cdot 1995} + \frac{1}{1995 \cdot 1}$.

8 клас

1. У трикутнику ABC проведена висота AH . O – центр описаного навколо трикутника кола. Довести, що

$$\angle OAH = |\angle ABC - \angle BCA|.$$

2. Довести, що число $\sqrt{\sqrt{19} - \sqrt{3 - 8\sqrt{35 - 8\sqrt{19}}}}$ ціле.

3. Довести, що для довільних дійсних a та b виконується нерівність $\frac{a^4 + a^2b^2 + b^4}{3} \geq \frac{a^3b + ab^3}{2}$.

4. Надруковано мільйон квитків з номерами від 000000 до 999999. Квиток \overline{abcdef} вважається щасливим, якщо $af + be + cd = 100$. Довести, що сума номерів усіх щасливих квитків ділиться на 1001.

9 клас

1. Довести, що не існує чотирьох різних додатних чисел a, b, c, d , що $a + b = c + d$, $a^3 + b^3 = c^3 + d^3$.

2. Деяка комісія проводила свої засідання 40 разів. Кожного разу в засіданнях брали участь 10 осіб, причому будь-які двоє членів комісії засідали спільно не більше одного разу. Довести, що до комісії входить не менше 60 осіб.

3. Знайти всі трійки цілих чисел, для яких

$$k^2 + m^2 + n^2 - 2k + 4m - 6n = -11.$$

4. У трикутнику ABC кут ABC дорівнює 120° . H – точка перетину висот трикутника, O – центр описаного кола, M – середина дуги ACB цього кола. Довести, що $HM = MO$.

5. a, b, c, A, B, C – такі додатні числа, що рівняння $ax^2 - bx + c = 0$ та $Ax^2 - Bx + C = 0$ мають різні корені. Довести, що для всіх t , які лежать між коренями першого рівняння, і T , які лежать між коренями другого рівняння, виконується нерівність

$$(at + AT) \cdot \left(\frac{c}{t} + \frac{C}{T} \right) < \left(\frac{b+B}{2} \right)^2.$$

10 клас

1. Довести, що для всіх натуральних $n > 3$ десятковий запис числа n^2 містить принаймні одну парну цифру.

2. Довести, що рівняння $x^2 - 5x - 4\sqrt{x} + 13 = 0$ не має розв'язків у дійсних числах.

3. Точку O , яка лежить всередині правильного $2n$ -кутника з'єднано з його вершинами. Одержані трикутники розфарбовано через один червоним і синім кольором. Довести, що сума площ червоних трикутників дорівнює сумі площ синіх трикутників.

4. На площині задано 1995 точок: $A_1, A_2, \dots, A_{1995}$. Перетворення S будується в такий спосіб: спочатку робиться симетрія відносно A_1 , далі одержана точка симетризується відносно A_2 , і так далі аж до симетрії відносно A_{1995} . Доведіть, що існує рівно одна точка, яка не змінюється цим перетворенням.

5. Таблиця розмірами 1995×1995 заповнена різними натуральними числами так, що в кожному рядку числа зліва направо монотонно зростають. У кожному стовпчику числа переставили так, що вони згори вниз монотонно спадають. Довести, що при цьому у кожному рядку числа зліва направо, як і раніше, зростають.

11 клас

1. Переріз правильної трикутної піраміди зі стороною основи a деякою площиною є квадратом зі стороною b . Знайти об'єм піраміди.

2. Про дійсне число K та послідовність дійсних чисел a_0, a_1, a_2, \dots відомо, що $a_0 = 1$, $a_{1995} = 100$, $a_1 \cdot a_2 > 0$, $a_{n-1} \cdot a_{n+1} = K \cdot a_n$ для кожного n . Знайти K .

3. Чи існує многочлен $p(x)$ з дійсними коефіцієнтами такий, що для всіх дійсних x виконується нерівність $p(x) \geq 1995p'(x)$?

4. Функція $f(x)$ визначена на $N \cup \{0\}$ і набуває значень на цій же множині. Для всіх n виконується рівність $f(f(n)) + f(n) = 2n + 3$. Обчислити $f(1995)$.

5. У деякому місті є кілька (більше 1) автобусних маршрутів. Кожні два з них мають рівно одну спільну зупинку. Кожні дві зупинки з'єднує рівно один маршрут. Знайти: а) кількість маршрутів, якщо на кожному з них рівно 3 зупинки; б) кількість зупинок на кожному з них, якщо маршрутів 13 і на кожному з них не менше трьох зупинок.

1996 рік

7 клас

1. Намалюйте на площині три прямокутники таким чином, щоб їх контури розділили площину на $n > 20$ частин. Вкажіть, якого максимального значення n вам вдалося досягнути.

2. Сторони прямокутника дорівнюють a та b ($a \neq b$). Його розрізали на квадрат і ще один прямокутник. Якщо останній не є квадратом, то його теж розрізують вказаним способом, і так далі. Доведіть, що, якими б не були натуральні числа a та b , процес розрізування закінчиться через скінченне число кроків.

3. Визначте, яке число стоїть у послідовності 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, ... на 1996-му місці.

4. Намалюйте графік функції $y = \max\{|x|, 1 - |x|\}$, де $\max\{a, b\}$ означає найбільше з чисел a та b .

5. Яких семицифрових чисел більше: тих, у десятковому записі яких використовується цифра 7, чи тих, в яких вона відсутня?

8 клас

1. Дано трикутник зі сторонами a, b, c , які задовольняють співвідношення $\frac{b}{a+c} = \frac{a}{b+c}$. Визначити кути цього трикутника, якщо один з них дорівнює 80° .
2. Доведіть, що таблицю розмірами 3×3 не можна заповнити числами $-1996, 0, 1996$ так, щоб усі 8 сум по горизонталях, вертикалях та діагоналях таблиці були різними.
3. Визначити знак числа $A = \sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{4 - \sqrt{7}} - \sqrt{2}$.
4. Перевірте, чи є число $1995^2 + 1996^2 + (1995 \cdot 1996)^2$ точним квадратом.
5. Доведіть, що центри квадратів, побудованих зовні на сторонах довільного паралелограма, є вершинами квадрата.

9 клас

1. Знайдіть всі прості числа p , для яких $2^p + p^2$ теж є простим.
2. Відомо, що $(a + b + c)c < 0$. Довести, що $b^2 > 4ac$.
3. Гра починається з числа 9. За один хід дозволяється додати до наявного числа довільне менше від нього натуральне число. Виграє той, хто одержить 1996. Два учні роблять ходи по чергово. У котрого з них є виграшна стратегія?
4. SM – медіана трикутника ABC , R – радіус описаного навколо нього кола. Доведіть, або спростуйте таке твердження: трикутник ABC прямокутний тоді і тільки тоді, коли $SM = R$.
5. Пряма розмальована у два кольори. Доведіть, що існує відрізок цієї прямої, середина і кінці якого мають один колір.

10 клас

1. На дошці записане число 10. Двоє роблять ходи по черзі. За один хід дозволяється приписати справа від наявного числа або 10 або 1010. Виграє той, хто першим запише число, яке ділиться на 1996, У котрого із гравців є виграшна стратегія?

2. Розв'яжіть у цілих числах рівняння $x + y = 1996$.

3. Сторони прямокутника дорівнюють a та b ($a \neq b$). Його розрізали на квадрат і ще один прямокутник. Якщо останній не є квадратом, то його теж розрізують вказаним способом, і так далі. Доведіть, що, якими б не були раціональні додатні числа a та b , процес розрізування закінчиться через скінченне число кроків.

4. Знайдіть усі функції $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, для яких при довільних дійсних x, y виконується рівність

$$f(x + y) = f(x) \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) - f\left(y - \frac{\pi}{2}\right) \sin x.$$

5. На стороні BC трикутника ABC довільно вибрали точку M . Проведіть через M пряму, яка ділить площу ABC пополам.

11 клас

1. Задано шестицифрове число $A = \overline{abcdef}$, причому $\overline{abc} - \overline{def}$ ділиться на 11. Доведіть, що A ділиться на 11.

2. Прямокутник зі сторонами a та b довільним чином розрізали на менші прямокутники, сторони яких паралельні до сторін даного прямокутника. Довжини сторін одержаних прямокутників виражаються цілими числами, і в кожного з них хоча б один із вимірів виражається парним числом. Доведіть, що серед чисел a та b принаймні одне парне.

3. Обчисліть $\cos \frac{2\pi}{11} + \cos \frac{4\pi}{11} + \cos \frac{6\pi}{11} + \cos \frac{8\pi}{11} + \cos \frac{10\pi}{11}$.

4. На дошці спочатку було написане число 1996. Два учні роблять ходи по чергові. За один хід дозволяється замінити написане число a на $a - t$, де t – один із дільників числа a . Програє той, хто одержить 0. У кого з них є вигрешна стратегія?

5. Задано дві послідовності: $x_n = \lfloor n\sqrt{2} \rfloor$, та $y_n = \lfloor n(2 + \sqrt{2}) \rfloor$, де $\lfloor a \rfloor$ – ціла частина a , тобто найбільше ціле число, яке не перевищує a . Доведіть, що кожне натуральне число є елементом однієї і тільки однієї із даних послідовностей.

1997 рік

7 клас

1. Учень Забудько хвалиться, що йому вдалося розмалювати клітинки таблиці 1996×1997 таким чином, що у кожному рядку чорних клітин було більше, ніж білих, а в кожному стовпчику – білих більше, ніж чорних. Але він забув, як це зробити. Допоможіть Забудькові.

2. На листку паперу намалювали правильний трикутник і покрили його двома вирізаними правильними трикутниками різних розмірів. Доведіть, що для покриття вистачило б і одного з цих трикутників.

3. Два комбайни скошили деяку площу за 8 годин. Наступного дня половину такої ж площі косив перший комбайн, а другу половину – обидва разом, на що пішло 10 годин. За який час перший комбайн скошив би дану площу сам?

4. Автобусні квитки мають номери від 000000 до 999999. Квиток вважається щасливим, якщо сума перших трьох цифр дорівнює сумі останніх трьох цифр. Доведіть, що кількість щасливих квитків парна.

8 клас

1. Знайдіть всі прості числа a, b, c , для яких $abc < ab + bc + ca$.

2. Обчислити $\frac{a^4 + a^3 + a^2 + 9}{a^5 - a^2 - a + 6}$, якщо $a^3 + a - 1 = 0$.

3. Таблицю 3×3 заповнили натуральними числами так, що всі 8 сум по горизонталях, вертикалях та діагоналях таблиці дорівнюють M . Доведіть, що M ділиться на 3.

4. Точку M всередині квадрата з'єднали з його вершинами. Одержали 4 трикутники, один з яких рівнобедрений із кутом 150° . Визначити кути трьох інших трикутників.

5. На прямій відзначено 1997 різних точок. Доведіть, що не існує двох сусідніх відзначених точок, для яких суми відстаней від них до решти точок були б однаковими.

9 клас

1. Розв'яжіть нерівність $\sqrt{3+x} + \sqrt[4]{9-x} > \sqrt[6]{27-x^2}$.
2. Числа 1, 2, ..., 1997 переставили у довільному порядку і записали у вигляді послідовності $a_1, a_2, \dots, a_{1997}$. Доведіть, що число $(a_1 - 1) \cdot (a_2 - 1) \dots (a_{1997} - 1997)$ парне.
3. В ліс пішли 9 дівчаток та n хлопчиків. Разом вони зібрали $n^2 + 8n + 9$ грибів, причому всі зібрали грибів порівну. Скільки хлопчиків ішло до лісу?
4. Учень Незнайко вирішив намалювати опуклий 1997-кутник, всі кути якого виражаються цілим числом градусів. Допоможіть йому.
5. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) провели бісектрису CM . Відрізки ME та MN є відповідно бісектрисами трикутників BMC та AMC . Доведіть, що трикутник EMN рівнобедрений.

10 клас

1. Для додатних x, y доведіть нерівність
$$\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} \leq \frac{1}{xy}.$$
2. Чи можна таблицю 3×3 заповнити натуральними числами так, щоб усі 8 сум по горизонталях, вертикалях та діагоналях таблиці дорівнювали 1997?
3. На листку паперу намалювали квадрат зі стороною 19. Учень Недбайло примудрився зробити у ньому 97 плям. Доведіть, що всередині квадрата можна розмістити відрізок довжиною $10\sqrt{3}$ таким чином, щоб або обидва його кінці знаходилися на плямах, або обидва були поза ними.
4. Гра починається із числа 10. Два учні роблять ходи по чергову. За один хід дозволяється помножити наявне число на будь-яку цифру від 2 до 9 включно. Виграє той, хто першим запише число, більше 1997. Хто з них має виграшну стратегію?

5. Визначте кути прямокутного трикутника, в якому медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює середньому геометричному катетів.

11 клас

1. Побудуйте графік функції $y = \frac{1}{2} \left(\left| 1 + \sqrt{4 - x^2} \right| + \left| 1 - \sqrt{4 - x^2} \right| \right)$.

2. Знайдіть всі такі прості числа p , для яких число $p^2 + 11$ має рівно 6 дільників, включаючи і саме число.

3. У кубі з ребром 11 см розмістили 19 синіх та 97 жовтих куль різних радіусів. Доведіть, що всередині цього куба знайдуться дві точки на відстані 11 см одна від одної, що або обидві вони одного кольору, або обидві не належать жодній із куль.

4. Гра починається із числа 1997. Два учні роблять ходи почергово. За один хід дозволяється зменшити наявне число на ціле число, яке є степенем двійки і не перевищує записаного ($1 = 2^0$). Виграє той, хто отримає нуль. У котрого з гравців є виграшна стратегія?

5. Визначте кути прямокутного трикутника, в якому довжина медіани, проведеної до гіпотенузи, є середнім геометричним катетів.

1998 рік

7 клас

1. Дано два баки ємністю по 10 літрів із сольовим розчином 10%-ої і 15%-ої концентрації та посудини ємністю 3, 4 та 5 літрів. Як за допомогою переливань отримати 1 літр 12%-го сольового розчину?

2. Чи можна розмістити в таблиці розмірами 3×4 числа -1 та 1 таким чином, щоб усі суми чисел, що стоять в одному рядку або в одному стовпчику, були різними?

3. Скільки існує нескоротних дробів із чисельником 1997, які менші за $\frac{1}{1997}$ і більші за $\frac{1}{1998}$?

4. Дано смужку розмірами 1×17 , клітинки якої зліва направо пронумеровано послідовними натуральними числами від 1 до 17. Два учні грають у гру, по черзі роблячи свої ходи. За один хід треба закреслити одну довільну клітинку в смужці або деякі дві послідовні, серед яких ліва має парний номер. Переможеним вважається той гравець, котрий не зможе зробити хід. Хто може забезпечити собі вигравш: той, хто починає гру, чи його суперник? Вкажіть вигравшу стратегію для такого гравця.

8 клас

1. Сума трьох трицифрових натуральних чисел \overline{aab} , \overline{aba} , \overline{baa} (йдеться про десятковий запис) дорівнює 1998. Знайдіть всі трійки таких чисел (різним літерам не обов'язково відповідають різні цифри).

2. Чи буде число $11\dots155\dots56$, у десятковому записі якого 1998 одиниць, 1997 п'ятірок та одна шістка, точним квадратом?

3. Через точки дотику вписаного у трикутник кола зі сторонами цього трикутника провели прямі, що відповідно паралельні до бісектрис протилежних кутів трикутника. Доведіть, що проведені прямі перетинаються в одній точці.

4. На дошці розмірами 4×4 з клітинками два учні грають у гру. Вони ходять по черзі, і кожний гравець своїм ходом зафарбовує одну клітинку, яку можна зафарбувати лише один раз. Переможеним вважатиметься той гравець, після ходу якого утвориться квадрат розмірами 2×2 , що складатиметься із зафарбованих клітинок. Хто з гравців може забезпечити собі вигравш: той, хто ходить першим, чи його суперник?

9 клас

1. Доведіть, що число $11\dots1$, десятковий запис складається з 1998 одиниць, ділиться на 37.

2. Через точки дотику вписаного у трикутник кола зі сторонами цього трикутника провели прямі, що відповідно паралельні до бісектрис протилежних кутів трикутника. Доведіть, що проведені прямі перетинаються в одній точці.

3. Дано смужку розмірами 1×99 . Два учні грають у гру, по черзі роблячи свої ходи. За один хід треба закреслити одну довільну клітинку в смужці або ж деякі дві сусідні. Переможеним вважається той гравець, котрий не зможе зробити хід. Хто з гравців може забезпечити собі виграш: той, хто ходить першим, чи його суперник?

4. На координатній площині xOy позначили п'ять точок: $(-2, 8), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), \left(1, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{3}, 1\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{4}{5}\right)$. Яка найбільша кількість зі цих

точок може належати графіку рівняння $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1$?

5. З тричленом $ax^2 + bx + c$ дозволяється робити такі дії:
1) замінити в ньому x на $x - \lambda$, де λ – довільне дійсне число;
2) замінити його на тричлен $cx^2 + (b + 2c)x + (a + b + c)$. Чи можна таким чином із тричлена $x^2 - 3x - 4$ одержати тричлен $x^2 - 2x - 5$?

10 клас

1. Про цілі числа m та n відомо, що $\frac{n^2}{m+n}$ є цілим числом. Доведіть, що число $\frac{m^3}{m+n}$ також ціле.

2. Доведіть, що якщо в опуклому чотирикутнику суми синусів протилежних кутів рівні між собою, то цей чотирикутник – трапеція або паралелограм.

3. Знайдіть всі трійки дійсних чисел x, y, z , які задовольняють рівності $x = \sqrt{\frac{1-y}{1+y}}, y = \sqrt{\frac{z+1}{z}}, z = \sqrt{\frac{1}{1+x^2}}$.

4. У новосформованому десятому класі деякі учні виявилися вже знайомими між собою, деякі – ще ні. В перший день навчання кожна дівчина замріяно подивилася на кожного із знайомих хлопців, тоді як кожен хлопець замріяно подивився на кожну з незнайомих дівчат. Усього було кинуту 117 замріяних поглядів. Скільки у класі хлопців і дівчат, якщо всього не більше за 40 учнів?

5. Дві різні паралельні проекції просторової замкненої ламаної $ABCD$ на одну і ту ж саму площину є паралелограмами. Чи можна стверджувати, що $ABCD$ є паралелограмом?

11 клас

1. Дано невід'ємні дійсні числа x та y , які задовольняють умову $x - \sqrt{x} \leq y - \frac{1}{4} \leq x + \sqrt{x}$. Доведіть, що для цих чисел

виконуються також і нерівності $y - \sqrt{y} \leq x - \frac{1}{4} \leq y + \sqrt{y}$.

2. Розв'яжіть рівняння $\cos 12x = 5 \sin 3x + 9 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x$.

3. Відомо, що на сторонах опуклого чотирикутника $ABCD$ відповідно існують точки K і M такі, що кожна з прямих AK та CM розтинає чотирикутник $ABCD$ на дві частини рівної площі. Нехай P – точка перетину прямих KM і BD . Знайдіть відношення площі чотирикутника $ABCD$ до площі чотирикутника $ABCP$.

4. Про функцію f , яка визначена на множині всіх відмінних від нуля дійсних чисел і набуває дійсні значення, відомо, що рівняння $f(x) = 0,5$ має принаймні один дійсний корінь, та

$$f(x) - f(y) = f(x) f\left(\frac{1}{y}\right) - f(y) f\left(\frac{1}{x}\right)$$

для всіх $x \neq 0$, $y \neq 0$. Знайдіть $f(-1)$.

5. Прямокутник розмірами $2^{1998} \times 1998^2$ поділено на одиничні квадратики. Доведіть, що кількість способів, за допомогою яких прямокутник можна розбити на фігурки, кожна з яких або є прямокутником із трьох клітинок, або складеною із чотирьох клітинок, одна з яких має спільні сторони з трьома іншими, є непарним числом (способи, що відрізняються лише розташуванням фігурок, також вважаються різними).

1999 рік

7 клас

1. Дана смужка розмірами 1×16 , в першій клітинці якої записане число 34, а у восьмій клітинці – число 32. Розставте у решті клітинок цієї смужки цілі числа так, щоб їх сума в будь-яких трьох клітинках, що розташовані поспіль, дорівнювала 99.

2. Чи можна розділити 13 аркушів паперу між шістьма учнями так, щоб при цьому кожний аркуш виявився розрізаним не більше, ніж на три частини (або взагалі не розрізався), та кожний учень отримав однакову кількість шматочків паперу?

3. Зобразіть на координатній площині xOy множину всіх точок (x, y) , координати яких одночасно задовольняють дві рівності: $|x - y| = x + y$, $|x + y| = x - y$.

4. Чи завжди вдасться одинадцятьма вантажівками вантажопідйомністю 1,5 тони перевезти 13,5 тон вантажу, упакованого в ящики, якщо маса кожного ящика не перевищує 300 кілограмів?

8 клас

1. Розв'яжіть рівняння $\frac{(\sqrt{-x})^2 + \sqrt{x^2}}{2x^2} = 1999$.

2. Чи існують такі цілі числа m і n , що $(m + 1998)(m + 1999) + (m + 1999)(m + 2000) + (m + 1998)(m + 2000) = n^2$?

3. Дано трапецію $ABCD$ з основами AD і BC . Відомо, що бісектриса кута ABC перетинає середню лінію цієї трапеції в точці P , а основу AD – у точці Q . Знайдіть величину кута APQ .

4. Дано 1999 чисел. Відомо, що сума будь-яких дев'яносто дев'яти з цих чисел є додатною. Доведіть, що додатною є сума всіх заданих чисел.

9 клас

1. Доведіть, що десятковий запис числа 1999^6 містить принаймні три однакових цифри.

2. Розв'яжіть рівняння

$$(1 + x + x^2)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4) = (1 + x + x^2 + x^3)^2.$$

3. Всередині гострокутного трикутника ABC позначили точку H так, що $AB^2 + CH^2 = BC^2 + AH^2 = CA^2 + BH^2$. Доведіть, що H – ортоцентр трикутника ABC .

4. Нехай α – відмінне від нуля дійсне число. Відомо, що x_1 та x_2 є дійсними коренями рівняння $x^2 + \alpha x - \frac{1}{2\alpha^2} = 0$. Доведіть, що $x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}$.

5. Три цілі числа a, b, c записали у рядок. Під цими числами записали нову трійку чисел $a - b, b - c, c - a$. Числа третього рядка утворюються з чисел попереднього – другого – за таким самим правилом і т.д. Доведіть, що незалежно від вихідної трійки чисел першого рядка, серед чисел рядків, що розташовані нижче сьомого, не може зустрітися ані число 1999, ані число 2000.

10 клас

1. Знайдіть всі трійки дійсних чисел x, y, z , які задовольняють рівності $x + yz = y + zx = z + xy = 6$.

2. Дано довільний трикутник. Нехай O – центр кола, вписаного в цей трикутник, S – центр, кола описаного навколо трикутника AOC . Доведіть, що точки B, O, S лежать на одній прямій.

3. Зобразіть на координатній площині xOy множину всіх точок (x, y) , координати яких задовольняють умову $x^2 = y + \sqrt{y + x}$.

4. Чи існує нескінченна зростаюча послідовність натуральних чисел a_1, a_2, a_3, \dots така, що для будь-якого цілого невід'ємного числа k послідовність $k + a_1, k + a_2, k + a_3, \dots$ містить лише скінченну кількість простих чисел (можливо, не містить жодного)?

5. У країні n^2 міст розташовані у вигляді квадрата $n \times n$. Відстань між сусідніми містами – центрами відповідних квадратиків – становить 10 км. Міста сполучаються системою доріг – прямолінійних ділянок, які паралельні до сторін квадрата. Якою найменшою може бути довжина цієї системи доріг, якщо відомо, що з довільного міста країни можна дістатися до будь-якого іншого?

11 клас

1. Розв'яжіть рівняння

$$(1 + x + x^2)(1 + x + x^2 + \dots + x^{10}) = (1 + x + x^2 + \dots + x^6)^2.$$

2. Нехай α та β – гострі кути, для яких виконується рівність $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \sin(\alpha + \beta)$. Доведіть, що $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

3. Чи існує функція f , яка визначена на всій множині дійсних чисел, має похідну в усіх точках та задовольняє наступні умови:
а) при всіх дійсних x виконується рівність $f(x) \geq f(x + \sin x)$;
б) рівняння $f'(x) = 0$ має скінченну кількість коренів?

4. Нехай точка P знаходиться всередині гострокутного трикутника ABC . На сторонах AC і BC цього трикутника відзначили такі точки M і K , що $\angle PMC = \angle PKC = 90^\circ$. Доведіть, що коли точки M і K рівновіддалені від середини сторони AB , то $\angle PBC = \angle PAC$.

5. Чи можна шахівницю розмірами 7×7 , із якої вилучено чотири кутові клітинки, так заповнити цілими числами, щоб сума всіх чисел дорівнювала 199919991999, і в кожній фігурці з п'яти клітинок, яка має вигляд хрестика, в якому центральна клітинка оточена чотирма іншими, сума чисел була від'ємною?

2000 рік

7 клас

1. Нехай $S(n)$ – сума цифр натурального числа n , а $S(S(n))$ – сума цифр суми цифр натурального числа n .

а) Чи існує натуральне n , для якого $n + S(n) = 2000$?

б) Чи існує натуральне n , для якого

$$n + S(n) + S(S(n)) = 2000?$$

2. Кожну точку прямої пофарбовано синім або червоним кольором. Доведіть, що на цій прямій знайдуться три різні точки A, B, C одного кольору такі, що точка C – середина відрізка AB .

3. На дошці в рядок записано 1999 натуральних чисел. Доведіть, що серед них завжди можна витерти одне число так, що сума чисел, які залишилися, буде парною. Чи правильно це буде для 2000 чисел?

4. Запишемо рівність $m - n = k$, в якій m, n, k – натуральні числа, причому m – п'ятицифрове число. Доведіть, що у такому записі принаймні одна цифра повториться (наприклад, у записі $54321 - 608 = 53713$ повторюється цифра 5).

5. Знайдіть принаймні дві пари натуральних чисел (a, b) , що задовольняють рівняння $1999a^{1999} = b^{2000}$.

8 клас

1. Доведіть, що число $19991999 + 19991998 \cdot 19991999 \cdot 19992000$ є кубом цілого числа.

2. На дні озера з постійною потужністю б'ють джерела. Стадо з 12 слонів випиває озеро за 4 хвилини, а стадо з 9 слонів – за 6 хвилин. Певного дня до озера підійшли 6 слонів. За скільки хвилин вони вип'ють усю воду з цього озера? (Об'єм води перед водопоем є завжди однаковим).

3. Дано трапецію $ABCD$, у якій $AB \parallel CD$, $AB > CD$. Відомо, що в цій трапеції відстані між серединами основ дорівнює відстані між серединами діагоналей. Доведіть, що кут ADB тупий.

4. Чи існують цілі числа m та n такі, що $7m^2 - 5n^2 = 2000$?

5. Миколка та Сергійко грають у гру, по черзі записуючи цілі числа у клітинки таблиці розмірами 7×9 (7 рядків та 9 стовпчиків). Першим робить свій хід Миколка. За один хід записується одне число у вільну клітинку. Гра продовжується, поки вони не заповнять

числами всю таблицю. Потім підраховуються значення S_1, S_2, \dots, S_7 – суми чисел у рядках таблиці. Якщо серед чисел S_1, S_2, \dots, S_7 парних більше, ніж непарних, то виграє Миколка. В іншому випадку – Сергійко. Хто з гравців може забезпечити собі виграш?

9 клас

1. Доведіть, що всі корені рівняння $x^2 - 4x - 2 = 0$ є також коренями рівняння $(x^2 - 3x - 2)^2 - 3(x^2 - 3x - 2) - x - 2 = 0$.

2. Про ціле число n та просте число p відомо, що числа $5n - 1$ та $n - 10$ діляться на p . Доведіть, що $2000n + 13$ також ділиться на p .

3. Доведіть, що для додатних чисел a, b, c виконується нерівність $\frac{a^4}{bc} + \frac{b^4}{ca} + \frac{c^4}{ab} \geq a^2 + b^2 + c^2$.

4. У сегмент кола ω , що обмежений його хордою MN , вписано два кола. Ці кола дотикаються до дуги кола ω у точках A і B та дотикаються до хорди MN у точках C і D . Доведіть, що точки A, B, C, D лежать на одному колі.

5. У ряд вписані послідовні натуральні числа від 1 до 2000. Двоє по черзі вписують між цими числами знак додавання „+” або множення „х” (усього вписано 1999 знаків). Якщо кінцеве значення одержаного виразу ділитиметься на 3, то виграє той, хто ходив першим. В іншому випадку виграє його суперник. Хто з гравців може забезпечити собі виграш? Знайдіть його виграшну стратегію.

10 клас

1. Знайдіть усі трійки дійсних чисел x, y, z , для яких виконується рівність

$$\sqrt{3z^2 - 2y - 6z - 5} = \sqrt{2x - y^2 + z^2 - 7} - \sqrt{2y - x^2 + z^2 - 12}.$$

2. Сільський гіпнотизер Іван Карпович розводить індиків та курей. Внаслідок його експериментів десята частина індиків вважає, що вони – кури, а десята частина курей, що вони – індики. Якщо

брати загалом, то п'ята частина птахів Івана Карповича вважає себе індіками. А якою є частка індиків у його господарстві насправді?

3. На сторонах AB, BC, CA трикутника ABC взято відповідно точки P, Q, R , а на відрізках RP, PQ, QR – відповідно точки A_1, B_1, C_1 таким чином, що відрізки AB, BC, CA паралельні до відрізків A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 відповідно. Знайдіть площу трикутника PQR , якщо площа трикутника ABC дорівнює a , а площа трикутника $A_1B_1C_1$ дорівнює b .

4. На дошці записано рядок цілих невід'ємних чисел a_1, a_2, \dots, a_{10} , кожне з яких не перевищує 10. Відомо, що кожне ціле число $i (1 \leq i \leq 10)$ зустрічається серед записаних на дошці рівно a_i разів. Які саме числа записані на дошці?

5. Задано таку функцію $f: (0, +\infty) \rightarrow R$, що для кожного $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ виконується рівність $f(\operatorname{tg} 2x) = \operatorname{tg}^4 x + c \operatorname{tg}^4 x$. Доведіть для всіх $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ нерівність $f(\sin x) + f(\cos x) \geq 196$.

11 клас

1. Чи існує натуральне число, десятковий запис якого складається тільки з двійок, та яке можна подати у вигляді суми кубів деяких трьох послідовних цілих чисел?

2. Дано коло ω та попарно різні точки B, C, D на цьому колі. Дотична до кола ω , яку проведено через точку D , перетинає промінь CB у точці A . На продовженні відрізка BD за точкою D довільно вибрано точку E . Коло, яке описане навколо трикутника CDE , перетинає пряму AD у відмінній від D точці K , а пряму AC – у відмінній від C точці F . Доведіть, що $KF \parallel BD$.

3. Знайдіть всі такі пари дійсних чисел a, b , що для будь-якого $x \in R$ виконується рівність $\sin 2000x + \sin ax + \sin bx = 0$.

4. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} xy + yz + zx = 12, \\ xyz = 2 + x + y + z, \end{cases}$$
 якщо

відомо, що $x, y, z \geq 0$.

5. Множина X складається з шести елементів. Нехай A_1, A_2, \dots, A_9 – такі її підмножини, що кожна з них містить по три елементи. Доведіть, що існує таке «пофарбування» елементів X у два кольори (тобто кожному елементу ставиться у відповідність один з двох кольорів), що кожна множина A_i ($1 \leq i \leq 9$) буде містити принаймні два різнокольорових елементи.

2001 рік

7 клас

1. Відстань між пунктами A та B – 80 км, B та C – 300 км, C та D – 120 км, D та A – 100 км. Яка відстань між пунктами A та C ?

2. За допомогою якої мінімальної кількості доданків, що містять у своєму записі лише цифри 3, можна отримати у сумі число 111111?

3. У таблиці $n \times n$ розміщено n чорних шашок по діагоналі знизу вверху та n білих шашок по діагоналі зверху вниз. За один хід дозволяється пересувати дві довільні шашки одного кольору вздовж вертикалей або вздовж горизонталей в одному або протилежному напрямках на одну клітинку. Чи можна за скінченну кількість ходів добитися, щоб всі чорні шашки опинилися в першому стовпчику, а всі білі – в останньому стовпчику, якщо: а) $n = 4$, б) $n = 6$?

4. а) Чи можна числа 1, 2, 3, ..., 15 розбити на дві групи так, щоб суми квадратів чисел у групах були рівними?

б) Чи можливе це для чисел 1, 2, 3, ..., 999 ?

8 клас

1. Розв'яжіть рівняння $||x| - 2| = x$.

2. Турист пройшов половину шляху між пунктами A та B зі швидкістю 4 км/год., а решту шляху до B – зі швидкістю 6 км/год. На зворотному шляху від B до A він дві третини цього шляху

пройшов зі швидкістю, що дорівнює середній швидкості руху в напрямі від A до B , а решту шляху – зі швидкістю 5 км/год. Знайдіть відстань між пунктами A та B , якщо відомо, що на зворотний шлях турист витратив на дві хвилини більше, ніж на весь шлях від A до B .

3. Чи існують такі цілі числа k, l , що $k^3 + l^3 = 2001$?

4. На сторонах AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$ вибрали точки M, P, N, Q відповідно так, що відрізки MN і PQ перпендикулярні. Нехай O – точка їх перетину. Доведіть, що для периметрів утворених при цьому чотирикутників виконується рівність $P_{AMOQ} + P_{CPON} = P_{BMP} + P_{DNOQ}$.

5. Дано одну купу з 2001-го сірника. Двоє грають у гру. Вони по черзі роблять такі ходи – вибирається довільна купа, що містить більше одного сірника, і ділиться на дві менші. Гра продовжується до тих пір, поки кожна купа не буде складатися з одного сірника. При кожному поділі купи на дві записується добуток чисел сірників в отриманих двох менших купках. Мета гравця, що ходить першим, зіграти так, щоб сума всіх записаних чисел ділилася на 1000. Чи може другий гравець йому завадити?

9 клас

1. Доведіть нерівність $\frac{|a|}{\sqrt{b}} + \frac{|b|}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

2. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} x|x| + y|y| = 1, \\ [x] + [y] = 1. \end{cases}$$

(Тут $[t]$ позначає найбільше ціле число, яке не перевищує t).

3. На колі зафіксовано дві точки, а третя рухається по цьому колу. Знайдіть геометричне місце точок перетину медіан трикутника, вершини якого розташовані у цих точках.

4. Два рівних квадрати утворюють при перетині восьмикутник. Дві діагоналі цього восьмикутника поділяють його на чотири чотирикутники. Доведіть, що ці діагоналі перпендикулярні.

5. Із паперу в клітинку вирізали квадрат 8×8 . Яку найбільшу кількість фігурок у вигляді хрестика, складеного з п'яти клітинок, можна вирізати з цього квадрата?

10 клас

1. Для кожного натурального n розв'яжіть рівняння

$$\sin^2 x + \sin 2x \cdot \sin 4x + \sin 3x \cdot \sin 9x + \dots + \sin nx \cdot \sin n^2 x = 1.$$

2. Для натурального числа n позначимо $a(n) = n^2 + n + 1$.

Через S позначимо множину всіх значень $a(n)$, $n \geq 1$.

а) Доведіть, що для кожного натурального n число $a(n)a(n+1)$ належить до S .

б) Доведіть, що існують n, k більші за 2001 такі, що $a(n)a(k)$ не належить до S .

3. Доведіть, що для будь-яких дійсних чисел a, b, c, d, e виконується нерівність $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq (a + b + c + d)e$.

4. П'ятикутник $ABCDE$ вписаний у коло. Промені AE і CD перетинаються в точці P , а промені ED і BC – у точці Q так, що $PQ \parallel AB$. Доведіть, що $DA = DB$.

5. Одну з вершин правильного 2001-кутника пофарбовано у чорний колір, а решту його вершин – у білий. За один крок дозволяється вибрати будь-яку пофарбовану у чорний колір вершину та змінити колір на протилежний у неї та ще у двох сусідніх з нею вершин. Чи можливо за декілька зазначених кроків перефарбувати всі вершини вихідного 2001-кутника у білий колір?

11 клас

1. Задача 1, 10 клас.

2. Числова послідовність a_1, a_2, a_3, \dots , в якій $a_1 = 2$, $a_2 = 500$, $a_3 = 2000$, при всіх натуральних $n \geq 2$ задовольняє умову

$$\frac{a_{n+2} + a_{n+1}}{a_{n+1} + a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_{n-1}}.$$

Доведіть, що всі члени цієї послідовності є натуральними числами,

причому a_{2001} ділиться без остачі на 2^{2001} .

3. Знайдіть всі функції f , які визначені на всій числовій осі та одночасно задовольняють наступні дві умови:

а) рівняння $f(x) = 0$ має єдиний корінь;

б) для будь-яких $x, y \in R$ виконується рівність

$$f(y + f(x)) = f(x^2 - y) + 4f(x)y.$$

4. Поза площиною α дано точку A . Доведіть, що для будь-якої прямої l , яка належить α , у цій же площині існує така відмінна від l пряма $m \parallel l$, що для кожної точки $M \in m$ спільний перпендикуляр мимобіжних прямих l та AM проходить через середину відрізка AM .

5. Задача 5, 10 клас.

2002 рік

7 клас

1. Правильний дріб $\frac{m}{n}$ та неправильний дріб $\frac{n}{m}$

посперечалися, котрий з них знаходиться ближче до одиниці.

а) Розсудіть їх;

б) знайдіть хоч одну пару дробів указанного вигляду, один із яких у 2002 рази ближчий до одиниці, ніж інший.

2. На площині відзначили 6 різних точок. Відомо, що пряма, яка проходить через будь-які дві зі цих точок, містить принаймні ще одну відзначену точку. Доведіть, що всі ці 6 точок лежать на одній прямій.

3. Семикласник Петрусь одержав у подарунок на свій день народження лінійку довжиною 13 см без поділок. Він хвалиться, що зумів нанести на ній 4 поділки таким чином, що з їх допомогою можна відкласти відрізки будь-якої цілочислової довжини від 1 см до 13 см включно, прикладаючи лінійку у кожному зі цих випадків лише один раз. Чи можуть його слова бути правдою? Відповідь обґрунтуйте.

4. Множину чисел $1, 2, 3, \dots, 2002$ розбили на дві групи. До першої групи віднесли всі числа з непарною сумою цифр, а до другої – з парною. Що більше: сума всіх чисел першої групи, чи сума всіх чисел другої групи?

8 клас

1. Торговець мав кілька штук однакових годинників. Якщо він їх усіх продасть по 13 гривень, то матиме 54 гривні збитку, а якщо продасть по 18 гривень, то наживе 81 гривню. Скільки було годинників і якої вартості?

2. Учень задумав деяке натуральне число n . Доведіть, що:

а) існує натуральне число k , що число $nk + 1$ є складеним;

б) існує безліч натуральних чисел k з такою властивістю.

3. У гострокутному трикутнику з однієї вершини проведено медіану, з другої – бісектрису, а з третьої – висоту. При їхньому перетині утворився новий трикутник. Доведіть, що він не є рівностороннім.

4. Доведіть, що

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2001} - \frac{1}{2002} = \frac{1}{1002} + \frac{1}{1003} + \dots + \frac{1}{2002}.$$

5. П'ятдесят каменів розташовані у порядку спадання їхньої маси. Перший важить 468 кг, а кожен наступний на 2 кг легший від сусіднього з ним. Якою мінімальною кількістю вантажівок можна перевезти ці камені, якщо вантажити їх дозволяється у довільному порядку, але не більше трьох тон на одну автомашину?

9 клас

1. Дорога Петруся до школи проходить мимо п'яти садків. Петрусь стверджує, що у першому і другому садках разом є 9, другому і третьому – 13, третьому і четвертому – 19, четвертому і п'ятому – 11, п'ятому і першому – 16 дерев. Чи можна на основі його даних встановити загальну кількість дерев у всіх п'яти садках? Якщо так, то знайдіть цю кількість.

2. Число x замінили на $x^2 - 2001$. Із одержаним числом поступили таким же чином, продовживши процедуру описаних

замін 2002 рази. Чи могли у кінцевому результаті одержати початкове число?

3. a, b, c – довжини сторін деякого трикутника. Доведіть, що

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca).$$

4. На двох сторонах трикутника ABC побудовані квадрати $ABMK$ та $BCTP$, які лежать зовні цього трикутника. Точка O – середина сторони AC . Доведіть, що $\angle BPM = \angle CPO$.

5. Доріжки у зоопарку утворюють правильний трикутник, в якому проведені середні лінії. Із клітки втекла мавпа. Її ловлять два сторожі. Чи зможуть вони спіймати мавпу, якщо всі троє будуть бігати лише по доріжках, бачитимуть одне одного і матимуть однакові максимальні швидкості руху?

10 клас

1. Таблицю розмірами 5×5 заповнили натуральними числами $1, 2, \dots, 25$, причому будь-які два сусідні натуральні числа знаходяться у сусідніх зі спільною стороною клітинках. Дослідіть, яка максимальна кількість простих чисел могла опинитися в одному стовпчику такої таблиці.

2. Доведіть, що число $\cos 20^\circ \cos 30^\circ \sin 50^\circ - \cos 10^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ$ є раціональним.

3. Знайдіть довжину відрізка, паралельного до основ трапеції, довжини яких відповідно дорівнюють a та b , якщо відомо, що цей відрізок ділить площу трапеції пополам, а його кінці знаходяться на бічних сторонах цієї трапеції.

4. Знайдіть всі такі функції $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, що для всіх натуральних n виконується рівність $f(f(n)) + f^2(n) = n^2 + 3n + 3$.

5. Після введення у шкільну програму замість одного уроку математики уроку футболу вирішили провести Всеукраїнські змагання школярів із цього виду спорту. В Івано-Франківській області заявки для участі в цих змаганнях подали 202 команди замість очікуваних 2002-ох. Їх певним чином розбили на групи. У кожній групі провели турніри в одне коло. При цьому кожна зустріч

закінчувалася перемогою однієї з команд. Після статистичної обробки результатів змагань виявилось, що сума квадратів перемог, здобутих усіма учасниками змагань, дорівнює сумі квадратів їхніх поразок. Чи могло таке статися, якщо б у змаганнях взяли участь 2002 команди і в усіх групах кількості команд були різними?

11 клас

1. Побудуйте графік функції $y = \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$.

2. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} xy + x + y = 1, \\ yz + y + z = 1000, \\ zx + z + x = 2001. \end{cases}$$

3. Доведіть, що якщо діагоналі чотирикутника $ABCE$, вписаного у коло з центром O , перпендикулярні, то ламана AOC ділить площу цього чотирикутника пополам.

4. Доведіть або спростуйте наступне твердження: у довільній трикутній піраміді знайдеться вершина, що із ребер, які виходять з неї, можна утворити трикутник.

5. Учень виписав на дошці чотири множини натуральних чисел, які склалися відповідно зі всіх натуральних дільників наступних чисел: $a = 2^{2001} - 11$, $b = 2001^2 - 11$, $c = 2^{2002} + 11$, $d = 2002^2 + 11$. Встановіть, які числа йому довелося виписувати рівно три рази.

2003 рік

7 клас

1. Діти, вишикувавшись парами, виходять з лісу. У кожній парі йдуть хлопчик і дівчинка, причому у хлопчика або вдвічі більше горіхів, ніж у дівчинки, або вдвічі менше. Чи могло так статися, що у всіх разом 2003 горіхи?

2. Ліспромгосп вирішив вирубати сосновий ліс, але екологи рішуче виступили проти цього. Тоді директор ліспромгоспу всіх заспокоїв, сказавши: «У вашому лісі 99% сосен. Ми будемо рубати тільки їх, причому після рубки сосен залишиться 98% від всіх дерев». Яку частину лісу має намір вирубати ліспромгосп?

3. На дорозі між двома гірськими селами горизонтальних дільниць немає. Автобус вгору їде завжди зі швидкістю 15 км/год., а вниз – 30 км/год. Яка відстань між селами, якщо відомо, що шлях туди і назад автобус проїздить за 4 години ?

4. Незнайко вважає, що тільки правильний трикутник можна розрізати на три рівні трикутники. Чи не помиляється він?

8 клас

1. Жорстокий цар Шагріяр зажадав від чарівної Шахразида, щоб вона протягом наступних 1001-ї ночей називала йому по одному розв'язкові в натуральних числах рівняння $x^2 - y^2 = p^{2003}$, де p – деяке просте число. Скориставшись килимом-літаком, Шахразида прилетіла до Івано-Франківська і просить вашої допомоги. Не забувайте тільки, що у її розпорядженні всього 3 години, а самого числа p вона поки що не знає.

2. На базарі продаються рибки – великі і малі. Сьогодні 3 великі і 1 мала коштують разом стільки, як 5 великих вчора. А 2 великі і 1 мала коштують сьогодні стільки ж, як 3 великі і 1 мала вчора. Чи можна за цими даними визначити, що дорожче: 1 велика і 2 малі сьогодні, чи 5 малих вчора ?

3. Петрусь та Миколка по черзі розставляють у виразі $n * n^2 * n^3 * n^4 * n^5 * n^6 * n^7 * n^8$ замість зірочок знаки „+”, або „-”. Доведіть, що Петрусь, який розпочинає розставляти знаки, може добитися, щоб одержаний вкінці вираз ділився на 6 для всіх натуральних n , незалежно від ходів Миколки.

4. Медіани AD та BE трикутника ABC перетинаються у точці M . Знайдіть довжину медіани CF трикутника BCM , якщо $AB = 5$, $AD = 6$, $AC = 8$.

9 клас

1. Петрусь виписав на дошці 2003 зведених квадратних рівняння і перевіряв, що жодне з них не має дійсних коренів. Потім він додав усі ці рівняння. Доведіть, що і одержане в результаті рівняння також не має дійсних коренів.

2. Трава на лузі росте рівномірно. 30 корів можуть спасти її за 4 дні, а 25 – за 6 днів. Скільки корів можуть пастися на такому лузі безперервно, поки на ньому буде рости трава ?

3. Із 40 одиниць, 30 двійок, 20 трійок і 10 четвірок склали два різні стоцифрові числа. Доведіть, що вони не діляться одне на одне.

4. У трикутнику ABC кут B дорівнює 60° . Бісектриси AD та CE перетинаються у точці O . Доведіть, що $OE = OD$.

10 клас

1. У вершинах десятикутника у довільному порядку розмістили всі натуральні числа від 1 до 10, а потім на кожній стороні виписали суму чисел, які знаходяться на її кінцях. Доведіть, що принаймні дві зі цих сум закінчуються на одну і ту ж цифру.

2. Доведіть, що число $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 1001 + 1002 \cdot 1003 \cdot 1004 \cdot \dots \cdot 2002$ ділиться на 2003.

3. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\frac{y+z-x}{1} = \frac{z+x-y}{3} = \frac{x+y-z}{5} = \frac{xyz}{6}.$$

4. На стороні AB гострокутного трикутника ABC довільно вибрали точку M , з якої опустили перпендикуляри MK та MP на дві інші сторони трикутника. При якому розташуванні точки M довжина відрізка PK буде найменшою?

11 клас

1. Діагоналями, які не перетинаються між собою, опуклий n -кутник поділено на трикутники так, що з кожної вершини виходить парне число проведених діагоналей. Доведіть, що n ділиться на 3.

2. Тангенси кутів трикутника є натуральними числами. Знайдіть ці числа.

3. Дослідіть, якого найменшого значення може набувати вираз

$$\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 - x\sqrt{3} + 1}.$$

4. Місто розташоване на 2003-ьох островах, причому деякі з них з'єднані між собою так, що з будь-якого острова можна проїхати на будь-який інший. При поїздках містом його жителі виражають довжину свого шляху числом мостів, які їм доводиться проїздити. Після закриття одного з мостів кожен житель міста заявив: «У мене є друг, найкоротший шлях до якого став на 1 міст довшим, ніж був досі.» Чи не помилився хтось із них у своїх підрахунках?

5. Всередині трикутника ABC довільно вибрали точку M . Прямі AM , BM , CM перетинають сторони трикутника у точках A_1 , B_1 , C_1 відповідно. Доведіть, що $\frac{MA_1}{AA_1} + \frac{MB_1}{BB_1} + \frac{MC_1}{CC_1} = 1$.

2004 рік

7 клас

1. Розв'яжіть рівняння $\left| |4|x| - 3| - 2 \right| = 3$.

2. Із селища A до селища B виїхав велосипедист, а через 15 хвилин вслід за ним виїхав автомобіль (обидва рухаються з постійними швидкостями). Рівно на половині шляху від A до B автомобіль наздогнав велосипедиста. Коли автомобіль прибув до селища B , велосипедистові залишалося проїхати ще третину шляху. За який час велосипедист проїхав шлях від A до B ?

3. Дано трикутник ABC ($\angle A < 45^\circ$, $\angle C = 90^\circ$), на сторонах AC та AB якого обрано такі точки D та E відповідно, що $BD = AD$, $BC = CE$. Відрізки BD та CE перетинаються в точці O . Доведіть, що $\angle DOE = 90^\circ$.

4. Троє учнів, котрі відвідують заняття математичного гуртка, на перерві вирішили пограти у «слова». Кожен з них написав по 50 різних слів. А потім слова, які зустрілися принаймні у двох учнів, було викреслено. Після цього у першого виявилось 23, у другого – 32, у третього – 26 слів. Коли вчитель математики дізнався про це, то він сказав дітям, що принаймні одне слово було записане у всіх трьох учнів. На основі чого учитель міг зробити такий висновок ?

5. Як у виразі $\frac{1}{2} * \frac{2}{3} * \frac{3}{4} * \frac{4}{5} * \dots * \frac{97}{98} * \frac{98}{99} * \frac{99}{100}$, який містить

99 дробів, замінити всі зірочки знаками арифметичних дій таким чином, щоб значення одержаного арифметичного виразу дорівнювало нулю?

6. Петрик вибрав три різні цифри і записав усі можливі різні трицифрові натуральні числа десятковий запис кожного з котрих містить усі три вибрані цифри, але не може починатися з нуля. Виявилось, що сума всіх записаних чисел дорівнює 3376. Визначте, які саме цифри були вибрані, і доведіть, що інших варіантів немає.

7. Дано горизонтальну клітчасту смугу розмірами 1×2004 . У кожній з п'яти крайніх зліва клітинок розташовано по одній фішці. Двоє по черзі беруть одну з фішок і пересувають її на декілька клітинок праворуч (стрибати через фішки і ставити фішки у клітинки, у яких уже знаходиться інша фішка не дозволяється). Переможеним вважається той зі гравців, який не може зробити свій черговий хід. Доведіть, що той гравець, який розпочинає гру, може забезпечити собі перемогу.

8 клас

1. Побудуйте графік функції $y = \frac{5x^2 - |x|}{x + |x|}$.

2. Сума тангенса гострого кута та котангенса другого гострого кута прямокутного трикутника дорівнює 1. Обчисліть значення тангенса більшого гострого кута цього трикутника.

3. Для яких натуральних n число $n^4 - 22n^2 - 46$ ділиться без остачі на $n + 5$?

4. Розв'яжіть рівняння $\left(\frac{37}{21}x\right)^3 = p$, де p – середнє

арифметичне чисел:

$$A = \frac{158^2 + 158 \cdot 185 + 185^2}{158 + 185} \quad \text{та} \quad B = \frac{158^2 - 158 \cdot 185 + 185^2}{185 - 158}.$$

5. Знайдіть натуральне число B за умови, що з трьох наступних тверджень два істинних, а одне хибне:

а) $B + 41$ є квадратом натурального числа; б) $B - 21$ ділиться на 10; в) $B - 48$ є квадратом натурального числа.

6. За допомогою циркуля та лінійки поділіть кут 35° на 7 рівних частин.

7. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC на бічній стороні BC вибрано точку K так, що $\angle BAK = 24^\circ$. На відрізку AK вибрана точка M так, що $\angle ABM = 90^\circ$, $AM = 2BK$. Знайдіть кути трикутника ABC .

9 клас

1. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x^5 + x^3 + x - 42} = x\sqrt{2 - x}$.

2. На декартовій координатній площині задані чотири точки: $A_1(0;0)$, $A_2(0;2)$, $A_3(-2;-2)$, $A_4(4;0)$. Для кожної з цих точок вказати множину точок площини, до яких ця точка є найближчою у порівнянні з трьома іншими.

3. Знайти усі $x_0 < 3$ такі, що для деяких натуральних чисел a, b, c число x_0 є найбільшим коренем рівняння $(a - x)(b - x) = c$.

4. Знайти всі натуральні n такі, що для десяткового запису чисел $6n, 9n, 13n$ необхідно використати у сукупності всі цифри від 0 до 9 по одному разові.

5. Деякі сторони клітинок шахівниці пофарбовано у червоний колір, а інші – у синій колір. Дозволяється обирати деяку клітинку дошки і перефарбовувати всі її сторони одночасно у протилежний колір. Чи завжди можна зробити декілька перефарбувань таким чином, щоб синіми стали менше ніж $\frac{1}{4}$ від усієї кількості сторін клітинок?

6. Нехай додатні числа a, b, c та дійсні числа x, y, z такі, що $ax + by + cz = 0$. Доведіть нерівність

$$(a + \sqrt{ab} + b)xy + (b + \sqrt{bc} + c)yz + (c + \sqrt{ca} + a)zx \leq 0.$$

7. На дошці намальовано трикутник ABC . Висота AH та бісектриса AL цього трикутника перетинають вписане у трикутник коло у різних точках M та N , P та Q відповідно. Після цього малюнок витерли, залишивши лише точки H , M та Q . Відновити трикутник ABC .

10 клас

1. Нехай α, β, γ – такі гострі кути, що $\cos \alpha = \operatorname{tg} \beta$, $\cos \beta = \operatorname{tg} \gamma$, $\cos \gamma = \operatorname{tg} \alpha$. Доведіть, що $\sin \alpha = \sin \beta = \sin \gamma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

2. Нехай α – таке дійсне число, що числа $\alpha^2 + \alpha$ та $\alpha^3 + 2\alpha$ є раціональними. Доведіть, що α також є раціональним.

3. Доведіть, що не існує таких непарних натуральних чисел a, b, c , що $ab^3 - 2003$, $bc^3 + 2005$ та $ca^3 - 2007$ є квадратами натуральних чисел.

4. Знайдіть усі такі дійсні числа x , які не є цілими і при цьому задовольняють рівність $x + \frac{2004}{x} = [x] + \frac{2004}{[x]}$, де $[x]$ – найбільше ціле число, котре не перевищує x .

5. У трикутнику ABC точки M та N є серединами сторін BC та AC відповідно. Відомо, що точка перетину висот трикутника ABC співпадає з точкою перетину медіан трикутника AMN . Знайдіть величину кута ABC .

6. Доведіть, що якщо $x, y, z > 0$ і $x + y + z = 1$, то

$$\frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{z} + \frac{z^3}{x} + \frac{x^3}{z} + \frac{y^3}{x} + \frac{z^3}{y} \geq \frac{x^2 + y^2 + z^2 + 1}{2}.$$

7. Кожне натуральне число пофарбоване в один з двох кольорів – синій або жовтий, причому чисел кожного з кольорів безліч. Відомо до того ж, що сума будь-яких 2003 попарно різних чисел синього кольору є числом синього кольору, а сума будь-яких 2003 попарно різних чисел жовтого кольору є числом жовтого

кольору. Визначте, якого кольору буде число 2004, якщо число 1 пофарбоване синім кольором. Відповідь обґрунтуйте.

11 клас

1. Знайдіть усі значення параметра a , при яких рівняння $\sqrt{2-ax} + 2 = x$ має тільки один дійсний корінь.

2. Дано трикутник ABC , в якому $\angle B > 90^\circ$. Серединний перпендикуляр до сторони AB перетинає сторону AC у точці M , а серединний перпендикуляр до сторони AC перетинає продовження сторони AB поза вершину B у точці N . Відомо, що відрізки MN і BC є рівними та перетинаються під прямим кутом. Знайдіть величини всіх кутів трикутника ABC у градусах.

3. Відомо, що
$$\frac{\cos x + \cos y + \cos z}{\cos(x+y+z)} = \frac{\sin x + \sin y + \sin z}{\sin(x+y+z)} = a.$$

Доведіть, що $\cos(x+y) + \cos(y+z) + \cos(z+x) = a$.

4. Дано прямокутний паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Нехай точки E та F є основами перпендикулярів, проведених із точки A до прямих $A_1 D$ та $A_1 C$ відповідно, а точки P та Q є основами перпендикулярів, проведених із точки B_1 до прямих $A_1 C_1$ та $A_1 C$ відповідно. Доведіть, що $\angle EFA = \angle PQB_1$.

5. Задача 6, 10 клас.

6. Знайдіть усі такі визначені на множині $(0, +\infty)$ функції f , для будь-яких $x > 0$ виконується нерівність $f(x) > 0$ і при всіх $x > 0, y > 0$ справджується рівність

$$f(xf(y)) + f(x) + f(y) = f(x+y).$$

7. Задача 7, 10 клас.

2005 рік

7 клас

1. В озері водяться карасі, окуні та щуки. Два рибаки спіймали разом 70 риб, причому $\frac{5}{9}$ улову першого рибака складали

карасі, а $\frac{7}{17}$ улову другого – окуні. Скільки щук спіймав кожен із рибаків, якщо обидва спіймали порівну карасів і порівну окунів?

2. На острові живуть лицарі, які завжди говорять правду, і брехуни, які завжди брешуть. Подорожуючий зустрів трьох жителів острова і спитав: «Скільки лицарів серед твоїх супутників?» Перший відповів: «Жодного.» Другий сказав: «Один.» Що сказав третій?

3. На дошці спочатку було записане число 1. Щохвилини до наявного у даний момент числа додають суму його цифр. Чи може через деякий час на дошці з'явитися число 200520052005?

4. Чи можна квадрат зі стороною 1 м розрізати на сім прямокутників, не обов'язково однакових, кожен з яких має периметр 2 м?

8 клас

1. Є 8 відрізків, причому відомо, що довжина кожного з них – ціле число сантиметрів, а довжина найбільшого – 20 см. Доведіть, що серед цих відрізків знайдуться три, з яких можна скласти трикутник.

2. У корзині лежать 16 яблук. За одне зважування можна взяти сумарну масу довільних трьох яблук. Запропонуйте спосіб, як за 8 зважувань знайти загальну масу всіх яблук.

3. На площині розташовані точки A, B, C, D, E, F так, що жодні три з них не лежать на одній прямій, причому $AB = AF$, $BC = CD$, $DE = EF$. Доведіть, що прямі, на яких лежать бісектриси кутів BAF , $B CD$ та DEF , перетинаються в одній точці.

4. Знайдіть найбільший спільний дільник чисел $a = 2^{2004} - 1$ та $a = 2^{2005} + 1$.

9 клас

1. Розв'яжіть рівняння $(x - 15)(x^2 + 1) = 2005$.

2. Доведіть, для довжин сторін довільного трикутника нерівність $a^3 + b^3 + 3abc > c^3$.

3. У кожній клітинці таблиці 9×9 записані знаки «+» або «-». Можна одночасно змінювати всі знаки на протилежні у будь-якому рядку чи у будь-якому стовпчику таблиці. Чи обов'язково вдасться добитися, щоб за декілька кроків у всіх рядках та у всіх стовпчиках таблиці плюсів було більше, ніж мінусів.?

4. У прямокутному трикутнику ABC точка O – середина гіпотенузи AB . На відрізку AC взяли точку M , а на відрізку BC – точку K так, що кут $МОК$ прямий. Доведіть, що $AM^2 + BK^2 = MK^2$.

10 клас

1. Від відрізка [2004,2005] відрізали зліва четверту його частину. Потім від залишку справа знову відрізали четверту частину. Від нового залишку ще раз відрізали четверту частину зліва, а потім (від залишку) – четверту частину справа, і так далі. Вкажіть точку цього відрізка, яка ніколи не буде відрізана.

2. У підприємця працюють 10 робітників. Кожного місяця він підвищує зарплату дев'ятьом із них (на свій вибір) на одну гривню. Чи зможе підприємець у такий спосіб вирівняти їхні зарплати, якщо спочатку у всіх зарплати були різними і виражалися цілими числами гривень?

3. Хорди AC та BD кола з центром O перетинаються в точці K . Нехай M і N – центри кіл, описаних навколо трикутників ABK та CDK відповідно. Доведіть, що $OM = KN$.

4. Для $a > b > c$ доведіть нерівність

$$a + \frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} \geq c + 4.$$

11 клас

1. У трикутнику ABC проведені бісектриса AK , медіана BL і висота CM . Трикутник KML рівносторонній. Доведіть, що і трикутник ABC рівносторонній.

2. Розв'яжіть рівняння $\left(x^2 + x - \frac{2005}{2}\right)^2 + x^2 = 2005$.

3. Доведіть, що якщо жодне з одинадцяти цілих чисел не ділиться на 11, то сума їх десятих степенів ділиться на 11.

4. Перший, десятий та тридцятий члени геометричної прогресії є натуральними числами. Чи правильно, що і двадцятий її член є натуральним числом?

5. Сума плоских кутів при вершині піраміди більша 180° . Доведіть, що кожне з бічних ребер цієї піраміди менше півпериметра основи.

2006 рік

7 клас

1. Перед початком олімпіади з математики кожен учень сьомого класу висловився, яке місце він розраховує зайняти. Петрусь заявив, що він буде останнім. Після перевірки виявилось, що всі, крім, звичайно, Петруся, виступили гірше, ніж очікували. Яке місце зайняв Петрусь? Відповідь обґрунтуйте.

2. У шкатулці пірата є декілька (не більше 2006) дорогоцінних каменів. Відомо, що $\frac{3}{11}$ всіх каменів – алмази, $\frac{4}{13}$ – рубіни, $\frac{5}{14}$ – сапфіри, а решта – смарагди. Скільки у його шкатулці смарагдів?

3. Два торговці купили у місті однакову кількість товару і поїхали продавати його у свої села. Перший продавав товар удвічі дорожче, ніж купив його. Другий спочатку підняв ціну на 50%, а потім, продавши частину товару, підняв ціну ще на 50%. Чи міг він виручити за проданий товар таку ж суму грошей, що й перший торговець? Якщо так, то яку частину товару йому потрібно було продати за першою ціною?

4. В одній вершині куба записане число 7, а в інших його вершинах – нулі. За один крок дозволяється вибрати довільну вершину і додати по одиниці у тих трьох вершинах куба, кожна з яких зв'язана із вибраною спільним ребром. Невмійко стверджує, що за декілька таких кроків він зумів вирівняти числа у всіх восьми вершинах. Чи не помиляється він?

5. Довжини сторін прямокутника виражаються цілими числами. Якими повинні бути ці числа, щоб периметр прямокутника чисельно дорівнював його площі? Знайдіть всі можливі варіанти і доведіть, що інших немає.

8 клас

1. У восьмому класі навчається 25 учнів. Відомо, що серед будь-яких чотирьох учнів класу принаймні двоє друзять між собою. Доведіть, що у класі є учень, в якого не менше восьми друзів.

2. Розв'яжіть рівняння $|x+1003|+|x|+|x-1003|=2006-x^2$.

3. Доведіть, що числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 можна розбити на дві групи по чотири числа так, щоб в обох групах суми чисел були рівними і в обох групах суми квадратів чисел були рівними. Скількома способами вдасться добитися бажаного результату?

4. Дві прямі, проведені через вершину A паралелограма $ABCD$, ділять його діагональ BD на три рівні відрізки з довжинами 2см . Знайдіть відстань між точками, в яких одна з цих прямих перетинає сторону BC , а друга – сторону CD .

5. Кут A трикутника ABC втричі більший кута C . На стороні BC вибрали точку E так, що $\angle AEC = 2\angle ACB$. Доведіть, що $AB + AE = BC$.

9 клас

1. Розв'яжіть рівняння $x^4 + 4x = 1$.

2. Доведіть, що для катетів a та b і гіпотенузи c прямокутного трикутника виконується нерівність $c^2 > \frac{ab+bc+ca}{2}$.

3. Дослідіть, чи можна рівносторонній трикутник зі стороною 9 см розбити на два трикутники з периметрами 20 см та 23 см.

4. У вазі 2006 цукерок. Марійка, Петрусь і Миколка по черзі (саме у такому порядку) забирають їх із вази. За один раз Марійка може взяти одну, дві або три цукерки, а Миколка і Петрусь – лише одну або дві. Доведіть, що хлопці, діючи узгоджено, можуть домогтися, щоб останню цукерку із вази забрала Марійка.

5. У трикутнику ABC довжина медіани BM дорівнює довжині сторони AC . На прямих AB та AC взяли точки D та E відповідно так, що вони відмінні від точок B та M і $AD = AB$, $CE = CM$. Знайдіть величину кута між DM і BE .

10 клас

1. Розв'яжіть рівняння $x^4 - x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$.
2. Для додатних чисел a та b доведіть нерівність

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{2006} \geq 4(a - 2006).$$

При яких a, b досягається рівність?

3. Знайдіть всі такі натуральні числа x, y , для яких $x + y$ є простим числом, і $x^2 + y^2$ ділиться на $x + y$.

4. Нехай H – точка перетину висот гострокутного трикутника ABC . Доведіть, що $AH \cdot BC + BH \cdot CA + CH \cdot AB = 4S$, де S – площа трикутника ABC . Чи існують інші точки всередині цього трикутника, для яких виконується аналогічна рівність?

5. Павук з'єднав зв'язною павутиною всі вісім вершин порожнистого куба з ребром 1,5 м. Дослідіть, чи могла довжина його павутини бути меншою 10 м.

11 клас

1. У виразі $\sqrt{x} * \sqrt{y} = 2006$ Миколка замінив знак «*» на один із знаків арифметичних дій і переконався, що існує принаймні одна пара натуральних чисел x, y , менших за 2006, для яких виконується отримана ним рівність. Знайдіть усі пари таких чисел.

2. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$x + y^2 + z^2 = \frac{3}{8}, \quad x^2 + y + z^2 = \frac{3}{8}, \quad x^2 + y^2 + z = \frac{3}{8}.$$

3. Знайдіть найбільше значення виразу $\cos \alpha + \cos \beta$, якщо відомо, що $\sin \alpha + \sin \beta = 1$.

4. Опуклий чотирикутник розбили діагоналями на чотири трикутники. Доведіть, що точки перетину медіан цих трикутників є

вершинами паралелограма.

5. У трикутній піраміді $ABCD$ ребра AB, BC, CD мають довжину 3 см, а ребра BD, DA, AC – довжину $\sqrt{11}$ см. Знайдіть відстань між прямими AD та BC .

2007 рік

7 клас

1. По колу записано 2007 цілих чисел, кожне з них дорівнює сумі двох своїх сусідів. Доведіть, що сума всіх таких чисел дорівнює нулю.

2. У семикласника Андрійка є вірвочка довжиною $\frac{2}{3}$ метра.

Чи може він, не маючи метра, відрізати від неї рівно півметра?

3. Чи існують натуральні числа x, y, z , для яких виконується рівність $29x + 30y + 31z = 366$? Якщо так, то знайдіть всі можливі трійки таких чисел.

4. Знайдіть найменше натуральне число, яке при діленні на 2 дає остачу 1, на 3 – остачу 2, на 4 – остачу 3, на 5 – остачу 4, на 6 – остачу 5, на 7 – остачу 6. Обґрунтуйте, що воно справді найменше з усіх можливих.

5. Вчитель намалював на дошці шестикутник, сторони якого дорівнюють 1, 2, 3, 4, 5 та 6 см відповідно (не обов'язково саме у такому порядку). Чи могло трапитися так, що всі кути такого шестикутника виявилися рівними між собою? Відповідь обґрунтуйте.

8 клас

1. У Змія Горинича x голів. Кожну хвилину Іван Царевич відрубав одну голову. Після кожних чотирьох відрубаних голів відростає одна нова. Знайдіть x , якщо відомо, що після 2007-ої хвилини Змій залишився обезголовленим.

2. Доведіть, що серед будь-яких 2007 натуральних чисел завжди можна знайти такі три числа a, b, c , що $a(b - c)$ ділиться на 2007. Чи обов'язково вдасться зробити такий вибір із 2006 чисел?

3. У трикутнику довжини сторін задовольняють рівність

$$\frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}.$$

Доведіть, що такий трикутник рівнобедрений.

4. У трикутнику ABC точка M є серединою сторони BC . На продовженні сторони AB поза точку B вибрали точку K . Виявилось, що $AB = BK = AM$. Нехай H – точка перетину прямих KM та AC . Доведіть, що $CH = MH$.

5. У таблиці 8×8 вписали по порядку всі натуральні числа від 1 до 64. При цьому у першому рядку вписали зліва направо числа від 1 до 8, у другому рядку – зліва направо числа від 9 до 16 і т.д. Після цього перед кожним числом поставили знак «+» або знак «-», причому у кожному рядку та у кожному стовпчику плюсів та мінусів виявилось порівну. Знайдіть всі можливі значення, яких може набувати сума чисел отриманої у такий спосіб таблиці.

9 клас

1. У натуральному числі A цифри записані у порядку зростання (зліва направо). Доведіть, що сума цифр числа $9A$ не залежить від їх кількості та від числа A і знайдіть цю суму.

2. Знайдіть всі значення параметра a , при яких система рівнянь
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 6x - 8, \\ x^2 + y^2 = a^2 + 8y - 16 \end{cases}$$
 має єдиний розв'язок.

3. На дошці записане число 2007. Грають двоє, роблячи ходи по черзі. За один хід дозволяється відняти від наявного у даний момент числа будь-яку його ненульову цифру і записати отримане у такий спосіб число замість попереднього. Виграє той, хто отримає нуль. У котрого з гравців є виграшна стратегія? Опишіть цю стратегію.

4. Точка M знаходиться поза рівностороннім трикутником ABC але всередині кута BAC . Відомо, що $\angle AMC = 30^\circ$, а $\angle AMB = \alpha$. Прямі AM та BC перетинаються у точці K . Знайдіть α , якщо відомо, що трикутник BKM рівнобедрений.

5. У поході, який тривав 12 днів, взяли участь 9 учнів. Кожного дня чергували троє. При цьому чергові сварилися між собою і жодні двоє з них більше не хотіли чергувати разом. Чи вдасться із дотриманням такої вимоги забезпечити чергування на всі 12 днів?

10 клас

1. Опуклий чотирикутник поділили діагоналями на чотири трикутники. Виявилось, що площі цих трикутників виражаються цілими числами. Миколка порахував добуток цих чисел і отримав число 2007. Доведіть, що він помилився у своїх обчисленнях.

2. Обчисліть без таблиць і калькулятора $\cos 36^\circ - \cos 72^\circ$.

3. Знайдіть всі розв'язки рівняння $xy + yz + zx = x y z t$ у натуральних числах

4. Радіус кола, вписаного у трикутник ABC , дорівнює r . Нехай M, N, K – точки дотику цього кола до сторін AB, BC, CA

відповідно. Доведіть, що $\frac{1}{AM \cdot MB} + \frac{1}{BN \cdot NC} + \frac{1}{CK \cdot KA} = \frac{1}{r^2}$.

5. На поле для «морського бою» (квадрат 10×10) виставляють 10 «кораблів» у такій послідовності: спочатку один «корабель» розмірами 1×4 , потім два, три та чотири «кораблі» відповідно з розмірами 1×3 , 1×2 та 1×1 . Правила не дозволяють «кораблям» торкатися один одного навіть вершинами. Чи може трапитися так, що коли частину «кораблів» уже виставлено, наступного немає де розмістити?

11 клас

1. Для яких натуральних n вираз $n^2 + 3n + 5$ ділиться на 121.

2. Знайдіть найменше значення функції

$$y = |x - 1| + |x - 2| + \dots + |x - 2007|.$$

3. Доведіть, що $\cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}$.

4. Точка M всередині рівностороннього трикутника ABC віддалена від його вершин A, B, C на $\sqrt{3}$, 3 та $2\sqrt{3}$ см відповідно. Під якими кутами з точки M видно його сторони?

5. Із будь-яких трьох відрізків із заданих шести можна скласти трикутник. Чи завжди із цих відрізків вдасться скласти тетраедр?

2008 рік

7 клас

1. Якщо задумане двоцифрове число поділити на суму його цифр, то в частці вийде 4, а в остачі 3. Якщо від задуманого числа відняти подвоєну суму його цифр, то вийде 25. Яке число задумано?

2. Знайти всі можливі значення суми трьох попарно різних натуральних чисел, добуток яких дорівнює 2007.

3. На площині дано чотири різні точки O, A, B, C . Промені OM та ON є бісектрисами кутів AOC та BOC відповідно, а кут MON є прямим. Довести, що точка O лежить на прямій AB .

4. Задача 1, 7 клас, 2004 рік.

5. Розкласти дужки і знаки арифметичних дій так, щоб отримати правильну рівність: $\frac{1}{2} * \frac{1}{6} * \frac{1}{6024} = 2008$.

8 клас

1. Довести, що у прямокутному трикутнику медіана і висота, проведені до гіпотенузи, утворюють кут, який дорівнює різниці гострих кутів трикутника.

2. Сума кількох цілих чисел ділиться на 6. Доведіть, що і сума їх кубів ділиться на 6.

3. Точки A_1 та A симетричні відносно сторони BC , а точки C_1 та C – відносно сторони AB трикутника ABC . Знайдіть величину кута AC_1B , якщо точки A_1, B, C_1 лежать на одній прямій і $A_1B = 2BC_1$.

4. У стіні коридору замку є 2008 закритих дверей. Один за одним 2008 сторожів починають рухатися з початку коридору до його кінця. При цьому перший сторож відкриває всі двері, другий змінює положення кожних других дверей, третій – положення кожних третіх дверей, і так далі. Скільки дверей буде відкрито після проходження всіх сторожів?

5. Довести, що число $\sqrt{\sqrt{19} - \sqrt{3 - 8\sqrt{35 - 8\sqrt{19}}}}$ ціле

9 клас

1. Про натуральні числа x, y, z висловлено такі три твердження: а) $x + y + 2z$ – просте число; б) $x + 2y + z$ – просте число; в) $2x + y + z$ – просте число. Доведіть, що принаймні одне з цих тверджень хибне.

2. Перевірте, чи для кожного додатного числа a хоч одне з чисел $\frac{a^9 + 2}{a^2}$, $\frac{a^9 + 2}{a^3}$, $\frac{1}{a^4}$ не менше від 2.

3. Всередині опуклого п'ятикутника довільним чином вибрали дві точки. Доведіть, що існує чотирикутник з вершинами у вершинах п'ятикутника, в якому знаходяться обидві вибрані точки.

4. Не користуючись калькулятором, обчисліть значення виразу

$$A = \sqrt[3]{\frac{a+1}{2} + \frac{a+3}{6}} \cdot \sqrt{\frac{4a+3}{3}} + \sqrt[3]{\frac{a+1}{2} - \frac{a+3}{6}} \cdot \sqrt{\frac{4a+3}{3}}$$

при $a = 2008$.

5. Доведіть, що діаметр круга, вписаного в рівнобічну трапецію, є середнє пропорційне між основами трапеції.

10 клас

1. Знайти множину всіх точок на площині, координати (x, y) яких задовольняють умову: $x^2 + 4y^2 + 1 = 4|xy| - 2|x| + 4|y|$.

2. Дослідіть кількість розв'язків рівняння

$$\sqrt{x^2 - 6x + 10} + \sqrt{x^2 - 6x + 18} = a$$

в залежності від значень параметра a .

3. Знайдіть найменше значення виразу $A = x^{2007} + x + \frac{2008}{x}$ на інтервалі $(0, +\infty)$.

4. Точки M, N, K вибрані відповідно на сторонах AB, BC, CA гострокутного трикутника ABC так, що $\angle AMK = \angle BMN = \angle ACB$.

Нехай L – точка перетину AN та BK . Довести, що точки C, K, L, N лежать на одному колі.

5. Чи існує таке натуральне число n , що сума $1+2+\dots+n$ закінчується на 2008? У випадку існування вказати хоч одне таке n .

11 клас

1. Дослідити кількість розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} y - |x| - |x - 4| = 0, \\ y + x^2 - 4x = a^2 - 2a - 3 \end{cases}$$

у залежності від значень параметра a .

2. Чи можна серед чисел 1, 2, 3, ..., 11 вибрати такі два числа, добуток яких дорівнює сумі решти дев'яти чисел?

3. Знайти всі такі функції $f: R \rightarrow R$, що для будь-яких дійсних x, y виконується рівність $f(x \cdot f(y)) = x^2 y^4$.

4. У чотирикутник $ABCD$ можна вписати і навколо нього можна описати коло. Знайти площу цього чотирикутника, якщо $AB = 1, DC = 2, CD = a$.

5. Для кожного натурального n доведіть нерівність

$$\sqrt{1 \cdot (4n - 1)} + \sqrt{2 \cdot (4n - 2)} + \dots + \sqrt{(2n - 1) \cdot (2n + 1)} < \pi n^2.$$

2009 рік

7 клас

1. У супермаркеті введені знижки. За купівлю товарів на суму від 300 гривень, покупець отримує знижку 4%, а при покупці товарів на суму від 600 гривень, він отримує знижку 10%. На яку найбільшу суму (з точністю до копійки) зможе придбати товарів покупець, якщо у нього у кишені: а) 594 гривні; б) 534 гривні?

2. Шахівниця розміром 7×7 пофарбована у шаховому порядку (усі кутові клітини чорні). По шахівниці ходить фішка, яка може ходити з клітини на сусідню по стороні клітину. Якщо фішка попадає на

2	4		
	8	16	
		20	25
			15

деяку клітину, то ця клітина змінює свій колір на протилежний. На початку фішка стоїть у лівому нижньому куті. Чи можна за допомогою ходів цієї фішки перефарбувати усі клітини дошки у чорний колір?

3. Усі числа від 1 до 2009 у довільному порядку написали в рядок у вигляді одного числа. Чи може одержане число бути квадратом цілого числа?

4. Прямокутник розбитий на 16 різних прямокутників, у яких невідомі довжини сторін. Відома площа сімох малих прямокутників, які утворилися внаслідок розбиття. Їх площі наведені на рисунку. Знайти площу усього заданого великого прямокутника. Відповідь обґрунтувати.

8 клас

1. Знайдіть найбільше трицифрове число, яке задовольняє такі три умови:

- 1) саме число є простим;
- 2) число, записане тими ж самими цифрами у зворотному порядку також є простим;
- 3) добуток цифр цього числа є простим.

2. Цілі числа a, b, c задовольняють умову $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$.

Доведіть, що число $a^2 + b^2 + c^2$ є квадратом деякого цілого числа.

3. Усі числа від 1 до 2009 у довільному порядку написали в рядок у вигляді одного числа. Чи може одержане число бути квадратом цілого числа?

4. Шахівниця розміром 7×7 пофарбована у шаховому порядку (усі кутові клітини чорні). По шахівниці ходить фішка, яка може ходити з клітини на сусідню по стороні клітину. Якщо фішка попадає на деяку клітину, то ця клітина змінює свій колір на протилежний. На початку фішка стоїть у лівому нижньому куті. Чи можна за допомогою цієї фішки перефарбувати усі клітини дошки у чорний колір?

5. Задано трикутник $A_1A_2A_3$ та точка X , яка не належить жодній з прямих, які містять сторони трикутника. Нехай l_i – пряма, яка проходить через точку A_i перпендикулярно до прямої XA_i , $i=1,2,3$. Нехай B_1 є точкою перетину прямих l_2, l_3 , B_2 – точка перетину прямих l_3, l_1 , а точка B_3 є перетином прямих l_1, l_2 , а точки H_1, H_2, H_3 – точки перетину висот трикутників $B_1A_2A_3$, $B_2A_3A_1$, $B_3A_1A_2$ відповідно. Довести, що трикутники $A_1A_2A_3$ та $H_1H_2H_3$ рівні.

9 клас

1. Розв'яжіть систему рівнянь:
$$\begin{cases} \frac{9}{2(x+y)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \\ \sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{3 - y^2}. \end{cases}$$

2. Знайти найменше натуральне число, добуток цифр якого складає 320.

3. Довести, що для будь-яких дійсних чисел $a, b \in [-1, 1]$ справджується нерівність $a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2} \leq 1$.

4. Задача 5, 8 клас.

5. Шахівниця розміром 2009×2009 пофарбована у шаховому порядку (усі кутові клітини чорні). По шахівниці ходить фішка, яка може ходити з клітини на сусідню по стороні клітину. Якщо фішка попадає на деяку клітину, то ця клітина змінює свій колір на протилежний. На початку фішка стоїть у лівому нижньому куті. Чи можна за допомогою цієї фішки перефарбувати усі клітини дошки у чорний колір, якщо ходити відразу у зворотному напрямі заборонено?

10 клас

1. Пряма l_1 перетинає параболу $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) у двох точках A і B . Пряма l_2 , паралельна прямій l_1 , перетинає цю параболу в точках C і D . Довести, що сума абсцис точок A і B дорівнює сумі абсцис точок C і D .

2. а) Відомо, що для натуральних чисел a, b, c, d кожне з чисел ab, bc, cd, da є кубом натурального числа. Чи обов'язково кожне з чисел a, b, c, d також є кубом натурального числа.

б) Відомо, що для натуральних чисел a, b, c, d, e кожне з чисел ab, bc, cd, de, ea є кубом натурального числа. Чи обов'язково кожне з чисел a, b, c, d, e також є кубом натурального числа.

3. На папері у клітинку виділено квадрат 2009×2009 . Два гравці по черзі зафарбовують у жовтий колір одиничні відрізки, які є межами одиничних квадратів, що розташовані всередині чи на межі виділеного квадрату та ще не були зафарбовані. Перемагає той гравець, після ходу якого вперше з'являється одинична клітинка, усі чотири сторони якої зафарбовані у жовтий колір. Хто перемагає у цій грі при правильній грі обох – той, хто починає, чи його суперник?

4. У трикутнику ABC проведено бісектриси AH та BV , які перетинаються між собою у точці I , а також перетинають описане навколо трикутника ABC коло у точках E та D відповідно. Відрізок DE перетинає сторони AC і BC у точках F і K відповідно. Довести, що чотирикутник $IKCF$ – ромб.

5. Задача 3, 9 клас.

11 клас

1. Порівняйте числа:

$$\sqrt{2008 + \sqrt{2009}} + \sqrt{2009 + \sqrt{2008}} \quad \text{та} \quad \sqrt{2008 + \sqrt{2008}} + \sqrt{2009 + \sqrt{2009}}.$$

2. Знайдіть усі натуральні значення n , при яких число 3π є періодом функції $f(x) = \cos nx \cdot \sin \frac{2009x}{n^2}$.

3. Задача 4, 10 клас.

4. Назвемо заповнення квадрата 2009×2009 , розбитого на одиничні квадратики, «правильним», якщо його заповнено числами $1, 2, \dots, 2009$ таким чином, що у кожному рядку та у кожному стовпчику присутнє кожне з цих чисел. Розглянемо відстань від центральної клітини до найближчої клітини з числом 1 (під

відстанню розуміється найменше число ходів, які потрібні шаховому королю, щоб дістатись до клітинки). Яке найбільше значення може набувати така відстань?

5. Чи існує такий многочлен $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, $|c| \leq 2009$, усі три корені якого цілі числа та $|f(34)|$ – просте число?

2010 рік

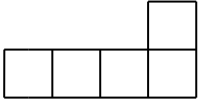
I тур

7 клас

1. У виразі $12-11-10-9-8-7-6-5-4-3-2-1$ певним чином розставили дужки та порахували значення отриманого виразу. Яке найбільше значення могли отримати? Відповідь обґрунтуйте.

2. Знайдіть найменше натуральне число $n > 100$ таке, що серед чисел $n-100, n-99, \dots, n-1, n, n+1, \dots, n+99, n+100$ (усього чисел 201) найбільшу суму цифр має число n . Відповідь обґрунтуйте.

3. Кожна з дівчинок – Оксана, Олеся, Оля та Олександра – одержала прямокутник розміром 2010×10 . Їм запропонували прямолінійним розрізом розрізати цей прямокутник на дві частини таким чином, щоб з цих частин, не накладаючи їх одна на другу, можна було скласти трикутник. Усі вони справилися із завданням. Чи могли вони отримати чотири попарно різні трикутники?

4. Яку найбільшу кількість фігурок вигляду  можна розташувати у квадраті розміром 8×8 так, щоб вони не накладались одна на іншу? Відповідь обґрунтуйте.

8 клас

1. У виразі $2010-2009-2010-2009-\dots-2010-2009$ (всього 2010 чисел) певним чином розставили дужки та порахували значення отриманого виразу. Яке найбільше значення могли отримати? Відповідь обґрунтуйте.

2. Олеся та Андрій кидають по одному разові стандартний гральний кубик. Знайдіть ймовірність того, що кількість очок у Олесі більша, ніж кількість очок, які випали у Андрія. Відповідь обґрунтуйте.

3. При яких натуральних n серед чисел $n, n+1, n+2, \dots, n^2$ можна вибрати чотири попарно різні числа a, b, c, d , для яких виконується рівність $ab = cd$. Відповідь обґрунтуйте.

4. У гострокутному трикутнику ABC точки M та N – середини сторін AB та AC відповідно. Для довільної точки S , що лежить на стороні BC , доведіть нерівність $(MB - MS)(NC - NS) \leq 0$.

5. Чи існують такі попарно різні натуральні числа a_1, a_2, \dots, a_k , більші від 1, для яких виконується рівність

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k = 2010 \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_k} \right):$$

а) якщо $k = 2$; б) якщо $k = 12$?

9 клас

1. Побудуйте графік рівняння $\frac{x}{|x|} + \frac{|y|}{y} = 2y$.

2. Прямокутник розміром 2010×11 розбито на одиничні квадратики. Зовнішній шар клітин цього прямокутника товщиною в одну клітинку пофарбовано у жовтий колір, а шар клітин товщиною в одну клітинку, який межує з зовнішнім шаром, пофарбовано у блакитний колір. Наступний шар клітин, який межує з блакитним, пофарбовано у жовтий колір, і так далі. Знайдіть кількість жовтих та блакитних клітин у цьому прямокутнику.

3. При яких x значення функції $y = (\sqrt{x})^{2009} + (\sqrt{1-x})^{2010}$ є цілим числом?

4. Точка O – центр описаного кола гострокутного трикутника ABC . Пряма AO перетинає сторону BC в точці D

так, що $OD = BD = \frac{1}{3}BC$. Знайдіть кути трикутника ABC .

5. Число $n > 2010$ задовольняє умову: для кожного $k \in \{1, 2, \dots, n - 2010\}$ числа $n + k$ та $2010 + k$ є взаємно простими. Знайдіть усі такі числа n .

10 клас

1. Розглянемо чотирицифрове число, а також число, записане тими ж цифрами у зворотному порядку. Яку найбільшу кількість цифр 5 може мати у своєму записі модуль різниці цих чисел?

2. Розв'яжіть рівняння

$$(x+1)^5 + (x+1)^4(x-1) + (x+1)^3(x-1)^2 + (x+1)^2(x-1)^3 + (x+1)(x-1)^4 + (x-1)^5 = 0.$$

3. Всередині квадрата $ABCD$ вибрано точку O . Квадрат $A'B'C'D'$ – образ квадрата $ABCD$ при гомотетії з центром у точці O та коефіцієнтом $k > 1$ (точки A', B', C', D' є образами точок A, B, C, D відповідно). Доведіть, що сума площ чотирикутників $A'ABB'$ та $C'CDD'$ дорівнює сумі площ чотирикутників $B'BCC'$ та $D'DAA'$.

4. Дійсні числа x, y, z задовольняють умову

$$\frac{1}{xy} = \frac{y}{z-x+1} = \frac{2}{z+1}.$$

Доведіть, що одне з чисел є середнім арифметичним двох інших.

5. Вчителька розсадила за круглим столом своїх учнів, серед яких було втричі менше хлопчиків, ніж дівчаток. Виявилось, що серед усіх пар учнів, які сидять поруч, пар дітей одної статі у два рази більше, ніж пар дітей різної статі. При якій мінімальній кількості дітей за столом це могло трапитися?

11 клас

1. Знайдіть всі натуральні значення n , при яких виконується рівність $-2^0 + 2^1 - 2^2 + 2^3 - 2^4 + \dots - (-2)^n = 4^0 + 4^1 + 4^2 + \dots + 4^{2010}$.

2. У кубі розміром $11 \times 11 \times 11$ зовнішній шар одиничних кубиків пофарбовано у жовтий колір, наступний шар, що дотикається до цього зовнішнього жовтого, фарбується у блакитний колір, наступний шар – знову у жовтий, і так далі. Знайти загальну кількість жовтих та блакитних кубиків.

3. Чотирикутник $ABCD$ з перпендикулярними діагоналями вписаний в коло. Точки K, L, M, Q – точки перетину висот трикутників ABD, ACD, BCD, ABC відповідно. Довести, що чотирикутник $MLKQ$ рівний чотирикутнику $ABCD$.

4. Натуральні числа m, n такі, що число $2^n + 3^m$ ділиться на 5. Доведіть, що число $2^m + 3^n$ також ділиться на 5.

5. Знайдіть невід’ємні розв’язки системи рівнянь

$$\begin{cases} x^2 y^2 + 1 = x^2 + xy, \\ y^2 z^2 + 1 = y^2 + yz, \\ z^2 x^2 + 1 = z^2 + zx. \end{cases}$$

II тур

7 клас

1. Кожна школа делегувала рівно трьох учнів на районну олімпіаду. Андрій, Богдан та Олеся представляли лицей «Кубик». Усіх учасників перед початком олімпіади вишикували в одну лінію і роздали послідовно зліва направо номери учасників. Андрій побачив, що перед ним стільки ж учасників, скільки й після нього. Виявилось, що обидва інших учасники з «Кубика» стоять за ним і мають номери: у Богдана – 19-ий, у Олесі – 28-ий. Скільки шкіл у цьому районі? Відповідь обґрунтуйте.

2. Розріжте квадрат на декілька трикутників таким чином, щоб кожний трикутник мав рівно три сусідні трикутники. При цьому два трикутники вважаються сусідніми, якщо вони мають спільну сторону або спільний відрізок, який є частиною сторони.

3. Доведіть, що існує як завгодно багато натуральних чисел, у яких сума цифр самого числа дорівнює сумі цифр квадрата цього числа, і які не діляться на 10.

4. У кожній з 2010 клітин, розташованих вздовж кола, записане деяке натуральне число. На деяку з клітин ставиться фішка. Далі ця фішка рухається за годинниковою стрілкою за таким правилом. Вона пересувається на кількість клітин, яка дорівнює числу, записаному у вихідній клітині, після чого число у клітині, куди ця фішка прибула збільшується на 1. Далі вона знову рухається за тим самим правилом. Доведіть, що через деякий час фішка побуває у всіх клітинах хоча б по одному разу. Відповідь обґрунтуйте.

8 клас

1. Кожна школа делегувала рівно трьох учнів на районну олімпіаду. Андрій, Богдан та Олеся представляли ліцей «Кубик». Усіх учасників перед початком олімпіади вишикували в одну лінію і роздали послідовно зліва направо номери учасників. Андрій побачив, що перед ним стільки ж учасників, скільки й після нього. Виявилось, що обидва інших учасники з «Кубика» стоять за ним і мають номери: у Богдана – 19-ий, у Олесі – 28-ий. Скільки шкіл у цьому районі? Відповідь обґрунтуйте.

2. Олеся може писати на дошці числа за двома правилами. Для кожного натурального n , яке вже написано на дошці, вона може написати число $3n+13$. Якщо ж записане число є точним квадратом, то вона може також записати квадратний корінь з цього числа. Чи зможе Олеся, використовуючи лише ці два правила, одержати:

- а) число 55, якщо вона починала з числа 256;
- б) число 256, якщо вона починала з числа 55 ?

3. У гострокутному трикутнику ABC кут $\angle B = 30^\circ$, H – точка перетину його висот. Позначимо через O_1 та O_2 центри кіл, вписаних у трикутники ABH та CBH відповідно. Знайдіть у градусах величину кута між прямими AO_2 та CO_1 .

4. У кожній з 2010 клітин, розташованих вздовж кола, записане деяке натуральне число. На деяку з клітин ставиться фішка. Далі ця фішка рухається за годинниковою стрілкою за таким правилом. Вона пересувається на кількість клітин, яка дорівнює числу,

записаному у вихідній клітині, після чого число у клітині, куди ця фішка прибула збільшується на 1. Далі вона знову рухається за тим самим правилом. Доведіть, що через деякий час фішка побуває у всіх клітинах хоча б по одному разу. Відповідь обґрунтуйте.

9 клас

1. На дошці записано 16 послідовних натуральних чисел. Андрійко підрахував добуток записаних чисел, а Олеся – суму. Чи могло так трапитись, що у Андрійка та Олесі співпали:

- три останні цифри результату;
- чотири останні цифри результату?

2. Олеся може писати на дошці числа за двома правилами. Для кожного натурального n , яке вже написано на дошці, вона може написати число $3n+13$. Якщо ж записане число є точним квадратом, то вона може також записати квадратний корінь з цього числа. Чи зможе Олеся, використовуючи лише ці два правила, одержати:

- число 55, якщо вона починала з числа 256;
- число 256, якщо вона починала з числа 55 ?

3. У гострокутному трикутнику ABC кут $\angle B = 30^\circ$, H – точка перетину його висот. Позначимо через O_1 та O_2 центри кіл, вписаних у трикутники ABH та CBH відповідно. Знайдіть у градусах величину кута між прямими AO_2 та CO_1 .

4. Для додатних чисел a, b, c доведіть нерівність:

$$\frac{a^2(b+c-a)}{b+c} + \frac{b^2(c+a-b)}{c+a} + \frac{c^2(a+b-c)}{a+b} \leq \frac{ab+bc+ca}{2}.$$

10 клас

1. Задача 1, 9 клас.

2. У змаганнях бере участь 2010 програмістів. У кожному раунді всі програмісти поділяються на дві команди з рівною кількістю учасників. Знайдіть мінімальну кількість раундів, які повинні пройти, щоб кожні два програмісти принаймні у одному з раундів були у різних командах.

3. Задача 4, 9 клас.

4. На площині задані точки $A \neq B$. Точка C рухається по площині таким чином, що $\angle ACB = \alpha$, де α – фіксований кут з проміжку $(0^\circ, 180^\circ)$. Вписане у трикутник ABC коло має центр у точці I та дотикається сторін AB, BC, CA у точках D, E, F відповідно. Прямі AI та BI перетинають пряму EF у точках M та N відповідно. Покажіть, що:

а) відрізок MN має сталу довжину;

б) усі описані кола трикутників DMN , мають спільну точку.

11 клас

1. На параболі $y = ax^2$ обрані дві точки A та B . Точка P – середина відрізка AB . У точках A та B до параболи проведено дотичні, які перетинаються у точці T . Доведіть, що середина відрізка PT належить параболі.

2. Задача 2, 10 клас.

3. Знайти всі пари натуральних чисел $m > 1, n > 1$, для яких $n^3 - 1$ ділиться на $mn - 1$.

4. Задача 4, 10 клас.

2011 рік

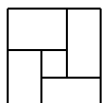
I тур

7 клас

1. Олеся записала натуральне число N . Після цього Андрійко записав одну шосту, одну п'яту, одну четверту, одну третю та одну другу числа N . Виявилось, що сума всіх записаних чисел є цілим числом. Яке найменше число могла записати Олеся?

2. До натурального числа N справа дописали дві різні ненульові цифри. Виявилось, що отримане число ділиться націло на N . При якому найбільшому N це можливо?

3. Квадрат розрізаний на чотири однакових прямокутники та один квадрат, як це показано на малюнку справа. Відомо,



що площа меншого квадрата дорівнює 16, а площа кожного прямокутника – 96. Визначте сторони прямокутника.

4. Є 10 куп камінців, у яких знаходяться відповідно 3, 4, 5, ..., 12 камінців. За один хід дозволяється обрати довільні три купки камінців та додати в одну з них 1 камінець, у другу – 2 камінці, у третю – 3 камінці, або обрати довільні три купки камінців та забрати з однієї з них 1 камінець, з другої – 2 камінці, з третьої – 3 камінці при умові, що в обраних купках є достатня кількість камінців. Чи можна за скінченну кількість ходів отримати у кожній купці рівно по 2011 камінців?

8 клас

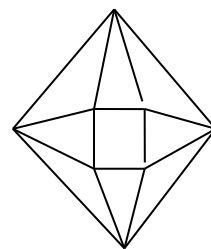
1. Відмінниці Олесі задали додому обчислити суму двох звичайних нескоротних дробів $\frac{a}{b}$ та $\frac{c}{d}$ (не обов'язково правильних). Її однокласник Андрійко хворів і перепитав це завдання телефоном, але не так почув і записав, що треба додавати дроби $\frac{b}{a}$ та $\frac{d}{c}$. Коли він їх додав, то виявилось, що відповіді Олесі та Андрійка співпали. Чи правильно додав свої дроби Андрійко, якщо Олеся отримала відмінну оцінку, а всі чотири дроби були попарно різними?

2. Знайдіть усі цілі числа n , які задовольняють рівність $(n-1)(n-3)(n-5)\dots(n-2011) = n(n+2)(n+4)\dots(n+2010)$.

3. Числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 та b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 є перестановками чисел 1, 2, 3, 4, 5. Доведіть, що серед чисел $a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, a_4b_4, a_5b_5$ принаймні два дають однакову остачу при діленні на 5.

4. У трикутнику ABC проведено медіани AL, BM, CN . Доведіть, що $\angle ANC = \angle ALC$ тоді і лише тоді, коли $\angle ABM = \angle LAC$.

5. У селі 8 будинків, план доріжок між якими зображений справа. По кожній з доріжок дозволено рухатися лише в одному напрямі. Чи можна так установити напрямки руху по доріжках, щоб від будь-якого будинку до будь-якого іншого будинку можна



було дістатися, пройшовши у дозволених напрямках не більше, ніж по двох доріжках?

9 клас

1. Знайдіть усі значення параметра b , при яких для кожного фіксованого x принаймні одна з функцій $f_1(x) = x^2 + 2011x + b$ чи $f_2(x) = x^2 - 2011x + b$ набуває додатного значення.

2. Доведіть, що існує нескінченна кількість квадратів натуральних чисел, які можна подати у вигляді $2^n + 2^m$, де n, m – деякі різні натуральні числа.

3. У волейбольній першості 8 команд грають в одне коло, кожна з кожною рівно 1 раз. За перемогу нараховується 1 очко, за поразку 0 очок, нічийх у волейболі не буває. Якщо по завершенні турніру різниця очок команд, які посіли перше та друге місце, не перевищує 1 очко, то між командами проводиться стикова гра. За аналогічних умов стикові ігри проводяться між командами, які посіли третє та четверте, п'яте та шосте, сьоме та восьме місце. Таким чином максимум може бути проведено 4 стикові ігри. Яка ж найменша кількість стикових ігор може бути проведена, якщо вважати, що навіть при рівній кількості набраних очок у кількох команд по завершенні турніру такі команди посідали різні місця?

4. Трикутник ABC вписаний у коло. У точках A та B проведені дотичні до цього кола, які перетинаються у точці T . Пряма, проведена через точку T паралельно до сторони AC , перетинає сторону BC у точці D . Доведіть, що $AD = CD$.

5. Для невід'ємних чисел a, b, c , сума яких не перевищує 2, доведіть нерівність $ab(a^2 + b^2) + bc(b^2 + c^2) + ca(c^2 + a^2) \leq 8$. Чи може в цій нерівності досягатися рівність?

10 клас

1. Олеся записує у кожній вершині правильної трикутної призми одне з чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6. Андрійко записує на кожному ребрі число, яке дорівнює сумі чисел, записаних Олесею на кінцях цього ребра. Чи може Олеся записати числа так, щоб усі числа, які

запише Андрійко виявилися різними?

2. Відомо, що x_1, x_2, x_3 – попарно різні дійсні числа.

а) Числа x_2, x_3 є нулями функції $f_1(x) = x^2 + p_1x + q_1$, числа x_3, x_1 – нулями функції $f_2(x) = x^2 + p_2x + q_2$, а числа x_1, x_2 – нулями функції $f_3(x) = x^2 + p_3x + q_3$. Чи обов'язково функція $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$ має нулі?

б) Числа x_2, x_3 є нулями функції $f_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$, числа x_3, x_1 – нулями функції $f_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$, а числа x_1, x_2 – нулями функції $f_3(x) = a_3x^2 + b_3x + c_3$. Чи обов'язково функція $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$ має нулі?

3. На площині намальована трапеція $ABCD$ з основами $BC = a$, $AD = 2a$. Користуючись лише лінійкою, побудуйте трикутник, площа якого дорівнює площі трапеції.

4. Числа a_1, a_2, \dots, a_{11} та b_1, b_2, \dots, b_{11} є перестановками чисел $1, 2, \dots, 11$. Доведіть, що серед одинадцяти чисел $a_1b_1, a_2b_2, \dots, a_{11}b_{11}$ принаймні два дають однакову остачу при діленні на 11.

5. Для невід'ємних чисел a, b, c , сума яких не перевищує 2, доведіть нерівність $ab(a^2 + b^2) + bc(b^2 + c^2) + ca(c^2 + a^2) \leq 6$. Чи може в цій нерівності досягатися рівність?

11 клас

1. Розв'яжіть рівняння $\lfloor x^2 \rfloor - 2x + 1 = 0$, якщо $\lfloor x^2 \rfloor$ – найбільше ціле число, яке не перевищує x^2 .

2. Знайдіть усі натуральні числа a та b , різниця яких дорівнює 2011, а добуток – квадрат натурального числа.

3. Є 2012 куп камінців. Перша з них містить 2^0 камінців, друга – 2^1 камінців, третя – 2^2 камінців, і так далі. Остання містить 2^{2011} камінців. За один хід дозволяється обрати довільні три купки камінців та додати в одну з них 2 камінці, у другу – 3

камінці, у третю – 4 камінці, або обрати довільні три купки камінців та забрати з однієї з них 2 камінці, з другої – 3 камінці, з третьої – 4 камінці при умові, що в обраних купках є достатня кількість камінців. Чи можна за скінченну кількість ходів отримати у кожній купці рівно по 3^{1005} камінців?

4. Всередині паралелограма $ABCD$ розташовані кола γ_1 та γ_2 , які дотикаються зовнішнім чином у точці K . Коло γ_1 дотикається до сторін AB та AD паралелограма, а коло γ_2 – до сторін BC та CD . Доведіть, що точка K лежить на діагоналі AC .

5. Знайдіть усі функції $f : R \rightarrow R$, які задовольняють такі дві умови:

1) для всіх дійсних чисел x, y виконується рівність

$$f(2x) = f(x+y)f(y-x) + f(x-y)f(-x-y);$$

2) $f(x) \geq 0$ для всіх дійсних x .

II тур

7 клас

1. Знайдіть найбільше натуральне число, у якого всі цифри різні та кожні дві сусідні цифри відрізняються щонайменше на 2.

2. Використовуючи числа $1, 2, 3, \dots, 20$ рівно по одному разу у ролі чисельників або знаменників, утворіть 10 таких звичайних дробів, щоб їх сума була цілим числом. Достатньо навести принаймні один такий приклад.

3. Чи існує опуклий чотирикутник, у якого протилежні сторони не паралельні, та який можна розрізати на 2011 рівнобедрених трикутників?

4. На дошці розміром 9×9 клітинок на центральному полі стоїть чорна фішка, а на середніх клітинках зовнішньої межі квадрату шириною в одну клітинку стоять 4 білі фішки. Перший гравець грає чорною фішкою і за один хід має право пересунути її на будь-яку сусідню клітинку по горизонталі чи по вертикалі, якщо на ній не стоїть біла фішка. Другий гравець своїм ходом виставляє

додатково одну білу фішку на зовнішній межі квадрату, але обов'язково на таке поле, яке межує з полем, на якому вже стоїть біла фішка. Виграє перший гравець, якщо йому вдалося досягти зовнішньої межі квадрату. Якщо другий гравець зміг цьому завадити, то перемагає він. Хто перемаже у такій грі, перший чи другий гравець?

5. Знайдіть усі двоцифрові числа N , які дорівнюють сумі цифр числа N , до якої додається куб суми цифр числа N .

8 клас

1. Знайдіть найбільше парне натуральне число, у якого всі цифри різні та кожні дві сусідні цифри відрізняються щонайменше на 2.

2. Знайдіть попарно різні натуральні числа a, b, c, d такі, що

$$\frac{1}{2011} = \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} - \frac{c}{c+1} - \frac{d}{d+1}.$$

Достатньо вказати хоч один набір таких чисел.

3. На сторонах AD та BC квадрата $ABCD$ вибрані точки M та N відповідно таким чином, що $AM = BN$. Точка X – основа перпендикуляра, опущеного з точки D на пряму AN . Доведіть, що кут MXC – прямий.

4. На дошці розміром 11×11 клітинок на центральному полі стоїть чорна фішка, а на середніх клітинках зовнішньої межі квадрату шириною в одну клітинку стоять 4 білі фішки. Перший гравець грає чорною фішкою і за один хід має право пересунути її на будь-яку сусідню клітинку по горизонталі чи по вертикалі, якщо на ній не стоїть біла фішка. Другий гравець своїм ходом виставляє додатково одну білу фішку на зовнішній межі квадрату, але обов'язково на таке поле, яке межує з полем, на якому вже стоїть біла фішка. Виграє перший гравець, якщо йому вдалося досягти зовнішньої межі квадрату. Якщо другий гравець зміг цьому завадити, то перемагає він. Хто перемаже у такій грі, перший чи другий гравець?

5. Натуральне число $k > 1$. Знайдіть усі пари цілих чисел x, y , які задовольняють рівність $y^k = x^2 + x$.

9 клас

1. Знайдіть усі трицифрові числа N , які дорівнюють сумі цифр числа N , до якої додається куб суми цифр числа N .

2. П'ять років тому сумарний вік усіх синів у родині перевищував сумарний вік усіх доньок на 2 роки. З того часу у сім'ї народилася ще одна дитина, і тепер сумарний вік усіх доньок перевищує сумарний вік усіх синів на 2 роки. На скільки відрізнялися сумарний вік синів і сумарний вік доньок у родині два роки тому?

3. На папері у клітинку зі стороною 1 задано замкнену ламану без самоперетинів. Усі вершини ламаної лежать у вузлах сітки, а всі її ланки утворюють кут 45° із лініями сітки. При цьому площа фігури, яку вона обмежує, дорівнює 8. Скільки вузлів сітки може лежати всередині (не на межі) ламаної?

4. У двох колах, які дотикаються зовнішнім чином у точці C , провели співнаправлені діаметри A_1A_2 та B_1B_2 відповідно (тобто чотирикутник $A_1B_1B_2A_2$ є трапецією або паралелограмом). Коло з центром O на спільній внутрішній дотичній до даних двох кіл проходить через точку перетину прямих A_1B_2 та B_1A_2 і перетинає ці прямі у точках M та N відповідно. Доведіть, що пряма MN перпендикулярна до паралельних діаметрів A_1A_2 та B_1B_2 .

5. Натуральне число $k > 1$. Знайдіть усі пари цілих чисел x, y , які задовольняють рівність $y^k = x^2 + x$.

10 клас

1. Сума кількох послідовних натуральних чисел (більше одного) дорівнює 2011. Знайдіть усі набори таких чисел.

2. Послідовність (a_n) визначається такими умовами:

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = (n+1)(a_n + a_{n+1}), n \in N.$$

На скільки нулів закінчується число a_{2011} ?

3. На столі лежать цукерки. За один хід Петрик може забрати зі столу кілька з них. Першим ходом він забирає одну цукерку, а кожного наступного ходу може забрати або стільки ж цукерок, як підчас попереднього ходу, або вдвічі більше. За яку найменшу кількість ходів Петрик зможе забрати зі столу рівно 2011 цукерок?

4. Задача 4, 9 клас.

5. Відомо, що для натуральних чисел m, n виконується рівність $m + n = НСК(m, n) + НСД(m, n)$. Доведіть, що одне з цих чисел кратне іншому.

11 клас

1. При якому найменшому натуральному n вираз $n^3 + n^2 + 330n + 330$ ділиться націло на 2011?

2. Для додатних чисел a, b, c доведіть нерівність

$$(a+1)^2 + (b+1)^2 + (c+1)^2 \geq 3(1 + a\sqrt[3]{b} + b\sqrt[3]{c} + c\sqrt[3]{a}).$$

3. Задача 3, 10 клас.

4. У трьох колах, які попарно дотикаються зовнішнім чином, провели співнапрямлені діаметри A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 (тобто кожен з чотирикутників $A_1B_1B_2A_2$ та $A_1C_1C_2A_2$ є паралелограмом або трапецією, у якої відрізок A_1A_2 є основою). Доведіть, що прямі A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2 перетинаються в одній точці.

5. Задача 5, 10 клас.

2012 рік

I тур

7 клас

1. Яке з двох наступних чисел більше:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 18 \cdot 19 \quad \text{або} \quad (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 16 \cdot 18)^2 ?$$

2. На прямій дано чотири різні точки, які утворюють шість різних відстаней між собою. Чи може статися так, що ці відстані дорівнюють 1 см, 2 см, 3 см, 6 см, 12 см та 18 см ?

3. У шерензі стоять 2012 людей, кожен з яких або лицар (що завжди говорить правду), або брехун (що завжди бреше). Кожен з

них сказав: «Кількість брехунів зліва від мене більша за кількість лицарів справа від мене». Скільки брехунів у цій шерензі?

4. На початку гри дано купку, в якій лежать 2012 камінців. Двоє гравців по черзі беруть з неї камінці – починаючий при кожному ході бере 1 або 4 камінці на свій розсуд, другий при кожному ході бере 1 або 3 камінці (також на свій розсуд). Той, хто не зможе зробити хід, програє. Хто з гравців може забезпечити собі виграш?

8 клас

1. На площині дано 6 прямих, жодні три з яких не проходять через одну точку. Чи може трапитись так, що вони мають: а) рівно 12 різних точок перетину; б) рівно 16 різних точок перетину?

2. У числі $34! = 295232799039*0414084761860964352000000*$ дві цифри у записі замінені на зірочки. Які саме цифри було замінено? (Тут $34!$ позначає добуток $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 33 \cdot 34$.)

3. Десятковий запис натуральних чисел A і B має вигляд: $A = \overline{abcabc}$ і $B = \overline{d00d}$, де a, b, c, d – цифри, $a \neq 0$, $d \neq 0$. Знайти усі такі цифри a, b, c, d , щоб число $A + B$ було квадратом деякого натурального числа.

4. На сторонах гострокутного трикутника зовні нього як на основах, побудували рівнобедрені трикутники $AХВ$, $ВУС$, $СZА$, для яких $\angle AХВ = \angle ВУС = 120^\circ$, а $\angle CZA = 60^\circ$. Доведіть, що $ХУ \perp ВZ$.

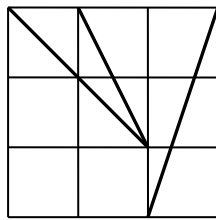
5. Є 10 карток. На кожній з них з обох сторін написано по одному натуральному числу: на першій – числа 1 і 2, на другій – числа 3 і 4, ..., на десятій – числа 19 і 20. Усі ці картки розташовані в ряд на довгому столі. Двоє гравців грають у таку гру. За один хід гравець довільно обирає п'ять карток і перевертає їх. Програє той гравець, після ходу якого на столі з'явиться розташування чисел, що вже зустрічалося у ході гри (можливо, в початковий момент). Хто має можливість забезпечити собі виграш – той, хто починає гру, чи його суперник?

9 клас

1. На площині дано 5 кіл, жодні три з яких не проходять через одну точку. Чи може трапитись так, що вони мають: а) рівно 12 різних точок перетину; б) рівно 24 різні точки перетину?

2. Графік функції $y = f(x)$ симетричний до графіка функції $y = x^2$ відносно точки з координатами $(1;1)$. Розв'яжіть рівняння $f(x) = x^2$.

3. На клітчастому папері намальовані два кути (див. малюнок нижче). Доведіть, що ці кути рівні.



4. Доведіть, що для натуральних n значення виразу $5^{2n+1} + 2^{n+4} + 2^{n+1}$ кратне 23.

5. Задача 5, 8 клас.

10 клас

1. У числі $34! = 295232799039 \cdot 0414084761860964352 \cdot 000000$ дві цифри у записі замінено на зірочки. Які саме цифри було замінено? Відповідь обґрунтуйте. (Тут $34!$ позначає добуток $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 33 \cdot 34$.)

2. Графік функції $y = f(x)$ симетричний до графіка функції $y = x^2$ відносно точки з координатами $(1;1)$. Розв'яжіть рівняння $f(f(x)) = f(x)$.

3. Для $x, y, z \in (2, +\infty)$. знайдіть найменше значення виразу

$$A = \frac{x^4}{(y-2)(z-2)} + \frac{y^4}{(z-2)(x-2)} + \frac{z^4}{(x-2)(y-2)},$$

4. На числовій прямій відзначили точки з координатами $1, 2, 3, \dots, n$, де $n > 3$ – задане натуральне число. Блоха починає стрибати із точки з координатою 1 і через $2n$ стрибків, побувавши

в усіх відмічених точках, повертається в точку з координатою 1. Відомо, що сума довжин усіх стрибків за виключенням останнього дорівнює $n(2n-1)$. Знайдіть довжину останнього стрибка блохи.

5. На сторонах AB і AC гострокутного трикутника ABC зовні його побудовані трикутники ABC_1 та AB_1C так, що $\angle BAC_1 = \angle B_1AC = 30^\circ$ та $\angle AC_1B = \angle CB_1A = 60^\circ$, а всередині трикутника ABC взяли точку A_1 таку, що $\angle CBA_1 = \angle BSA_1 = 30^\circ$. Доведіть, що точки A_1, B_1, C_1 лежать на одній прямій.

11 клас

1. Задача 1, 10 клас.

2. Доведіть, що на графіку функції $f(x) = x^4$ можна вказати таку точку A , а на графіку функції $g(x) = x^4 + x^2 + x + 1$ – таку точку B , що відстань між точками A та B менша за $0,01$.

3. Задача 5, 10 клас.

4. Знайдіть усі прості числа p такі, що $p^5 - p = 2n!$, де n – натуральне число, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$.

5. Хуліган Петро розрізав прямокутний портрет директора школи по прямій. Після цього він розрізав по прямій один зі шматків, що утворилися. Потім він зробив те саме з одним із нових шматків, і так далі. Після сотні таких розрізань з'явився директор школи і змусив Петра сплатити по дві копійки за кожен трикутний шматок та по копійці за кожен чотирикутний шматок портрета. Доведіть, що Петро сплатить більше гривні.

II тур

7 клас

1. Відомо, що олівець та ручка разом коштують більше, ніж один зошит, а олівець та зошит разом – більше, ніж три ручки. Що дорожче – олівець чи ручка?

2. Дано 11 монет, серед яких 5 справжніх (однакових за вагою) та 6 фальшивих. Фальшиві монети можуть відрізнятися за вагою одна від одної, бути легшими або важчими за справжні (але

обов'язково відрізняються за вагою від справжніх монет). Як з допомогою терезів з двома чашками без гир виявити хоча б одну фальшиву монету?

3. Квадрат 11×11 розбито на частини розмірами 4×4 , 1×3 та 3×1 (не обов'язково всі ці розміри частин зустрічаються в розбитті). Доведіть, що знайдеться хоча б один рядок початкового квадрата, що перетинає непарну кількість з цих частин.

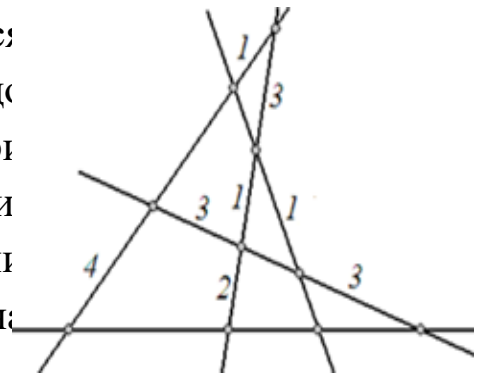
4. Нехай $S(a)$ позначає суму цифр десяткового запису натурального числа a . Про натуральне число n відомо, що $S(n) = 503$, а $S(121n) = 2012$. Знайдіть усі можливі значення $S(11n)$.

8 клас

1. На дошці написано натуральне число. Кожної хвилини Андрійко дивиться на годинник і додає до написаного числа число хвилин на годиннику (ціле значення від 0 до 59 включно). Доведіть, що колись на дошці буде написане складене число.

2. Задача 3, 7 клас.

3. П'ять прямих перетинаються попарно (див. малюнок справа). Відомо, що всі довжини відрізків, отриманих при перетині прямих, є натуральними числами. Чи можливо отримати вказані довжини відрізків такими, як це показано на малюнку?



4. Дано квадратний тричлен $2013x^2 + 2012x + 2011$. Двоє грають у таку гру. Вони ходять по черзі. За один хід гравець може відняти від наявного многочлена один із таких многочленів: x^2 , x , $x^2 - x + 1$ чи $x^2 + x - 1$. Програє гравець, після ходу якого отримується многочлен з цілочисловим коренем. Хто може забезпечити собі виграш – той, хто починає гру, чи його суперник?

9 клас

1. Про функції f і g відомо, що

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & \text{якщо } x > 1, \\ |x| + 2, & \text{якщо } x \leq 1; \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{якщо } x \geq 1, \\ -x + 2, & \text{якщо } x < 1. \end{cases}$$

Побудуйте графік функції $y = f(g(x))$.

2. Чи можна записати цілі числа 1,2,3,4,5,6,7,8 у вершинах правильного восьмикутника (по одному біля кожної вершини) так, щоб сума чисел біля будь-яких трьох послідовних вершин восьмикутника була більшою: а) 11; б) 12?

3. Задача 3, 8 клас.

4. Задача 4, 8 клас.

10 клас

1. Знайдіть усі дійсні x , для яких виконується рівність

$$\left\{ 3 \left\{ 3 \left\{ 3 \left\{ 3 \left\{ 3x \right\} \right\} \right\} \right\} \right\} = x.$$

(Тут $\{a\}$ означає дробову частину числа a .)

2. Про натуральне число n відомо, що сума його цифр дорівнює 404, а сума цифр числа $2012n$ дорівнює 2011. Знайдіть усі значення, яких може набувати сума цифр числа $2011n$. Відповідь обґрунтуйте.

3. На сторонах AB і CD трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) обрано відповідно такі точки K і L , що $\angle BKC = \angle AKD$, $\angle BLC = \angle ALD$. Доведіть, що точки K і L рівновіддалені від точки перетину діагоналей трапеції.

4. На дошці записані (саме у такому порядку) два числа a і b . Андрійко ліворуч від a пише число $\frac{a+1}{b}$, після чого витирає число b . Потім він робить таку саму операцію з утвореною парою чисел, і так далі. а) Якщо $a = 20$, а $b = 12$, які числа буде написано на дошці після 2012 таких операцій? б) За яких значень a і b всі числа, які одержить Андрій, будуть натуральними? Відповіді обґрунтуйте.

11 клас

1. Задача 1, 10 клас.

2. Нехай α і β – такі гострі кути, що $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta < 1$.
Доведіть, що $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta < \sin^2 (\alpha + \beta)$.

3. Задача 2, 10 клас.

4. У паралелограмі $ABCD$ провели діагональ AC . Вписане коло трикутника ABC дотикається до його сторін AB , BC і AC відповідно у точках M , N і K . Пряма MK перетинає пряму CD у точці P , а пряма NK перетинає пряму AD у точці Q . Нехай E і F – середини відрізків MP і NQ відповідно. Доведіть, що точки B , E і F лежать на одній прямій.

2013 рік

7 клас

1. Знайдіть усі такі чотирицифрові числа \overline{abcd} , для яких виконується рівність $\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} + a = 2013$.

2. Серед 25 монет є рівно 2 фальшиві. Є чарівна скринька, в яку можна покласти 2 монети, і вона покаже кількість фальшивих монет у цій парі. Покажіть, як можна визначити обидві фальшиві монети не більше, ніж за 14 таких операцій.

3. Андрійко, Миколка, Оленка, Сергійко і Даринка посіли п'ять перших місць на математичній олімпіаді (жодне з місць не було розділено між декількома учасниками). Кожен з них знає, яке місце він зайняв. Оленка знає, що різниця місць Сергійка й Андрійка (у вказаному порядку) дорівнює двом. Також вона знає, що Даринка зайняла не перше місце, і тому Оленка може відновити розподіл місць між цією п'ятіркою учасників олімпіади. Яке місце зайняла Даринка.

4. Петрик послідовно виписує в рядок на дошці остачі від ділення деякого натурального числа на 10, 11, 12, ..., 20. Виявилось, що кожне наступне записане число більше за попереднє. Доведіть, що у рядку записано 11 послідовних цілих чисел (тобто кожне наступне число більше за попереднє на 1).

5. Прямокутне приміщення розділене на 16 прямокутних кімнат. Комендант виміряв периметри восьми кімнат. Сім з восьми результатів його вимірювань схематично (тобто без врахування справжніх розмірів кімнат) показано на малюнку праворуч, а результат восьмого позначено через x . Знайдіть значення x .

7		13	
		10	7
10	11		
	5		x

8 клас

1. Чебурашка та Крокодил Гена з'їли торт. Чебурашка їв удвічі повільніше за Крокодила Гену, але почав їсти на хвилину раніше. З'ясувалося, що вони з'їли порівну. За який час Чебурашка сам з'їв би цей торт?

2. Керівник математичного гуртка дав учням завдання виписати у порядку зростання всі чотирицифрові числа \overline{abcd} , в яких $1 \leq a < b < c < d \leq 9$. Яке число буде записаним на 53-му місці?

3. На дошці виписані числа $1, 2, 3, \dots, 4027, 4028$. Миколка та Андрійко по черзі закреслюють числа, причому Миколка ходить першим. За один хід можна закреслити тільки одне з раніше не закреслених чисел. Андрійко хоче, щоб після його 2013-го ходу на дошці залишилися два послідовні числа (тобто числа, різниця яких дорівнює 1). Чи завжди він зможе цього досягти?

4. Дано гострокутний трикутник ABC . Кола k_1 і k_2 проходять через вершину A і дотикаються до прямої BC у точках B і C відповідно. Висота BK трикутника ABC перетинає коло k_1 у точці P , відмінній від точки B , а висота CL перетинає коло k_2 у точці Q , відмінній від точки C . Доведіть, що точки A, P, Q лежать на одній прямій.

5. Знайдіть усі пари простих чисел p і q , для яких число $p^3 + q^2$ є кубом деякого натурального числа.

9 клас

1. Сума двох натуральних чисел дорівнює 20132013, і якщо в одному з них закреслити останню цифру, то отримаємо друге число.

Знайдіть усі пари таких чисел.

2. Відомо, що $a \neq b$ і рівняння $ax^{2013} + x^{2012} + b = 0$ та $bx^{2013} + x^{2012} + a = 0$ мають спільний дійсний корінь. Знайдіть $a + b$.

3. У трапеції $ABCD$ з основами AD і BC , $AD > BC$, діагоналі AC і BD перетинаються у точці E . Дотична до описаного кола трикутника BCE проведена у точці E , перетинає пряму AD у точці F , причому точка D лежить між точками A і F . Відомо, що $AF = a$, $AD = b$. Знайдіть довжину відрізка EF .

4. Доведіть, що для довільних додатних дійсних чисел x, y, z виконується нерівність

$$\frac{x(y-x)}{x+y} + \frac{y(z-y)}{y+z} \leq \frac{z-x}{2}.$$

5. Керівник математичного гуртка намалював на дошці таблицю розміру 30×30 і запропонував учням заповнити її числами $1, 2, \dots, 900$, записуючи щосекунди в якусь порожню клітинку на свій розсуд одне з тих чисел, що не використовувались раніше. Чи зможуть учні виконати завдання так, щоб у будь-який момент часу ані у жодному рядку, ані у жодному стовпці сума всіх записаних чисел не давала остачу 1 від ділення на 3?

10 клас

1. Чи можна зобразити на прямій шість відрізків так, щоб серед будь-яких трьох зображених відрізків знайшлися принаймні два, які мають хоча б одну спільну точку, і кожна точка прямої належала щонайбільше трьом зображеним відріzkам? (Вважається, що кінці відрізків належать самим відріzkам.)

2. Знайдіть усі пари натуральних чисел m і n , для яких виконується рівність $mn - \sqrt{m^2 + n^2} = 7$.

3. Відомо, що додатні дійсні числа x та y задовольняють нерівність $2x + 7y \leq 14$. Доведіть, що $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 3$.

4. Нехай H – точка перетину висот AQ, BL, CP гострокутного трикутника ABC , K – спільна точка відрізків PQ і BH , M –

середина сторони AC , N – середина відрізка BH . Промінь BL перетинає описане коло трикутника ABC у точці D , відмінній від B . Відомо, що $KQ = HQ$. Доведіть, що прямі MN і AD перпендикулярні.

5. По колу записали 672 натуральні числа a_1, a_2, \dots, a_{672} такі, що $a_1 + a_2 + \dots + a_{672} = 2013$ і $a_k \neq 1342$ для всіх $k, 1 \leq k \leq 672$. Доведіть, завжди можна вибрати декілька записаних послідовних чисел, сума яких дорівнює 1342.

11 клас

1. Зобразіть на координатній площині xOy множину всіх точок, координати яких задовольняють рівність

$$\sin x + \cos y = \sin y + \cos x.$$

2. Розв'яжіть рівняння $x^{2013} - x^{2014} = \left\{ \frac{2015 + x}{1 + [x]} \right\}$.

(тут $[a]$ – ціла частина числа a , тобто найбільше ціле число, яке не перевищує a ; $\{a\} = a - [a]$ – дробова частина числа a).

3. У трикутнику ABC $AB = 16$ см, $BC = 25$ см, $AC = 39$ см. Пряма, яка проходить через центр вписаного кола трикутника ABC і середину M сторони BC , перетинає висоту AD цього трикутника у точці P . Знайдіть довжину відрізка AP .

4. Знайдіть усі визначені на множині всіх дійсних чисел числові функції f , що для будь-яких $x \in R$ та $y \in R$ виконується рівність

$$f(xf(y)) + f(y + f(x)) - f(x + yf(x)) = x.$$

5. Нехай x_1 – довільне дійсне число, і для всіх натуральних n виконується рівність $x_{n+1} = \sqrt{7}x_n + 2\sqrt{x_n^2 + 4}$. Доведіть, що серед чисел $x_1, x_2, \dots, x_{2013}$ принаймні 1005 чисел є ірраціональними.

2014 рік

7 клас

1. Відомо, що в понеділок Настя добиралася на автомобілі на роботу більше однієї години. Також відомо, що протягом будь-якої

години руху середня швидкість її автомобіля дорівнювала 80 км/год. Чи могла його середня швидкість протягом усього шляху дорівнювати 100 км/год? Відповідь обґрунтуйте.

2. В Олесі є необмежена кількість цифр 3 та лише одна цифра 4. Вона хоче утворити число, яке б ділилося на найбільшу можливу кількість чисел з множини $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$. Яке найменше число може утворити Олеся? Відповідь обґрунтуйте.

3. У клітини дошки 6×6 можна ставити зірочки (не більше однієї зірочки у клітину) таким чином, щоб у кожному рядку, кожному стовпчику та на кожній з двох діагоналей було не більше, ніж 3 зірочки. Яку максимальну кількість зірочок можна поставити на дошку за таких умов? Відповідь обґрунтуйте.

4. Сторони трикутників ABC та ACD задовольняють такі умови: $AB = AD = 3$ см, $BC = 7$ см, $DC = 11$ см. Які значення може набувати довжина сторони AC , якщо вона дорівнює цілій кількості сантиметрів, є середньою у трикутнику ACD та найбільшою у трикутнику ABC ? Відповідь обґрунтуйте.

8 клас

1. Задача 1, 7 клас.

2. Відомо, що M та N – два послідовні чотирицифрові числа. Яке найбільше значення може набувати різниця між сумами цифр чисел M та N ?

3. Чи можна розставити у комірках таблиці 3×5 числа $1, 2, \dots, 15$ таким чином, щоб:

а) суми чисел в усіх рядках були однакові та суми чисел в усіх стовпчиках були однакові, але, можливо, відмінні від сум чисел у рядках;

б) суми чисел в усіх трьох рядках та в усіх п'ятьох стовпчиках були однакові?

4. Прості числа p, q та натуральні x, y задовольняють умови:

$x < p$, $y < q$ та $\frac{p}{x} + \frac{q}{y}$ – ціле число. Доведіть, що $x = y$.

5. На стороні AB трикутника ABC відзначили точку K . Відрізок CK перетинає медіану AM у точці F . Відомо, що $AK = AF$. Знайдіть відношення $MF : BK$.

9 клас

1. Знайдіть натуральне число n , для якого існує найбільша кількість пар ненульових цифр a та b , що задовольняють умову: $\overline{ab} - \overline{ba} = n$.

2. Два кола c_1 та c_2 проходять через центр O кола c і дотикаються до нього внутрішнім чином у точках A та B відповідно. Доведіть, що на прямій AB лежить спільна точка кіл c_1, c_2 .

3. а) Задача 3 а), 8 клас.

б) Чи можна розставити у комірках таблиці 4×5 числа $1, 2, \dots, 20$ так, щоб суми чисел в усіх рядках були однакові та суми чисел в усіх стовпчиках були однакові, можливо, відмінні від сум у рядках?

4. Знайдіть усі такі натуральні n , для яких числа $12n - 119$ та $75n - 539$ є квадратами натуральних чисел.

5. Дійсні числа a та b задовольняють умову

$$a^{2014} + b^{2014} = a^{2016} + b^{2016}.$$

Доведіть, що справджується нерівність $a^2 + b^2 \leq 2$.

10 клас

1. Розв'яжіть нерівність $\frac{(x+1)^4}{(x-1)^3} + \frac{x-1}{16} \geq \frac{(x+1)^2}{2(x-1)}$.

2. Чи існують четвірки дійсних чисел a, b, c, d , які задовольняють умови: $a + b + c = d$ та $\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} = \frac{1}{ad} + \frac{1}{bd} + \frac{1}{cd}$.

3. Розв'яжіть у натуральних числах x, y, z систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x^2 = 4y^2 + 3z^2 + 2, \\ 13x = 4y + 3z + 29. \end{cases}$$

4. У трикутнику ABC сторона $AC = \frac{1}{2}(AB + BC)$, BL –

бісектриса кута ABC , K, M – середини сторін AB і BC відповідно. Знайдіть величину кута KLM , якщо $\angle ABC = \beta$.

5. На дошці записаний вираз $**...*$, що складається з непарної кількості зірочок. Андрій та Олеся грають у таку гру: вони по черзі (розпочинає Андрій) замінюють довільну ще не замінену зірочку будь-якою цифрою (на перше місце не можна ставити цифру 0). Якщо в решті вийде число, яке кратне 11, то перемагає Андрій, якщо ні, то – Олеся. Хто переможе при правильній грі?

11 клас

1. Знайдіть усі розв'язки рівняння $2^{\sin x} = \sin 2^x$ на проміжку $[0; \pi)$.

2. а) Відомо, що у нескінченній арифметичній прогресії натуральних чисел є деякий член, який є k -тим степенем натурального числа, більшим від 1. Доведіть, що серед членів прогресії є нескінченна кількість таких, що також є k -ми степенями натуральних чисел.

б) Чи існує нескінченна зростаюча арифметична прогресія натуральних чисел, кожен член якої є не вище ніж першим степенем натурального числа?

3. Нехай a, b, c – сторони гострокутного трикутника. Доведіть, що $\sqrt{a^2 + b^2 - c^2} + \sqrt{b^2 + c^2 - a^2} + \sqrt{c^2 + a^2 - b^2} \leq \sqrt{3(ab + bc + ca)}$.

4. Побудуємо для трикутника ABC коло S , яке проходить через точку B і дотикається до прямої CA у точці A , та коло T , яке проходить через точку C і дотикається до прямої BA у точці A . Другу точку перетину кіл S та T позначимо через D . Точку перетину прямої AD та описаного кола трикутника ABC позначимо через E . Доведіть, що D – середина відрізка AE .

5. Задача 5, 10 клас.

2015 рік

7 клас

1. У Тридев'ятому царстві діє закон, за яким кожні два міста мають бути з'єднані між собою окремою дорогою. Після того, як цар

заснував 5 нових міст, довелося побудувати ще 2015 доріг. Скільки міст стало у Тридев'ятому царстві? Відповідь обґрунтуйте.

2. Дванадцять солдатів повинні одночасно якнайшвидше потрапити у пункт, розташований на відстані 30 км від місця їх знаходження. Для цього вони зупинили легковий автомобіль, який міг їхати зі швидкістю 30 км/год і одночасно, крім водія, перевозити лише чотирьох. Водій забрав чотирьох солдатів і підвіз їх на деяку відстань, потім повернувся, забрав ще чотирьох і знову підвіз на певну відстань. Тоді знову повернувся і довів решту солдатів до місця призначення. Виявилось, що всі солдати прибули у вказаний пункт одночасно. Скільки часу вони затратили на подолання всієї відстані, якщо відомо, що пішки кожен з них рухався без відпочинку зі швидкістю 6 км/год. Відповідь обґрунтуйте.

3. Є 7 гир з масами 1 г, 2 г, 3 г, 4 г, 5 г, 6 г та 7 г. Миколка і Петрусь по черзі беруть одну з гир і кладуть її, не знімаючи попередніх, на терези зі стрілкою, яка показує загальну масу покладеного вантажу. Якщо після чергової гирі стрілка покаже масу, більшу 20 г, то той, хто поклав цю гирю, програв. Миколка розпочинає гру і обіцяє перемогти. Чи може Петрусь йому завадити у цьому? Відповідь обґрунтуйте.

4. У Марійки є квадрат розміром 13×13 . Вона хоче вирізати з нього якнайбільше прямокутників розмірами 1×5 . Яку максимальну кількість таких прямокутників зможе отримати Марійка? Відповідь обґрунтуйте.

8 клас

1. Фермер виявив, що його кінь і корова з'їдають стіжок сіна за 9 днів, кінь і коза такий самий стіжок з'їдають за 12 днів, а корова і коза – за 18 днів. За скільки днів з'їли би такий стіжок сіна кінь, корова та коза разом?

2. Відомо, що число \overline{aba} , $a > b > 0$, ділиться на 7. Доведіть, що й число \overline{bab} ділиться на 7, та знайдіть кількість пар $(\overline{aba}, \overline{bab})$ чисел з описаними властивостями.

3. Для додатних чисел x, y, z доведіть нерівність

$$xyz^2 + xy^2 + x^2 + 4 \geq 4xyz.$$

4. Восьмикласник намалював на листку паперу прямокутний трикутник ABC , гіпотенуза AB якого дорівнює 13 см, і стверджує, що зуміє розрізати його на 13 однакових трикутників. Чи може таке твердження бути правдою? Відповідь обґрунтуйте.

5. Є купа з 2015 монет. Миколка та Петрусь грають у гру, змінюючи по черзі кількість монет у цій купі за такими правилами: за один хід до купи можна або докласти 1 монету, або з купи можна взяти 4 монети, якщо їх кількість там не менша від чотирьох монет. Той з гравців, хто бере останню монету, перемагає у грі. Хто виграє у цій грі, якщо першим робить хід Миколка?

9 клас

1. Білка піднімається на стовбур дерева по спіралі, піднімаючись за один виток на 2 м. Скільки метрів подолає вона, піднявшись на висоту 8 м, якщо обхват стовбура становить 1,5 м?

2. Нехай m та n – такі натуральні числа, що значення виразу $3m^2 - mn^2 - 2n - 4$ також є натуральним числом. Яким найменшим може бути натуральне значення цього виразу?

3. Знайдіть усі значення параметра a , за яких система рівнянь

$$\begin{cases} ax^2 + 2015x + 1 = 0, \\ x^2 + ax + 2015 = 0, \\ 2015x^2 + x + a = 0 \end{cases}$$

має принаймні один дійсний розв'язок.

4. У рівнобедреному трикутнику ABC ($AC = BC$) на стороні AC вибрали точку D . Висота AH перетинає відрізок BD у точці K . Виявилось, що $AD = AK$. Знайдіть величину кута ABD .

5. Три місіонери і три канібали повинні переправитися через ріку у невеликому човні, в якому одночасно можуть поміститися не більше двох осіб. Знаючи про смаки канібалів, місіонери не могли дозволити собі залишатися на жодному березі ріки у меншості. Яким чином вони можуть переправитися через ріку, якщо серед них гребти

вміє лише один місіонер та один канібал?

10 клас

1. Миколка записав число $A = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9}$, всі цифри якого попарно різні, і обчислив суму

$$S = \overline{a_1a_2a_3} + \overline{a_4a_5a_6} + \overline{a_7a_8a_9} = 2015.$$

Визначте, яка цифра відсутня у записі числа A , і наведіть приклад хоч одного числа, яке міг записати Миколка.

2. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} x + y^2 = y^3, \\ y + x^2 = x^3. \end{cases}$$

3. У чотирикутнику $ABCD$ кути $\angle BAD = \angle CDA = 60^\circ$ та $\angle CDB = \angle CAD$. Доведіть, що $AB + CD = AD$.

4. Для всіх натуральних чисел n доведіть нерівність

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)} < \frac{1}{4}.$$

5. У футбольному турнірі, в якому взяли участь 16 команд, кожна команда зіграла з кожною іншою по одному разу. Чи могло трапитися так, що у кожної команди кількість її перемог дорівнює кількості її нічиїх?

11 клас

1. Фокусник збирається вгадати задумане двоцифрове число. Для цього він просить сказати йому остачі x, y, z від ділення задуманого числа на 3, 5 та 7 відповідно. Обчисливши суму $70x + 21y + 15z$, фокусник називає задумане число. Поясніть, як йому це вдається?

2. Знайдіть усі дійсні значення параметра a , за яких система нерівностей
$$\begin{cases} x \geq x^2 + y^2 + 0,125a, \\ y \geq x^2 + y^2 + 0,125a \end{cases}$$
 має єдиний розв'язок.

3. Відрізки AB та CD довжиною 1 перетинаються у точці P , причому $\angle DPB = 60^\circ$. Доведіть, що $AC + BD \geq 1$.

4. Знайдіть усі многочлени $P(x)$ з дійсними коефіцієнтами, які для кожного дійсного x задовольняють рівність

$$P(P(x)) = (x^2 + 2015x + 2015)P(x).$$

5. У зв'язку зі складним фінансовим станом у першості країни з футболу взяли участь лише 12 команд, причому кожна з них зіграла з кожною іншою тільки по одному разу. Чи могло трапитися так, що у кожної команди кількість її перемог дорівнює кількості її нічиїх?

2016 рік

7 клас

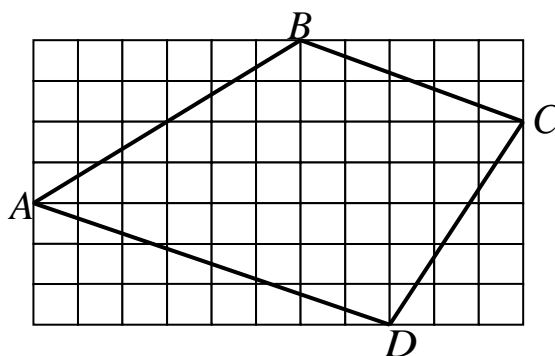
1. Дідусь, тато та онук пробігли дистанцію від дому до крамниці та назад. При цьому онук туди і назад біг з однаковою швидкістю. Дідусь туди біг удвічі швидше, а назад у 3 рази повільніше за онука. Тато біг туди удвічі повільніше, а назад у 3 рази швидше за онука. В якому порядку вони повернуться додому?

2. З 22-х карток, на яких записані числа 1, 2, ..., 22, склали 11 дробів (перегортати картки не можна). Яка найбільша кількість цілих чисел може виявитись серед отриманих дробів?

3. У таблиці 4×4 , що показана на рисунку, треба у 4 комірки поставити по одній зірочці таким чином, щоб ця розстановка задовольняла такі умови: у кожному стовпчику та кожному рядку не повинно бути більше однієї зірочки, жодні дві зірочки не мають стояти у сусідніх по діагоналі комірках. У яких полях можуть стояти зірочки? Вкажіть усі можливі відповіді.

1				
2				
3				
4				
	а	б	в	г

4. Чому дорівнює площа чотирикутника $ABCD$, що зображений на рисунку нижче, якщо сторона малого квадратика дорівнює 1 см?



8 клас

1. Скільки існує трицифрових чисел з ненульовими цифрами, які мають таку властивість: при будь-якій перестановці цифр отримаємо трицифрове число, що ділиться націло на 4?

2. Знайдіть принаймні одну пару натуральних чисел (x, y) , що задовольняє рівність: $\frac{1}{2}(x^2 - y^3) = 2016$.

3. Андрій, Богдан та Олеся йшли однією дорогою від будинку до школи. Андрій йшов зі швидкістю a км/год протягом $(2 - b)$ годин, Богдан йшов зі швидкістю b км/год протягом $(2 - c)$ годин, Олеся йшла зі швидкістю c км/год протягом $(2 - a)$ годин, де a, b, c – деякі, не обов'язково цілі, числа. Яка відстань між будинком та школою, якщо відомо, що вона є цілою кількістю кілометрів?

4. Чи можна рівносторонній трикутник розрізати на:

а) три однакових чотирикутники;

б) три однакових п'ятикутники?

Чотирикутники та п'ятикутники не обов'язково опуклі.

5. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ справджуються рівності: $\angle ABC = \angle BCD$ та $2AB = CD$. На стороні BC вибрана така точка X така, що $\angle BAX = \angle CDA$. Доведіть, що $AX = AD$.

9 клас

1. Скільки існує трицифрових чисел з ненульовими цифрами, які мають таку властивість: при будь-якій перестановці цифр отримаємо трицифрове число, що ділиться націло на 4?

2. Розв'яжіть систему рівнянь:
$$\begin{cases} x^2 + xy + xz = y, \\ y^2 + yz + yx = z, \\ z^2 + zx + zy = x. \end{cases}$$

3. Знайдіть усі натуральні n , для яких число $11^n - 1$ ділиться націло на $10^n - 1$.

4. Вершини куба деяким чином перенумеровані числами 1; 2; ...; 8. Петрику повідомили для трьох з шести граней куба номери

вершин, що їм відповідають: $\{1; 4; 6; 8\}$, $\{1; 2; 6; 7\}$, $\{1; 2; 5; 8\}$. Чи зможе Петрик за цими даними сказати, який номер має вершина, що найбільш віддалена від вершини з номером 5?

5. На сторонах AB та AD квадрата $ABCD$ вибрані точки N та P відповідно таким чином, що $PN = NC$, точка Q – точка на відрізку AN , для якої $\angle NCB = \angle QPN$. Доведіть, що $\angle BCQ = \frac{1}{2} \angle PQA$.

10 клас

1. Близнюки Петрик та Остап посварилися і стали ходити з дому до школи різними шляхами. Петрик спочатку йде 210 метрів на південь, а далі 70 метрів на схід і потрапляє до школи. Остап спочатку йде певний час на північ, а далі по прямій до школи. Скільки саме метрів Остап йде на північ, якщо близнюки ходять з однаковою швидкістю і приходять до школи одночасно?

2. Є 12 стільців, розташованих в одну лінію та перенумеровані зліва направо числами $1; 2; \dots; 12$. Федір може стрибати по цих стільцях за такими правилами: зі стільця з номером k він може стрибнути на стілець з номером n тоді і тільки тоді, коли $|k - n| = 5$ або $|k - n| = 8$. Відомо, що Федір, розпочавши з деякого стільця, зміг пострибати по них так, що побував на кожному стільці рівно один раз. Із стільця з яким номером Федір мав почати стрибати?

3. Квадратний тричлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ з цілими коефіцієнтами для кожного цілого значення x ділиться націло на натуральне число N . Чи обов'язково на N ділиться кожний з коефіцієнтів цього тричлена, якщо: а) $N = 2016$; б) $N = 2017$?

4. На сторонах AB та AD квадрата $ABCD$ вибрані точки N та P відповідно таким чином, що $PN = NC$, точка Q – точка на відрізку AN , для якої $\angle NCB = \angle QPN$. Доведіть, що $\angle BCQ = \frac{1}{2} \angle PQA$.

5. Для додатних чисел a, b, c , що задовольняють умову $a + b + c = 1$, доведіть нерівність:

$$\frac{a}{a+b^2} + \frac{b}{b+c^2} + \frac{c}{c+a^2} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

11 клас

1. Порівняйте числа: $A=11$, $B = \log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \dots \cdot \log_{2015} 2016$ та $C = \log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \dots \cdot \log_{2016} 2015$.

2. Квадратний тричлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ з цілими коефіцієнтами для кожного цілого значення x ділиться націло на 2017. Чи обов'язково на 2017 ділиться націло кожний з коефіцієнтів цього тричлена?

3. Знайдіть усі трійки додатних чисел a, b, c , що задовольняють умови:

$$ab \left(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2} \right) = bc \left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2} \right) = ca \left(1 - \frac{b^2}{(c+a)^2} \right).$$

4. У трикутнику ABC проведена бісектриса AD , E – точка дотику вписаного кола до сторони BC , I – центр вписаного кола ΔABC . Точка A_1 на описаному колі ΔABC така, що $AA_1 \parallel BC$. Позначимо через T – другу точку перетину прямої EA_1 та описаного кола ΔAED . Доведіть, що $IT = IA$.

5. Для яких натуральних $n \geq 3$ можна за скінченну кількість кроків з набору чисел $1; 2; \dots; n$ отримати набір з n однакових чисел, якщо за один крок можна вибирати два довільних числа та збільшити кожне з них на довільне однакове натуральне число?

ВКАЗІВКИ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

1987 рік

6 клас

1. Оскільки $6869 = 9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 900 \cdot 3 + 995 \cdot 4$, то у підручнику $9 + 90 + 900 + 995 = 1994$ сторінки.

2. Нехай a , b , m – довжина основи, бічної сторони та проведеної медіани відповідно. Оскільки $30 + 24 = 36 + 2m$, то $m = 9$ см. Оскільки $a + 2b = 36$, $|a - b| = 30 - 24$, то $a = 8$ см, $b = 14$ см.

Випадок $a = 16$ см, $b = 10$ см неможливий, бо тоді $m + \frac{b}{2} < a$.

3. Із рівності $4x + 5y = 41$ простим перебором знаходимо два розв'язки: $x = 4$ ящики першого типу та $y = 5$ ящиків другого типу, або $x = 9$ ящиків першого типу та $y = 1$ ящик другого типу.

4. Підходить, наприклад, закономірність $a_{n+1} = 2a_n - n$. Тоді $a_6 = 71$, $a_7 = 136$, $a_8 = 265$. Можливі також інші закономірності.

7 клас

1. Оскільки $\frac{n^3 - 2n^2 + 3}{n - 2} = n^2 + \frac{3}{n - 2}$, то $n - 2 = \pm 1$ або $n - 2 = \pm 3$.

Отже, $n = 1$, $n = 3$, $n = 5$. Не задовольняє $n = -1$.

2. Нехай точки M та K симетричні до точки B відносно заданих прямих. Тоді на перетині прямої MK з цими прямими отримаємо дві інші вершини трикутника.

3. Якщо всі три, або лише одна з правих частин заданих рівнянь дорівнюють нулю, то система розв'язків не має. Якщо, наприклад, $a = b = 0$, $c \neq 0$, то $z = 0$, а x, y знаходимо з рівняння $\frac{xy}{x + y} = c$.

Аналогічно розглядаються два інші випадки, коли лише $a \neq 0$ чи $b \neq 0$. Якщо ж всі праві частини відмінні від нуля, то систему запишемо у вигляді

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{c}, \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a}, \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{1}{b}.$$

Тоді $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = A$, $\frac{1}{x} = A - \frac{1}{a}$, $\frac{1}{y} = A - \frac{1}{b}$, $\frac{1}{z} = A - \frac{1}{c}$.

Якщо тут хоч одна з правих частин дорівнює нулю, то система розв'язків не має. В іншому разі легко знаходимо x, y, z .

4. Якщо така система коліс буде рухатися, то кожна пара сусідніх коліс повертатиметься у протилежних напрямках. Отже, рух можливий тоді і тільки тоді, коли k є парним.

8 клас

1. Доповнимо цей трикутник до паралелограма з четвертою вершиною, протилежною до A . Тоді $(2m_a)^2 + a^2 = 2(b^2 + c^2)$. Аналогічно $(2m_b)^2 + b^2 = 2(a^2 + c^2)$ та $(2m_c)^2 + c^2 = 2(a^2 + b^2)$. Додавши ці рівності, легко отримати потрібний результат.

2. Виразимо кожен з цих векторів як суму векторів-сторін заданого п'ятикутника чи їх половин. Тоді сума всіх п'ятнадцяти векторів дорівнюватиме

$$7 \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA}) = \vec{0}.$$

3. Поділимо обидві частини рівняння на 3 і проведемо заміну $t = \frac{y}{3} - \frac{4}{y}$. Тоді $t^2 = \frac{y^2}{9} + \frac{16}{y^2} - \frac{8}{3}$, і рівняння набуває вигляду $t^2 + \frac{8}{3} = \frac{10}{3}t$. З нього маємо $t_1 = \frac{4}{3}$, $t_2 = 2$. Враховуючи зроблену заміну, знайдемо $y_1 = 6$, $y_2 = -2$, $y_{3,4} = 3 \pm \sqrt{21}$.

Зауважимо, що якщо помножити обидві частини заданого рівняння на 3, його можна було розв'язувати, записавши у вигляді

$$\left(x - \frac{12}{x} \right)^2 - 10 \left(x - \frac{12}{x} \right) + 25 = 1 \text{ або } \left(x - \frac{12}{x} - 5 \right)^2 = 1.$$

4. Нехай були записані числа $a \leq b \leq c \leq d \leq e$. Тоді $4(a + b + c + d + e) = 0 + 2 + 4 + 4 + 6 + 8 + 9 + 11 + 13 + 15 = 72$, $a + b = 0$, $a + c = 2$, $d + e = 15$, $c + e = 13$. Звідси отримуємо $a + b + c + d + e = 18$, $c = 3$, $a = -1$, $b = 1$, $d = 5$, $e = 10$.

9 клас

1. Запишемо нерівність у вигляді $\frac{(|x|-1)(|x|-4)}{x-3} < 0$ і знайдемо знаки лівої частини на інтервалах $(-\infty, -4)$, $(-4, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, 3)$, $(3, 4)$, $(4, +\infty)$. Тоді $x \in (-\infty, -4) \cup (-1, 1) \cup (3, 4)$.

2. Якщо би єдиний правильний прогноз був лише у третього глядача, то жоден з бігунів не зміг би фінішувати першим. Отже, третій глядач помилився, і Петренко став переможцем. Оскільки при цьому перший глядач також мусів помилитися, то правильний прогноз був у другого глядача. Тому Сидоренко прибіг другим, а Андрейчук – третім.

3. Спільний корінь цих рівнянь буде також коренем їхньої різниці, тобто коренем рівняння $(a-1)(x^2-x)=0$. $a=1$ та $x=0$ не задовольняють. А для $x=1$ знайдемо $a=-2$.

4. Ні. Припустимо, що такий багатокутник існує, і A, B, C є відповідно точками дотику вписаного в нього кола до сторін $A_{1986}A_{1987} = 1986$, $A_{1987}A_1 = 1987$ та $A_1A_2 = 1$. Тоді $BA_{1987} = AA_{1987} < 1986$, $BA_1 = CA_1 < 1$, $A_{1987}A_1 = BA_{1987} + BA_1 < 1987$. Отримана суперечність доводить неможливість існування вказаного багатокутника.

10 клас

1. Як функція довільних дійсних параметрів a, b цей інтеграл може набувати будь-яких дійсних значень.

2. Позначимо $a-b=c$ і запишемо рівняння у вигляді

$$(11-c)\sin^2 7x - 3\sin 7x \cdot \cos 7x + (5-c)\cos^2 7x = 0.$$

Якщо $c=11$, то $\cos 7x = 0$, звідки знаходимо $x = \frac{1}{7}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$,

або $\sin 7x + 2\cos 7x = 0$, звідки $\operatorname{tg} 7x = -2$, $x = \frac{1}{7}(\pi n - \operatorname{arctg} 2), n \in \mathbb{Z}$.

Якщо ж $c \neq 11$, то, позначивши $y = \operatorname{tg} 7x$, одержимо рівняння

$(11-c)y^2 - 3y + 5-c = 0$, з якого при $c \in \left(8 - \frac{3}{2}\sqrt{5}, 8 + \frac{3}{2}\sqrt{5}\right)$ знайдемо

$$x = \frac{1}{7} \left(\arctg \frac{3 \pm \sqrt{-4c^2 + 64c - 211}}{22 - 2c} + \pi n \right), n \in \mathbb{Z}.$$

3. Нехай AB – найбільше ребро цієї піраміди. Тоді $(AC + AE - AB) + (BC + BE - AB) = (AC + BC - AB) + (AE + BE - AB) > 0$. Отже, правильною є хоч одна з нерівностей $AC + AE > AB$ чи $BC + BE > AB$. Тобто або вершина A , або вершина B задовольняє сформульоване твердження.

4. Розіб'ємо даний квадрат на 25 квадратиків зі стороною 0,2. Оскільки $126 > 25 \cdot 5$, то принаймні в одному з них не менше шести з цих точок. Побудуємо круг радіуса $r = \frac{1}{7}$ з центром у центрі такого квадрата. Оскільки $\frac{2}{7} > 0,2 \cdot \sqrt{2}$, то всі такі 6 точок опиняться всередині цього круга.

1988 рік

6 клас

1. Якщо Івась бачив числа $A = 10x + y$, $B = 100y + x$, $C = 100y + 10z + x$, то $v = B - A = 99y - 9x$ та $2v = C - B = 10z$. Отже, v а з ним і z , ділиться на 9, тобто $z = 9$, $v = 45$ км/год.

2. Оскільки $3193 = 31 \cdot 103$, причому обидва множники – прості числа, то нова ціна – 31 коп. Зниження ціни на 38%.

3. $x = 111$. Врахуйте, що $10101 = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37$, $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, $11111 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$, і помножте обидві частини рівняння на 22.

4. $AM = CM$, то $\angle MAC = \angle MCA$. $\angle EMC = \angle AMD = 90^\circ$, то $\angle MEA = \angle MDC$. Оскільки також $\angle MAE = \angle MCD$ та $AM = MC$, то $\square MAE = \square MCD$.

7 клас

1. Нехай O – центр даного кола. Тоді $OK = OA$, отже, $\angle OKA = \angle OAK$. Але $\angle OKD = 90^\circ$, то $\angle BKD = 90^\circ - \angle KAO = \angle ABC$.

2. Маємо $x(y - 3) = 5(5 - y)$. Отже $(y - 3)(5 - y) \geq 0$, тому

$3 \leq y \leq 5$. Перебором знаходимо $y = 4, x = 5$; $y = 5, x = 0$.

3. Після зведення до найменшого спільного знаменника 120 в чисельнику заданого виразу одержимо

$$a^5 + 10a^4 + 35a^3 + 50a^2 + 24a = a \cdot (a + 1) \cdot (a + 2) \cdot (a + 3) \cdot (a + 4).$$

Але серед п'яти послідовних натуральних чисел є такі, що діляться на 3, 5, та два різні, які діляться на 2 та 4. Оскільки числа 3, 5, 8 є попарно взаємно простими, то при всіх $a \in \mathbb{N}$ такий чисельник ділитиметься на 120.

4. На прямій AD основи трапеції $ABCD$ виберемо точки E та H так, що $BH \parallel CD, CE \parallel BD$. Тоді

$$|AD - BC| = AH < AB + BH = AB + CD,$$

$$AD + BC = AE < AC + CE = AC + BD.$$

8 клас

1. $a = 1$, або $a = -\frac{1}{9}$. Скориставшись формулами Вієта та

рівністю $9 = (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = \frac{1}{a^2} + \frac{8}{a}$, нам залишається

розв'язати отримане квадратне рівняння.

2. На основі теореми Піфагора одержимо

$$BC^2 - CD^2 = AB^2 - AD^2, \quad BC^2 - BK^2 = AC^2 - AK^2.$$

Підставимо сюди $AD = \frac{3}{4}AC, \quad CD = \frac{1}{4}AC, \quad AK = \frac{2}{3}AB, \quad BK = \frac{1}{3}AB$.

Виключивши з одержаної системи AC , знаходимо $BC = \frac{a\sqrt{5}}{3}$.

3. $a^5 + b^3 + c = (a + b + c) + a(a - 1)(a + 1)(a^2 + 1) + b(b - 1)(b + 1)$.

Кожен з доданків справа ділиться на 6: перший – за умовою задачі, а два інші – як такі, що містять добуток трьох послідовних цілих чисел.

4. Оскільки $x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x = (x - 2)(x - 1)x(x + 1)$, то графік цієї функції схематично може бути побудований за відомими точками його перетину з віссю абсцис з врахуванням знаків, які вона набуває на кожному з проміжків. Залишається тільки симетризувати ту його частину, яка знаходиться нижче осі абсцис, відносно цієї осі.

9 клас

1. Нехай CD – висота трикутника ABC . Якщо $0 \leq x \leq 1$, то $S(x) : S_{ACD} = (x : AD)^2$. Звідси $S(x) = x^2$. Якщо ж $1 \leq x \leq 2$, то $S(x) = S_{ABC} - (2 - x)^2 = -x^2 + 4x - 2$ внаслідок симетрії відносно CD .

2. Якщо $\sin x \geq 0$, то $\sin x = 0$, $x = \pi k$, де $k \in Z$. Якщо $\sin x < 0$, то $\frac{4}{(x-3)^2} - 1 = 0$. Звідси $x = 5$. ($x = 1$ не задовольняє, бо $\sin 1 > 0$).

3. Нехай для конкретності $CD \geq AB$. Візьмемо на відрізку CD таку точку M , що $AM \parallel BC$. Тоді отримаємо

$$AM + MC = AB + BC = AD + DC = AD + DM + MC.$$

Отже, $AM = AD + DM$, а тому M співпадає із D . Значить, $ABCD$ – паралелограм, і в ньому $AD = BC$.

4. Зауважимо, що всі доданки зліва додатні. Але для $a > 0$ маємо $a + \frac{1}{a} \geq 2$, причому рівність досягається лише при $a = 1$. Отже,

нерівність рівносильна системі $\operatorname{tg}^2 x_k = 1$, $k = 1, 2, \dots, 994$. Тому

$$x_k = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n_k, \text{ де } n_k \in Z.$$

10 клас

1. Див. розв'язання задачі 1, 10 клас, 1987 рік.

2. Якщо A назве 3, чи B – 4, то їхні оцінки не вдасться визначити однозначно. Якщо ж оцінку назве B , то одержуємо:

а) 3, то $B = 5, 3$; $A = 3, 4$; $B = 4, 4$;

б) 4, то $B = 4, 4$; $A = 5, 3$; $B = 3, 4$;

в) 5, то $B = 5, 3$; $A = 3, 4$; $B = 4, 4$.

3. Нехай M – довільна точка в трикутнику ABC . Тоді $AM + BM \geq AB$, $AM + CM \geq AC$, $BM + CM \geq BC$. Додавши ці нерівності і розділивши на 2, одержимо негативну відповідь.

4. Областю допустимих значень лівої частини рівняння є відрізок $[2; 4]$. Позначимо вираз у цій частині через $f(x)$. Із рівняння

$$f'(x) = 0 \text{ знаходимо } x = \frac{8}{3}. \text{ Маємо } f(2) = 2, f(4) = \sqrt{2}, f\left(\frac{8}{3}\right) = \sqrt{6}.$$

Отже, задане рівняння має розв'язки при $\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{6}$.

1989 рік

6 клас

1. Нехай l – довжина кроку високого учня, n – кількість кроків, зроблених ним за одиницю часу. Тоді пройдений ним за цей час шлях дорівнює ln . Відповідно низенький учень пройде лише шлях $0,8l \cdot 1,2n = 0,96ln$. Отже, високий учень прийде швидше.

2. Не може, бо $5^k - 1$ ділиться на 4, а $5^n + 1$ або дорівнює 6, або закінчується на 26, отже, на 4 не ділиться.

3. $\frac{1988}{1989}$. Скористайтесь рівністю $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ для кожного

з доданків.

4 Виділимо дві команди, які розпочали чемпіонат іграми вдома. У випадку чергування ними ігор вдома і на виїзді, вони не змогли б зустрітися між собою.

7 клас

1. Нехай M та P – такі точки на колі, що MP – серединний перпендикуляр до AK . Тоді прямі PK та MK перетинають коло в шуканих точках B та C . Справді, MP ділить пополам кути AMK та APK . То ж залишається лише врахувати, що на рівні дуги спираються рівні вписані кути.

2. Зрозуміло, що це число не є квадратом парного числа. А квадрати непарних чисел, тобто числа вигляду $(10a \pm 1)^2$, $(10a \pm 3)^2$, $(10a \pm 5)^2$, мають парне число десятків.

3. Перемноживши задані рівняння, одержимо $x^3 + y^3 = x^3$. Отже, знаходимо $y = 0$, $x = 1$.

4. Справді, $x^2 - 2xy + 1989y^2 = (x - y)^2 + 1988y^2 \geq 0$.

8 клас

1. З умови задачі послідовно встановлюємо, що вектори \overrightarrow{BT} , \overrightarrow{HA} , \overrightarrow{PC} , \overrightarrow{XK} , \overrightarrow{MB} , \overrightarrow{AE} однаково напрямлені та рівні за довжиною.

Оскільки A не лежить на прямій BT , то $ABTE$ – паралелограм.

$$2. \quad \frac{a+b}{a^2+b^2} \leq \frac{a+b}{2ab} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right), \quad \text{бо} \quad a^2 + b^2 \geq 2ab. \quad \text{Аналогічно}$$

оцінюємо два інші доданки і додаємо одержані при цьому нерівності:

$$\frac{a+b}{a^2+b^2} + \frac{b+c}{b^2+c^2} + \frac{a+c}{a^2+c^2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

3. Справді,

$$(a + H_a) - (b + H_b) = (a + b \sin C) - (b + a \sin C) = (a - b) \cdot (1 - \sin C) \geq 0.$$

Рівність досягається при $a = b$, або якщо $\angle C = 90^\circ$.

4. Розглянемо точки $M(x; y)$, $A(0; 1)$, $B(1; 0)$. Тоді

$$\sqrt{x^2 + (1 - y)^2} + \sqrt{y^2 + (1 - x)^2} = MA + MB \geq AB = \sqrt{2}.$$

Рівність досягається для точок M із відрізка AB .

9 клас

1. Див. розв'язання задачі 4, 8 клас.

2. Нехай $ABCD$ – паралелограм із діагоналями 2 та 4 і кутом між ними 45° . Розглянемо тепер довільний чотирикутник AB_1CD_1 , в якому $B_1D_1 \parallel BD$, $B_1D_1 = BD$. Перенесемо трикутник DCD_1 на вектор \overrightarrow{DB} . Тоді $AB + DC \leq AB_1 + D_1C$. Аналогічно $BC + DA \leq B_1C + D_1A$. Отже, найменший периметр отримаємо, якщо діагоналі діляться точкою перетину пополам.

3. Нехай $ABCD$ – паралелограм, P_n – точки перетину прямих DK_n з прямою AC . З подібності трикутників AK_nP_n та CDP_n випливає, що $AP_n : P_nC = AK_n : DC = AK_n : AB = 1 : n$, тобто $AP_n : AC = 1 : (n + 1)$. Отже, точки P_n та M_n співпадають. Тому всі прямі K_nM_n проходять через точку D .

4. З умови випливає, що $x - y > 0$. Помножимо ліву частину рівності на 1, а праву – на $x^2 + y^2$ і розглянемо їх різницю $x^3 + y^3 - (x - y)(x^2 + y^2) = 2y^3 + xy(x - y) > 0$. Отже, $x^2 + y^2 < 1$.

10 клас

1. Див. розв'язання задачі 2, 8 клас.

2. Нехай $ABCD$ – даний чотирикутник, P – точка перетину його діагоналей, O – центр описаного кола. На основі властивостей середніх ліній трикутників одержимо, що середини сторін $ABCD$ є вершинами прямокутника, центр якого – точка K – середина відрізка OP . Оскільки проєкції точки K на кожен зі сторін чотирикутника є серединами проєкцій точок P та O на ці ж сторони, то точка K однаково віддалена від основ перпендикулярів, опущених з точок O та P на сторони чотирикутника $ABCD$. (Трикутник рівнобедрений, якщо його висота є одночасно і медіаною).

3. Оскільки $b = \sin c \cos b < \cos b$, $c = \cos b \sin c > \cos c$, $a = \cos a$, то $b < a < c$. Справді, якщо $b \geq a$, то $\cos b \leq \cos a = a \leq b \Rightarrow \cos b \leq b$, що суперечить першій нерівності. Аналогічно доводимо, що не може бути $a \geq c$.

4. Так, зможе. Побудуємо дорогу, паралельну до однієї із границь, на відстані 100 км від цієї границі, а потім ще 4 паралельні їй дороги на відстанях 200 км між сусідніми з них. Крайні із доріг з'єднаємо в довільному місці перпендикулярною до них дорогою. Всі такі дороги назвемо головними. Їх загальна довжина 5800 км. Кожне місто країни при цьому віддалене від головної дороги не більше, як на 100 км. Тому для сполучення буде достатньо додати 5100 місцевих доріг, побудованих перпендикулярно до найближчої головної дороги.

1990 рік

7 клас

1. Оскільки $6 = 9 \cdot 2 - 4 \cdot 3$, то двічі наповнимо дев'ятилітрові відра, виливаючи з них воду у чотирилітрові, а з останніх тричі після їх наповнення – у річку.

2. Оскільки перший за половину часу зі швидкістю 50 км/год проїхав більше, ніж половину відстані, тобто більше, ніж другий, то і в пункт B він прибув швидше.

3. При діленні на 1989 можливі лише 1989 різних остач. Для 1990 чисел принаймні дві остачі співпадуть, а різниця цих чисел ділитиметься на 1989.

4. Беремо кульку із ящика, на якому написано «1 чорна, 1 біла». Яку б кульку з нього ми не вийняли, друга буде того ж кольору. Тоді у ящику, на якому написано, що обидві кульки мають колір вийнятої нами, насправді обидві кульки будуть протилежного кольору, а у третьому ящику опиняться кульки різного кольору.

5. $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$. Але $p > 3$ – просте непарне число, яке не ділиться на 3. Тому з отриманих множників один ділиться на 2, а інший – на 4, а також один – на 3. Числа 8 та 3 є взаємно простими, то $p^2 - 1$ ділиться на 24.

8 клас

1. Шуканою є точка перетину діагоналей. Для довільної іншої точки за нерівністю трикутника сума відстаней до протилежних вершин не менша довжини діагоналі.

2. Оскільки $25 + 26 + 27 + 28 = 110$, то, якщо б четверо найбільш везучих грибників зібрали разом менше половини грибів, то хоч один з них зібрав би не більше 24 грибів. Тоді п'ятеро інших разом зібрали б не більше, як $23 + 22 + 21 + 20 + 19 = 105$ грибів, що не давало б у сумі 220 грибів.

3. Нехай a та b – довжини катетів даного трикутника. Побудуємо квадрат із стороною $a + b$, один з кутів якого співпадає із прямим кутом трикутника. Центри обох квадратів співпадуть, а шукана відстань буде дорівнювати $\frac{a + b}{\sqrt{2}}$.

4. Помножимо і поділимо кожен із доданків на вираз, спряжений до його знаменника. Після спрощень одержимо значення $\sqrt{1990} - 1$.

5. Зрозуміло, що x ділиться на 3, тобто $x = 3n$. Підставляючи його в рівняння, одержимо $3(9n^2 - y^3 - 3z^3) = 0$. Звідси маємо, що y ділиться на 3. Міркуючи аналогічно, встановимо, що x , y , z діляться на 3 в будь-якому степені, тому $x = y = z = 0$.

9 клас

1. Розіб'ємо коней на 5 рівних груп. Кожні 5 хвилин по черзі одна з груп коней відпочиває, а з іншими працюють ковалі. Таким

чином, всі коні будуть підковані за 25 хвилин. Цей час є найменшим можливим, оскільки жоден з ковалів не простоював.

2. Нехай $y = x - 1$. Тоді одержимо $(y + 2)^4 + (y - 2)^4 = 32$, чи $2y^4 + 48y^2 + 32 = 32$. Отже, $y = 0$, $x = 1$.

3. Нехай у трикутнику ABC маємо $AB = BC$, O_1 – центр вписаного, а O_2 , – центр описаного кола, $\angle CAO_2 = \alpha$. Тоді також $\angle CAO_1 = \alpha$, а отже, $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle BAO_2 = 3\alpha$. Але $AO_2 = BO_2$, то $\angle ABO_2 = 3\alpha$. Оскільки $\angle BAC + \angle ABO_2 = 90^\circ$, то $\alpha = 18^\circ$. Отже, кути трикутника ABC дорівнюють 36° , 108° та 36° .

4. Розташуємо довільні 90 чисел по колу. Виберемо 19 з них підряд, потім наступні 19, і так далі по колу 90 разів. Тоді добуток всіх цих чисел буде більшим за 1. Але при цьому кожне число враховане 19 разів, тому й добуток 90 чисел теж більший за 1.

$$5. \quad c^2 = a^2 + b^2 = \frac{(a+b)^2}{2} + \frac{(a-b)^2}{2} \geq \frac{(a+b)^2}{2}. \quad \text{Тому} \quad c \geq \frac{a+b}{2}.$$

Рівність можлива лише за умови $a = b$.

10 клас

1. Розглянемо правильний трикутник зі стороною 1 м. Оскільки кольорів всього 2, то принаймні дві його вершини шукані.

2. $p^2 - n^2 = (p^2 - 1) - (n^2 - 1) = (p - 1)(p + 1) - (n - 1)(n + 1)$. Але $p > 3$, $n > 3$ – прості непарні числа, які не діляться на 3. Тому в обох доданках з отриманих множників один ділиться на 2, а інший – на 4, а також один – на 3. Числа 8 та 3 є взаємно простими, то $p^2 - 1$ та $n^2 - 1$ діляться на 24. Тому $p^2 - n^2$ також ділиться на 24.

3. Нехай у трикутнику ABC медіани AM та BK перпендикулярні і перетинаються в точці O . Тоді

$$S_{ABC} = 2S_{AMB} = 2 \cdot \frac{1}{2} AM \cdot BO = 2 \cdot \frac{1}{2} m_a \cdot \frac{2}{3} m_b = \frac{2}{3} m_a m_b.$$

4. Маємо $x^4 + 1990x^2 + 1989x + 1990 = (x^4 + x^3 + x^2) - (x^3 + x^2 + x) + 1990(x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1990)$.

5. Нехай S – площа такого трикутника. Тоді довжини його сторін: $\frac{2S}{24}$, $\frac{2S}{40}$, $\frac{2S}{60}$. Оскільки сума двох останніх чисел дорівнює першому числу, то вказаний трикутник не існує.

11 клас

1. Розглянемо 2 точки різних кольорів на відстані, меншій за 2 м і побудуємо рівнобедрений трикутник із бічною стороною 1 м. Одна з цих точок і вершина побудованого трикутника матимуть різний колір.

2. Віднявши від першого рівняння друге, отримаємо $y^3 - 2y^2 + 2y = x^3 - 2x^2 + 2x$. Нехай $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x$. Оскільки $f'(x) = 3x^2 - 4x + 2 > 0$, то з $f(y) = f(x)$ випливає $y = x$. Отже, розв'язки: $(0;0)$, $(2 + \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2})$, $(2 - \sqrt{2}; 2 - \sqrt{2})$.

3. Площа кожного із таких чотирикутників дорівнює подвоєній площі паралелограма із вершинами в середині його сторін.

4. $\left| \frac{x}{2} + \frac{1}{2x} \right| = \frac{1}{2} \left| x + \frac{1}{x} \right| \geq 1$, $|\cos^2 3x - \sin^2 x| \leq 1$. Тому рівняння

зводиться до сукупності таких систем: $x = 1$, $\sin^2 x = 0$, $\cos^2 3x = 1$ та $x = -1$, $\sin^2 x = 1$, $\cos^2 3x = 0$, кожна з яких несумісна.

5. Візьмемо дві діаметрально протилежні точки на колі. Відстань між ними дорівнює 2. Тому сума відстаней від 1990 точок до вибраних нами не менша за $2 \cdot 1990$. Отже, принаймні до однієї з них сума відстаней не менша за 1990.

1991 рік

8 клас

1. 59 хв. 59 сек. Після першої секунди процес у пробірці з однією бактерією йде так само, як у пробірці з двома бактеріями.

2. $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 600 \cdot 3 = 1989$. Отже, на 1991-му місці друга цифра числа 700, тобто нуль.

3. Скористайтеся рівністю $\sum_n x_n^3 = \sum_n x_n + \sum_n (x_n - 1)x_n(x_n + 1)$, і врахуйте, що добуток трьох послідовних цілих чисел ділиться на 6.

4. Нехай AK та DM перетинаються в точці P . $181:1991=1:11$, то $\triangle MAD = \triangle KBA$. Тоді $\angle AMP + \angle MAP = \angle AMP + \angle ADK = 90^\circ$. Отже, також $\angle MPA = 90^\circ$.

5. Сторони такого трикутника рівні як рівновіддалені від центра на радіус вписаного кола хорди описаного кола.

9 клас

1. (1, 3, 9, 27) кг. Гирі дозволяється ставити на обидві шальки.

2. Є. Для $n = 1988$ достатньо скористатися рівністю

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)(n+3)+1 &= (n^2+3n) \times (n^2+3n+2)+1 = \\ &= (n^2+3n)^2+2 \cdot (n^2+3n)+1 = (n^2+3n+1)^2. \end{aligned}$$

3. З нерівності $x^4+7x^3-12x+5=(x^2-1)^2+(3x-2)^2 > 0$ випливає, що рівняння не має дійсних коренів.

4. Нехай O – центр даного кола. При $a < 2R$ проведемо в колі хорду довжиною a та побудуємо коло з центром у точці O , яке дотикається до цієї хорди. Дотичні до останнього, проведені через точку M , є шуканими. Якщо $a = 2R$, то шуканою є пряма MO , а якщо $a > 2R$, то задача не має розв'язку.

5. Можуть. Наприклад, у прямокутному трикутнику середини висот лежать на середній лінії, паралельній до гіпотенузи.

10 клас

1. Для шестикутника дане твердження неправильне. Наприклад, якщо A, C, E , та B, D, H – вершини правильних трикутників, $AB \neq BC$, то шестикутник $ABCDEH$, у якого всі кути рівні, не є правильним. Для 1991-кутника твердження правильне. Нехай A, B, C, D – чотири послідовних його вершини. Тоді $\square ABC \neq \square DCB$ за рівними двома відповідними кутами та спільною стороною BC . Отже, також $AB = CD$. Тому всі сторони, взяті через одну, теж рівні. Обійшовши так по колу, одержимо, що й всі сусідні сторони рівні.

2. Нехай O – точка перетину бісектрис AK та BM . Тоді $\angle AOB = 165^\circ$, $\angle OBA + \angle OAB = 15^\circ$, $\angle CBA + \angle CAB = 30^\circ$, $\angle ACB = 150^\circ$.

Тому $S = \frac{1}{2}ab \sin 150^\circ = \frac{ab}{4}$. Випадок $\angle AOB = 15^\circ$ – неможливий.

3. Сума зовнішніх кутів дорівнює 360° , тому прямих кутів не більше чотирьох. Але жоден із зовнішніх кутів не дорівнює нулю, то прямих кутів не більше трьох. Приклад із трьома прямими кутами нескладно навести.

4. Покладемо $y = \sqrt{x^2 + 5x + 1}$. Тоді $3y^2 + 2y - 5 = 0$. Звідси $y = 1$, отже, $x = 0$ або $x = -5$. ($y = -\frac{5}{3}$ не задовольняє).

5. Переконавшись, що $a^2 = \sqrt{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} \sqrt{\sqrt{2} + \frac{1}{8}} \right) < \sqrt{2}$, достатньо довести, що $(\sqrt{2} - a^2)^2 - a^4 - a - 1 = 1 - 2\sqrt{2}a^2 - a = 0$.

11 клас

1. $x = \log_2(2 + \sqrt{5})$ та $x = \log_2 \sqrt{5}$. Зрозуміло, що аргументи логарифмів мають утворювати геометричну прогресію. Розглянувши всі випадки розташування даних чисел, отримаємо таку сукупність рівнянь: $2(2^x - 1) = (2^x + 1)^2$, $2(2^x + 1) = (2^x - 1)^2$, $(2^x - 1)(2^x + 1) = 2^2$, кожне з яких заміною $y = 2^x > 0$ зводиться до квадратного. Сторонні корені слід відкинути.

2. Прослідкуємо за останніми двома цифрами чисел 2^n : 02, [04, 08, 16, 32, 64, 28, 56, 12, 24, 48, 96, 92, 84, 68, 36, 72, 44, 88, 76, 52], 04, Починаючи з $n = 2$, вони повторюються з періодом 20. Оскільки 1991 при діленні на 20 дає остачу 11, то 2^{1991} закінчується тими ж двома цифрами, що й 2^{11} , тобто на 48.

3. Нехай $x^2 + y^2 = 16$ – коло з центром у точці O . Розглянемо точки $B(2;0)$, $C(4;0)$ та точку $A(2;\sqrt{2})$ на цьому колі. Тоді значення інтеграла дорівнює площі фігури, обмеженої прямими AB , BC та дугою AC . $OA = 4$, $OB = 2$, то $\angle AOB = 60^\circ$. Отже,

$$S_{ABC} = S_{AOC} - S_{AOB} = \frac{1}{6} \pi \cdot OC^2 - \frac{1}{2} OB \cdot OA \cdot \sin 60^\circ = \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}.$$

4. Може. Нехай B та C – середини двох суміжних сторін квадрата, A – точка перетину двох інших сторін. Тоді даний квадрат – розгортка піраміди з основою ABC .

5. Якщо назвати $(a, b, c) = (100, 10, 1)$, то названий Кошієм скалярний добуток $(a, b, c) \cdot (x, y, z) = 100x + 10y + z = \overline{xyz}$.

1992 рік

8 клас

1. Найпростішу закономірність отримаємо, якщо розставити коми через дві цифри і записати послідовність у вигляді: 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, ...

2. $1992 = 8 \cdot 3 \cdot 83$ і 83 – просте число, тому $x = 8$, $y = 3$.

3. $S = (1 + 1992) + (2 + 1991) + \dots + (996 + 997) = 1993 \cdot 996 = 1985028$.

4. Розіб'ємо даний квадрат на одиничні квадратики. Оскільки $44^2 = 1936 < 1992$, то принаймні в одному одиничному квадраті є не менше двох точок, і відстань між ними не перевищує $\sqrt{2}$.

5. Прямокутну трапецію можна скласти з двох прямокутних трикутників, якщо її менша діагональ перпендикулярна до бічної сторони. Зрозуміло, що одного трикутника замало.

9 клас

1. Зробивши 10 обертів, мале колесо тричі пройде велике колесо. Далі все періодично повторюється. Отже, в залежності від пройденого шляху, можливі 0, 1, 2 чи 3 отвори.

2. Нехай кола, побудовані на AB та на BC як на діаметрах, перетинають сторону AC у точках H_1 та H_2 відповідно. Тоді $\angle AH_1B = \angle CH_2B = 90^\circ$. Але перпендикуляр, проведений із B до AC , єдиний, то $H_1 = H_2$.

3. Запишемо рівняння у вигляді $xy(10x + y) = 8 \cdot 3 \cdot 83$. Але 83 – просте число, то $10x + y = 83$, $xy = 24$. Тому $x = 8$, $y = 3$.

4. Розклавши числа на множники, одержимо
 $1991 \cdot 10001 \cdot 1992 \cdot 100010001 - 1992 \cdot 10001 \cdot 1991 \cdot 100010001 = 0$.

5. Розмалюємо кубики у два кольори так, щоб кожні два сусідні кубики були різного кольору. У колір центрального кубика будуть замальовані 13 із них, а в інший колір – 14. Мишка може з'їсти по 13 кубиків кожного кольору. Отже, центральний кубик залишитися не може.

10 клас

1. Такою буде будь-яка замкнена крива на сфері радіуса 1992, яка не є колом.

2. Позначимо дані точки відповідно через M та K . На прямій MK візьмемо точку O так, що $MK = KO$. Нехай M_1, K_1, O_1 – їх проекції на одну зі сторін трикутника. Тоді MOO_1M_1 – трапеція з середньою лінією KK_1 . За величинами MM_1, KK_1 знаходимо $OO_1 = 7$. Аналогічно міркуємо для проекцій на інші сторони. Отже, O – центр вписаного кола радіуса 7.

3. $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos A$. Тому $\frac{D}{4} = b^2 c^2 (\cos 2A - 1) < 0$.

4. $4 \sin 18^\circ \cos 36^\circ = \frac{4 \sin 18^\circ \cos 18^\circ \cos 36^\circ}{\cos 18^\circ} = \frac{\sin 72^\circ}{\cos 18^\circ} = 1$.

5. Ні, бо таке число ділиться на 3, але не ділиться на 9.

11 клас

1. Розглянемо трикутну піраміду з двома перпендикулярними до основи гранями. На ребрах цих граней, які знаходяться в основі піраміди, виберемо по одній точці і проведемо площину, яка проходить через вибрані точки і вершину піраміди. Ця площина відсікає потрібну чотирикутну піраміду.

2. Як і в задачі 2 за 9 клас, одержуємо, що A_1, B_1, C_1 – основи перпендикулярів, опущених із M на сторони трикутника. А оскільки M – центр описаного кола, то вони будуть серединами відповідних сторін. Отже, $S_{A_1 B_1 C_1} = \frac{1992}{4} = 498$.

3. Такими є, наприклад, точки $\left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}, \frac{2n}{n^2 + 1} \right), n \in \mathbb{N}$.

4. Ні, бо таке число ділиться на 3, але не ділиться на 9.

5. Оскільки $29 - 12\sqrt{5} = (2\sqrt{5} - 3)^2$, $6 - 2\sqrt{5} = (\sqrt{5} - 1)^2$, то, послідовно скориставшись даними рівностями, отримаємо, що значення даного виразу дорівнює 1.

1993 рік

8 клас

1. Запишемо рівняння у вигляді $(x+1)^2 - (y-1)^2 = 1993$, чи $(x+y)(x-y+2) = 1993$. Але 1993 – просте число, то дані множники набувають таких значень: $(1; 1993)$, $(-1; -1993)$, $(1993; 1)$, $(-1993; -1)$. Звідси $(x; y)$: $(996; -995)$, $(996; 997)$, $(-998; 997)$, $(-998; -995)$.

2. $a^3 + 2b^3 = a^3 + b^3 + b^3 \geq 3abb = 3ab^2$. Можна міркувати ще й так: $a^3 + 2b^3 - 3ab^2 = a(a^2 - b^2) + 2b^2(b - a) = (a - b)^2 \cdot (a + 2b) \geq 0$.

3. Нехай A – вершина кута, меншого за 180° . На прямій AM відкладемо точку C так, що $AM = MC$. Через C проведемо прямі, паралельні до сторін кута, до перетину з іншими сторонами цього кута в точках B та D відповідно. Тоді $ABCD$ – паралелограм, отже, пряма BD – шукана.

4. З допомогою плитки побудуємо від обох країв намальованого прямокутника квадрати із стороною 19. Всередині одержимо прямокутник із сторонами 19 та 55. Але $19 + 55 < 93$, то його діагоналі можна провести з допомогою плитки. Їх перетин і є шуканим центром.

5. Так, якщо, наприклад, різниця між прибутками і видатками по місяцях є такою: 2, 2, 2, 2, -9, 2, 2, 2, 2, -9, 2, 2.

9 клас

1. Легко переконатися, що $p(x) \neq ax + b$. А, визначивши коефіцієнти тричлена $ax^2 + bx + c$ з системи
$$\begin{cases} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 19, \\ a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 93, \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 1993, \end{cases}$$

знайдемо $p(x) = 913x^2 - 839x + 19$.

2. Справді, $a + 2\sqrt{b} = a + \sqrt{b} + \sqrt{b} \geq 3\sqrt[3]{a\sqrt{b}\sqrt{b}} = 3\sqrt[3]{ab}$.

3. Якщо у трикутнику є кут $A \geq 120^\circ$, то найбільшу сторону з усіх внутрішніх точок буде видно під кутами, більшими за 120° . В іншому випадку побудуємо три кола, з яких відповідно по одній стороні трикутника видно під кутом 120° . Оскільки $3 \cdot 120 = 360$, то ці кола перетнуться в шуканій внутрішній точці.

4. Нехай AK та CM – висоти трикутника ABC . Трикутники AKB та CMB подібні як прямокутні зі спільним кутом B . Отже, $BK : AB = BM : BC$, тобто трикутники MBK та CBA – подібні.

5. Якщо би це було можливим, то кількість всіх точок дотику дорівнювала би $\frac{1993 \cdot 3}{2}$, чого не може бути.

10 клас

1. Нехай $A = 1993a$, причому останні, одна чи декілька, цифри числа A відповідно співпадають із цифрами числа a . Ясно, що $a = 5$ є найменшим можливим. Тому $A = 1993 \cdot 5 = 9965$ – шукане число.

2. Може. Наприклад, $0,9 + 0,9 + (-0,4) + (-0,4) = 1$. Всі ці числа менші за 1, але сума їх кубів більша за 1.

3. Нехай OA та OB – задані радіуси, які не лежать на одній прямій. На прямій AB відкладемо точки C та D , відмінні від B та A , так, що $AC = AB = BD$. Якщо M та K – точки перетину відрізків OC та OD з колом, то хорда MK – шукана.

4. Нехай O_1, O_2, O_3 – центри заданих кіл. Центр O шуканого кола співпадає з центром кола, описаного навколо трикутника $O_1O_2O_3$, сторони якого дорівнюють $2R$. Легко обчислити, що $OO_1 = \frac{2R}{\sqrt{3}}$.

Шукані радіуси будуть $\frac{2R}{\sqrt{3}} \pm R$.

5. Розмалюємо дану дошку в чотири кольори так, щоб кольори рядків зліва направо чергувалися таким чином: 1-ий, 5-ий, 9-ий рядки: 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2; 2-ий, 6-ий та 10-ий рядки: 2, 3, 4, 1, 2,

3, 4, 1, 2, 3; 3-ій та 7-ий рядки: 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4; 4-ий та 8-ий рядки: 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1. Тоді всякий прямокутник 4×1 покриває по одному разові кожен із кольорів. Отже, для покриття всієї дошки вказаним способом необхідно, щоб клітинок кожного кольору було по 25. Але легко порахувати, що для даної дошки це не виконується.

11 клас

1. Покладемо $y = \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)^x$. Тоді $y + \frac{1}{y} = 4$, звідки $y = 2 \pm \sqrt{3}$.

Отже, $x = \pm 2$.

2. Помножимо друге рівняння на x і віднімемо його від першого. Тоді $1993 - 1993x = 0$. Отже, $x = 1$ – єдиний можливий спільний корінь. Звідси маємо, що $a = 1992$.

3. Нехай AB – найбільша, BC – найменша сторони такого трикутника, O – центр вписаного кола, K, T, P – основи перпендикулярів, опущених із точки O відповідно на сторони BC , AC , AB ; M та E – середини сторін BC та AB . Тоді

$$\begin{aligned} MK - PE &= (MC - KC) - (PA - EA) = (MC + EA) - (KC + PA) = \\ &= \frac{1}{2}(BC + AB) - (CT + TA) = AC - AC = 0. \end{aligned}$$

Оскільки також $OK = OP$, то $\triangle KOM = \triangle POE$. Але тоді $\angle BMO + \angle BEO = \angle BKO + \angle BPO = 180^\circ$, тому точки B, M, O, E лежать на одному колі.

4. Розглянемо тетраедр з вершинами у центрах заданих чотирьох куль. Довжини всіх його ребер дорівнюють $2R$. Радіус описаної навколо нього сфери дорівнює $\frac{R\sqrt{6}}{2}$, в чому пропонуємо читачам

переконатись самостійно. Тоді радіус шуканої кулі буде $\frac{R\sqrt{6}}{2} - R$.

5. Якщо спочатку шайби лежали на одній прямій, то після жодного удару вони більше не зможуть опинитися на одній прямій. Якщо ж вони утворювали трикутник, то при кожному ударі його орієнтація змінюється на протилежну. Отже, після непарного числа

ударів положення всіх шайб одночасно зі своїми початковими положеннями співпадати не можуть.

1994 рік

7 клас

1. Нехай точка E знаходиться у півплощині α відносно прямої BD . Тоді точки A та C теж будуть в α . Отже, і всі точки відрізка AC також належать α .

2. Якщо остання цифра даного числа дорівнює 2, то $K + 1994$ – парне; якщо 1 – то воно ділиться на 5.

3. Оскільки $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21 < 9 \cdot (8 + 7)$, то у знаменнику має бути мінус. Тоді, щоб отримати у чисельнику 9, знаки „-„ слід розставити перед числами, сума яких дорівнює 6.

4. Запишемо рівняння у вигляді $94(y - 1) = 19(100 - x)$. Отже, $(y - 1) : 19$, $(100 - x) : 94$. Звідси маємо: $x = 100$, $y = 1$ та $x = 6$, $y = 20$.

5. Розіб'ємо пакети на дві пари і, здійснивши порівняння ваги пакетів у кожній парі, позначимо важчі через A та C , а легші – через B та D . Тоді серед пакетів A та C визначимо найважчий, а серед B та D – найлегший. П'яте зважування використаємо для порівняння ваги двох інших пакетів.

8 клас

1. A_1B_1PK буде паралелограмом лише тоді, коли P – середина AM , K – середина BM . В інших випадках твердження неправильне.

2. Оскільки $DC = BC$, то $DC = AC$. Отже, C – центр кола, описаного навколо трикутника ABD , з діаметром DA . Тому $\angle ABD = 90^\circ$. Якщо ж тепер M – друга точка перетину прямої AB з колом, то DM – діаметр цього кола, бо $\angle DBM = 90^\circ$. Отже, AB та DO перетинаються на колі.

3. Якщо видано x купюр по 5 карбованців та y купюр по 3 карбованці, то $5x + 3y = 1994$. Нехай $y = 5n + k$, де $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Тоді $5(x + 3n) + 3k = 1994$. Цілочислові розв'язки отримаємо лише при $k = 3$. Отже, $x + 3n = 397$. Тут n може набувати значень від 0 до 132, тому всього є 133 способи.

4. а). Поділимо сторони квадрата на 995 рівних частин. Виділимо центральні вертикальну та горизонтальну смуги шириною в одну з цих частин. Кожну смугу розділимо на 995 квадратів. В результаті одержимо розбиття на 1993 квадрати,

б). Поділимо сторони квадрата на 997 рівних частин і виділимо смуги, які прилягають до однієї його вершини. Розділивши кожную із них на 997 квадратів, одержимо розбиття на 1994 квадрати.

5. Твердження задачі випливає з нерівності

$$(a+b)(a^3+b^3)-2(a^4+b^4)=(a-b)(b^3-a^3)\leq 0.$$

9 клас

1. З перших двох рівнянь одержуємо $x(y+1)=z(y+1)$. $y=-1$ не задовольняє, тому $x=z$. Тоді з третього рівняння знаходимо $x=-10$ або $x=8$. Аналогічно встановлюємо, що $y=x$. Отже, маємо два розв'язки: $(-10, -10, -10)$ та $(8, 8, 8)$.

2. Припустимо, що можна, і сума номерів при кожній вершині дорівнює n . Тоді справджується рівність $2 \cdot (1+2+\dots+12)=8n$, яка приводить до суперечності, бо її ліва частина не ділиться на 8.

3. Якщо $\sqrt{m} + \sqrt{n} = \sqrt{1994}$, то маємо $m-n = \sqrt{1994}(\sqrt{m} - \sqrt{n})$. Виключивши звідси \sqrt{n} , одержимо $2\sqrt{m \cdot 1994} = 1994 + m - n$. Отже, $1994m$ – точний квадрат. Але 1994 не має кратних дільників, то $m \geq 1994$. Тоді $n \leq 0$, що неможливо.

4. Нехай $x = f(y)$. Тоді $f(0) = 1 - f(y) - y$. При $y=0$ звідси отримаємо, що $f(0) = 0,5$. Отже, $f(y) = 0,5 - y$. Перевірка показує, що при цьому задана в умові рівність виконується для довільних x, y .

5. Позначимо на прямій l точку P , яка лежить відносно прямої AB у тій самій півплощині, що й точка C . Тоді $\angle AED = \angle PAE$, $\angle ABC = \angle PAE$. Отже, $\angle AED = \angle ABC$. Тому трикутники ABC та AED подібні. Звідси $AD:AC = AE:AB$. Враховуючи, що $AB = AD + BD$, $AC = 12$ см, знаходимо $BD = 4$ см.

10 клас

1. Для простих чисел 2, 3, 5 твердження очевидне. Для всіх

інших простих чисел остачі від ділення на 30 будуть взаємно простими із числом 30. Залишилось зробити перебір таких остач від 1 до 29 і переконатися, що вони задовольняють твердження задачі.

2. Замінімо у заданій рівності x на $-x$. Тоді отримаємо $-x(f(-x) + f(x) + 2) + 2f(x) = 0$. Виключивши з одержаної системи рівнянь $f(-x)$, знайдемо $f(x) = x$.

3. $a + c + e \geq \frac{a}{2} + \frac{b+c}{2} + \frac{d+e}{2} = 50$. Рівність тут досягається, наприклад, для $a = 0, b = c = d = e = 25$.

4. Із міста A в будь-яке інше місто можна потрапити або прямою дорогою, або через проміжне місто. Тому кількість доріг не менша, ніж $M - 1$. Саме стільки буде доріг, якщо, наприклад, всі міста зв'язані дорогами з одним містом, а інших доріг немає.

5. З умов задачі випливає, що $\angle AMN + \angle CAN = 180^\circ$ та $\angle BMK + \angle BCK = 180^\circ$. Отже, навколо $AMNC$ та $BMKC$ можна описати кола. Тому $\angle ANC = \angle AMC$, $\angle BKC = \angle BMC$. Отже, $\angle ANC + \angle BKC = \angle AMC + \angle BMC = 180^\circ$, тому точки C, K, L, N лежать на одному колі.

11 клас

1. Нехай сторона квадрата дорівнює 2. Врахувавши, що кожна пелюстка належатиме двом півкругам, безпосередньо підраховуємо, що площа «квітки» дорівнює $0,5 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 1^2 - 4 = 2\pi - 4$ та площа частини круга зовні квадрата дорівнює $\pi(\sqrt{2})^2 - 4 = 2\pi - 4$.

2. Серед чисел $a_1, a_1, \dots, a_{1994}$ рівно 998 чисел, не менших за 997. Хоч одне з них має номер, не менший 998. Для нього $(n-1) \cdot a_n \geq 997^2$. Зрозуміло, що й найбільший з таких добутків також буде не меншим, ніж 997^2 .

3. Якщо $x = y = 0$, то $f(0) = 2f(0)$. Отже, $f(0) = 0$. Якщо тепер лише $y = 0$, то $f(x^2) = f(x)$. Отже, $f(x^4) = f(x^2) = f(x)$. Якщо ж $y = -x^2$, то $f(x^4) + f(x) = 0$. Звідси знаходимо, що $f(x) \equiv 0$.

Перевірка показує, що ця функція задовольняє задану рівність.

4 $S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} A_1B_1 \cdot A_1C_1 \cdot \sin A_1 < \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}$, $S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Отже, $\cos \alpha = S_{A_1B_1C_1} : S_{ABC} < 0,5$. Тому $\alpha > 60^\circ$.

5. Якщо $\sin x + 1 = 0$, то $\cos x = 0$, і нерівність очевидна. Якщо $\sin x + 1 \neq 0$, то покладемо $a = \sin x + 1$, $b = \cos x$, $c = 0,5$. Тоді дискримінант $D = (\cos x)^2 - 4(\sin x + 1) \cdot 0,5 = -(\sin x + 1)^2 < 0$. Але $a > 0$, тому $ax^2 + bx + c > 0$.

1995 рік

7 клас

1. Розподіл повних, наповнених наполовину та порожніх бочок міг бути таким: (3,1,4), (1,5,2) та (1,5,2).

2. На 30 метрів (15 туди та 15 назад) білка затратила би 8 сек. Тому за час $20 \cdot 60 = 1200$ сек. вона пробіжить $30 \cdot 1200 : 8 = 4500$ м.

3. Нехай A та B – центри даних сіл, C – симетрична до A точка відносно річки, M – перетин річки з прямою BC . Тоді $AM + BM = CM + BM = CB$. Точка M – шукана, оскільки для будь-якої іншої точки K , яка знаходиться на березі річки, отримаємо $KA + KB = KC + KB > CB$.

4. Розглянемо останні цифри чисел 2^n . Це: 2, 4, 8, 6, 2, 4, Вони повторюються з періодом 4. Оскільки $1995 = 4 \cdot 498 + 3$, то шуканою є цифра 8.

5. Значення суми дорівнює 1. Достатньо скористатися рівністю $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ для перших 1994-ьох доданків.

8 клас

1. Нехай прямі AH та AO перетинаються з описаним колом відповідно в точках P та D ; H – така точка на колі, що $AH \perp BC$. Оскільки AD – діаметр, $AH \perp BC$, то $AH \perp PD$. Отже,

$$\angle OAH = 0,5\overset{\frown}{PD} = 0,5\overset{\frown}{AH} = \left| 0,5(\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{AB}) \right| = \left| \angle ABC - \angle BCA \right|.$$

2. Це число дорівнює 2. Для доведення двічі використовуємо

рівність $35 - 8\sqrt{19} = (\sqrt{19} - 4)^2$.

$$\begin{aligned} 3. \quad & \frac{a^4 + a^2b^2 + b^4}{3} - \frac{ab^3 + a^3b}{2} = \frac{(a^2 - b^2)^2}{3} - \frac{ab(a-b)^2}{2} = \\ & = (a-b)^2 \left(\frac{(a+b)^2}{3} - \frac{ab}{2} \right) = \frac{(a-b)^2}{12} \cdot ((a+b)^2 + 3(a^2 + b^2)) \geq 0, \end{aligned}$$

звідки й випливає потрібна нерівність.

4. Якщо $\overline{abc} = \overline{def}$, то $\overline{abcdef} = 1001 \cdot \overline{abc}$, і такий номер ділиться на 1001. Якщо $\overline{abc} \neq \overline{def}$, то поряд із щасливим квитком \overline{abcdef} щасливим буде також \overline{defabc} . Але їхня сума дорівнює $1001 \cdot (\overline{abc} + \overline{def})$, тому сума всіх щасливих номерів ділиться на 1001.

9 клас

1. Очевидно, що $(a+b)^3 = (c+d)^3$. Віднявши від одержаної рівності другу із заданих нам, будемо мати $3ab(a+b) = 3cd(c+d)$, звідки $ab = cd$. Оскільки також $(a+b)^2 = (c+d)^2$, то з врахуванням попередньої рівності одержимо, що й $(a-b)^2 = (c-d)^2$, тобто $a-b = \pm(c-d)$. Але разом з першою заданою рівністю це можливо лише при $a=c, b=d$, або $a=d, b=c$.

2. Якщо в комісії менше 60 членів, то ніхто з них не взяв участі більш, ніж у шести засіданнях, бо вже $7 \cdot 9 > 60$. Оскільки учасників всіх засідань $40 \cdot 10 > 400$ і на кожного члена комісії припадає не більше шести засідань, то членів цієї комісії не менше $400 : 6 > 60$. Одержали суперечність. Тому до комісії входить не менше 60 осіб.

3. Запишемо рівняння у вигляді $(k-1)^2 + (m+2)^2 + (n-3)^2 = 3$. Оскільки 2 та 3 не є точними квадратами, то одержимо $k-1 = \pm 1$, $m+2 = \pm 1$, $n-3 = \pm 1$. Далі уже нескладно визначити всі 8 розв'язків.

4. Нехай P та K – основи висот, опущених на продовження сторін BC та AC відповідно. Тоді $\angle PCK = \angle ACB = 120^\circ$,

$\angle AOB = 360^\circ - 2\angle ACB = 120^\circ$, $\angle ANB = 360^\circ - \angle PCK - \angle HPC - \angle HKS = 60^\circ$.
Тому навколо чотирикутника $АНВО$ можна описати коло. Але $\angle AOM = \angle BOM = 60^\circ$, то $MA = MO = MB$, тобто M – центр цього кола. Отже, $OM = MN$.

5. З формул Вієта легко одержати, що корені обох рівнянь додатні. Тому $t > 0$, $T > 0$, причому $at^2 - bt + c < 0$, $AT^2 - BT + C < 0$, бо $a > 0$, $A > 0$. Звідси випливає, що $at + \frac{c}{t} < b$, $AT + \frac{C}{T} < B$. Отже,

$$(b + B)^2 > \left(at + \frac{c}{t} + AT + \frac{C}{T} \right)^2 = \left((at + AT) + \left(\frac{c}{t} + \frac{C}{T} \right) \right)^2 \geq 4(at + AT) \left(\frac{c}{t} + \frac{C}{T} \right).$$

10 клас

1. Якщо n – парне, то остання цифра парна, якщо n – непарне, то передостання.

2. Запишемо рівняння у вигляді $(x - 3)^2 + (\sqrt{x} - 2)^2 = 0$, звідки одночасно $x = 3$ та $\sqrt{x} = 2$, що неможливо.

3. Оскільки сторони $2n$ - кутника рівні, то досить довести, що рівні суми відстаней до червоних та до синіх сторін. Для квадрата це очевидно. При $n > 3$ продовжимо червоні сторони $2n$ - кутника до їх взаємних перетинів. У результаті одержимо правильний n -кутник. Якщо S – його площа, b – довжина сторони, то сума відстаней від точки O до його сторін дорівнює $\frac{2S}{b}$. Аналогічно встановлюємо, що

й сума відстаней від точки O до синіх сторін дорівнює $\frac{2S}{b}$.

4. Розглянемо довільну точку A площини і застосуємо до неї дане перетворення. У результаті одержимо точку B . Нехай M – середина AB , чи точка A , якщо B співпадає з A . Із рівності відповідних пар трикутників з вершинами в точках A_n легко встановити, що при кожній наступній симетрії відносно точок A_n довжина відображуваного вектора \overrightarrow{MA} не змінюється, а напрям міняється на протилежний. Оскільки S переводить A в B , то вектор

\overline{MA} переведе в \overline{MB} , тобто точку M – саму в себе. Якщо тепер P – довільна точка площини, то аналогічними міркуваннями встановлюємо, що вона перейде в точку, симетричну до P відносно M . Отже, M – єдина нерухома точка цього відображення.

5. Нехай a_{ij} – число, яке знаходиться в i -тому рядку та j -тому стовпчику новоутвореної таблиці, та $a_{ij} > a_{ik}$ при деякому $k > j$. Тоді для всіх $l \leq i$, $m \leq i$ будемо мати $a_{mj} \geq a_{ij} > a_{ik} \geq a_{lk}$. Але тоді в k -тому стовпчику є не більше, як $(i - 1)$ -е число, яке не могло би бути більшим чисел $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{ij}$ j -того стовпчика. А це суперечить тому, що в початковій таблиці числа кожного рядка монотонно зростали.

II клас

1. Нехай задана піраміда $SABC$; $KPMT$ – її переріз площиною, причому точки K, P, M, T лежать відповідно на ребрах SA, FD, CB, SC . Оскільки KT та PM паралельні і лежать у різних гранях піраміди, то $KT \parallel AC$, $PM \parallel AC$. Аналогічно $KP \parallel BS$, $MT \parallel BS$. Тому з подібності відповідних трикутників одержуємо $KP : BS = AP : AB = 1 - PB : AB = 1 - PM : AC$, тобто $b : BS = 1 - b : a$.

Звідси $BS = \frac{ab}{a-b}$. Маючи висоту $H = \sqrt{BS^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2}$ та площу основи $S_0 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, обчислюємо об'єм за формулою $V = \frac{1}{3}S_0H$.

2. $a_0 a_2 = K a_1$, то $K = \frac{a_2}{a_1} > 0$, бо $a_0 = 1, a_1 a_2 > 0$. Далі з рівності

$a_{n+1} = K a_n : a_{n-1}$ знаходимо $a_2 = K a_1 : a_0 = K a_1$, $a_3 = K a_2 : a_1 = K^2$,
 $a_4 = K a_3 : a_2 = K^2 : a_1$, $a_5 = K a_4 : a_3 = K : a_1$, $a_6 = K a_5 : a_4 = 1 = a_0$,
 $a_7 = K a_6 : a_5 = a_1$. Отже, члени цієї послідовності повторюються з періодом 6. Тому $a_{1995} = a_3$, тобто $K^2 = 100$, $K = 10$.

3. Наприклад, $p(x) = x^2 + 1995^2 \geq 1995 \cdot 2x = 1995 p'(x)$.

4. $f(f(0)) + f(0) = 3$, тому $f(0) \leq 3$. Отже, можливі випадки:

а) $f(0) = 0$. Не підходить, бо тоді $f(f(0)) + f(0) = 0 \neq 3$;

б) $f(0) = 1$. Тоді за індукцією доводимо, що $f(n) = n + 1$;

в) $f(0) = 2$. Тоді $f(f(0)) + f(0) = f(2) + 2 = 3$, тобто $f(2) = 1$.

Звідси $f(f(2)) + f(2) = f(1) + 1 = 7$, тобто $f(1) = 6$. Отже, маємо

$f(f(1)) + f(1) = f(6) + 6 = 5$, тобто $f(6) = -1$. Суперечність;

г) $f(0) = 3$. Тоді $f(f(0)) + f(0) = f(3) + 3 = 3$, тобто $f(3) = 0$.

Звідси $f(f(3)) + f(3) = f(0) + 0 = 3 \neq 2 \cdot 3 + 3$. Знову суперечність.

Отже, остаточно $f(1995) = 1996$.

5. Якщо на всіх маршрутах n зупинок, то, яким би не був фіксований маршрут $A = A_1 A_2 \dots A_n$ і зупинка T поза ним, з умов задачі випливає, що всі маршрути, які проходять через T , перетинаються з A , причому таких маршрутів є рівно n , кожен з яких проходить через різні зупинки A . Тоді через кожну зупинку міста пройде n маршрутів. Всі вони перетинаються з A , то їх загальна кількість $m = n(n-1) + 1$ (крім виділеного маршруту A через кожну з n його зупинок проходить ще по $n-1$ маршрут). Оскільки через T не може проходити різної кількості маршрутів, то на всіх маршрутах кількість зупинок є однаковою. Отже: а) $m = 7$; б) $n = 4$.

1996 рік

7 клас

1. $n = 26$. Достатньо намалювати три різні квадрати з вершинами у вершинах правильного дванадцятикутника.

2. Якщо a – довжина більшої сторони прямокутника, то потрібно не більше, як $a-1$ розрізання, бо при кожному з них довжина більшої сторони зменшується не менше, як на 1, залишаючись натуральним числом.

3. Досить знайти найменше n , для якого $1 + 2 + \dots + n \geq 1996$. З нерівностей $1 + 2 + \dots + 62 = 1953 < 1996 < 1 + 2 + \dots + 63 = 2016$ маємо, що число 63 – шукане.

4. Намалюємо графіки функцій $y = |x|$ та $y = 1 - |x|$ на одному малюнку. Залишилося тільки вибрати верхні вітки одержаної сукупності ліній.

5. Всього семицифрових чисел можна отримати $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9 \cdot 10^6$. З них чисел без цифри 7 є $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 8 \cdot 9^6$, а отже, із сімкою $9 \cdot 10^6 - 8 \cdot 9^6$. Розглядаючи різницю $(9 \cdot 10^6 - 8 \cdot 9^6) - 8 \cdot 9^6$, легко порахувати, що других більше.

8 клас

1. Нехай $P = a + b + c$. Тоді $\frac{b}{P-b} = \frac{a}{P-a}$, звідки $a = b$. Отже, трикутник ABC рівнобедрений. Можливі варіанти кутів $80^\circ, 80^\circ, 20^\circ$ та $80^\circ, 50^\circ, 50^\circ$.

2. Із заданих чисел можна скласти лише такі 7 різних сум: $-3 \cdot 1996, -2 \cdot 1996, -1996, 0, 1996, 2 \cdot 1996, 3 \cdot 1996$. Тому серед восьми сум принаймні дві співпадуть.

3. Справді,

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\left(\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}}\right)^2} - \sqrt{2} = \\ &= \sqrt{4+\sqrt{7} - 2\left(\sqrt{4+\sqrt{7}}\right)\left(\sqrt{4-\sqrt{7}}\right) + 4-\sqrt{7}} - \sqrt{2} = 0. \end{aligned}$$

4. Позначимо $a = 1995$. Тоді

$$a^2 + (a+1)^2 + (a(a+1))^2 = a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1 = (a^2 + a + 1)^2.$$

5. Нехай O_1, O_2, O_3, O_4 – центри цих квадратів, побудованих відповідно на сторонах AB, BC, CD, DA ; α – гострий кут паралелограма. Тоді $BO_1 = CO_3, BO_2 = CO_2, \angle O_1BO_2 = 90^\circ + \alpha, \angle O_2CO_3 = 90^\circ + \alpha$. Отже, трикутники O_1BO_2 та O_3CO_2 , рівні. Тому $O_1O_2 = O_2O_3, \angle BO_2O_1 = \angle CO_2O_3$. Але $\angle BO_2C = 90^\circ$, то й кут між O_1O_2 та O_2O_3 теж 90° . Аналогічно доводимо для інших двох суміжних сторін чотирикутника $O_1O_2O_3O_4$ та кутів між ними.

9 клас

1. $p = 2$ не задовольняє. $p = 3$ підходить. А для простих $p > 3$ маємо $2^p = 3a + 2$, $p^2 = 3b + 1$, де a та b – натуральні числа. Тому $2^p + p^2$ ділиться на 3 і не є простим.

2. При $a \neq 0$ розглянемо $f(x) = ax^2 + bx + c$. Згідно з умовою задачі маємо $f(0)f(1) < 0$. Оскільки квадратична функція $y = f(x)$ набуває значень різних знаків, то рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ має два різні корені, а його дискримінант $D = b^2 - 4ac > 0$. Якщо ж $a = 0$, то досить довести, що $b \neq 0$. Справді, в протилежному випадку з умови задачі випливає, що $c^2 < 0$.

3. Виграшна стратегія є у першого гравця. Для цього він, незалежно від гри суперника, повинен послідовно записувати такі числа: 15, 31, 62, 124, 249, 499, 998, 1996.

4. Якщо $\angle C = 90^\circ$, то $CM = R$. Якщо $\angle A = 90^\circ$ чи $\angle B = 90^\circ$, то $CM \neq R$. Навпаки, якщо M – середина AB , то $OM \perp AB$. Нехай H – середина OM , де O – центр описаного навколо ABC кола. Якщо $CM \perp OM$, то $CM = OC = R$, але трикутник ABC є тупокутним.

5. Розглянемо дану пряму як числову вісь і виділимо на ній цілочислові точки. Якщо кольори в них чергуються, то серед п'яти послідовних точок є кінці та середина потрібного відрізка. Якщо ні, то є дві сусідні точки, наприклад, $n+1$ та $n+2$ кольору A . Припустимо, що вказаного відрізка не існує. Тоді послідовно встановимо кольори таких точок: n , $n+3$ – колір B , $n+6$ – колір A , $n+4$ – колір B , $n+5$ – колір A . Але, яким би не був колір точки $n+8$, вказаний відрізок все одно існує.

10 клас

1. У жодного з гравців. Кожне з записаних чисел закінчується на 10. Тому не ділиться на 4, отже, й на 1996.

2. Запишемо рівняння у вигляді $(x-1)(y-1) = 1997$. Оскільки 1997 – просте число, то множники в лівій частині можуть набувати лише значень ± 1 та ± 1997 . Звідси знаходимо такі пари розв'язків:

(2;1998), (1998;2), (0;-1996), (-1996;0).

3. Зведемо числа a та b до найменшого спільного знаменника. Нехай c – чисельник більшого з отриманих при цьому дробів. Тоді потрібно буде не більше, як $c-1$ розрізання, бо при кожному з них більшого на даний момент дробу зменшується не менше, як на 1, залишаючись натуральним числом.

4. Покладемо $y = \frac{\pi}{2}$. Тоді $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -f(0)\sin x$. Якщо $f(0) = A$, то $f(x) = A\cos x$. Підстановкою у початкове рівняння переконуємося, що A може бути довільним дійсним числом.

5. Якщо M – середина, чи один із кінців відрізка BC , то шуканою є відповідна медіана трикутника. Для інших положень M розглянемо точку K – середину BC . Нехай $KP \perp AM$, і точка P лежить на контурі трикутника ABC , а O – точка перетину MP та AK . Тоді $APKM$ – трапеція, отже, $S_{\square AOP} = S_{\square MOK}$. Але $S_{\square AKC} = S_{\square AKB}$, то MP – шукана пряма.

11 клас

1. $A = 1001\overline{abc} + (\overline{def} - \overline{abc})$, де кожен із двох доданків ділиться на 11.

2. Легко бачити, що числа a та b цілі, а площі всіх одержаних після розрізання прямокутників виражаються парними числами. Тому ab , як площа початкового прямокутника, – парне число, причому, оскільки числа a та b є цілими, то принаймні одне з них є парним.

3. Маємо
$$A = \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{11}} \cdot 2\sin\frac{\pi}{11} \cdot A = \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{11}}.$$

$$\cdot \left[\left(\sin\frac{3\pi}{11} - \sin\frac{\pi}{11} \right) + \left(\sin\frac{5\pi}{11} - \sin\frac{3\pi}{11} \right) + \dots + \left(\sin\frac{11\pi}{11} - \sin\frac{9\pi}{11} \right) \right] = -\frac{1}{2}.$$

4. Виграшна стратегія є у першого гравця. Для цього він повинен після кожного свого ходу залишати суперникові непарне число. Цього можна добитися, наприклад, весь час віднімаючи 1.

5. Числа $\sqrt{2}$ та $2 + \sqrt{2}$ – ірраціональні, тому $n\sqrt{2}$ та $n(2 + \sqrt{2})$ теж ірраціональні, $n\sqrt{2} \neq m(2 + \sqrt{2})$, бо $\sqrt{2} \neq \frac{2m}{n-m}$. При кожному натуральному $k \geq 2$ на інтервалі $(1, k)$ міститься $P_k = \left[\frac{k}{\sqrt{2}} \right] + \left[\frac{k}{2 + \sqrt{2}} \right]$ членів із об'єднання елементів послідовностей $n\sqrt{2}$ та $n(2 + \sqrt{2})$. Але $\frac{k}{\sqrt{2}} + \frac{k}{2 + \sqrt{2}} = k$ і числа $\frac{k}{\sqrt{2}}$, $\frac{k}{2 + \sqrt{2}}$ ірраціональні, то сума їх дробових частин дорівнює 1. Отже, $P_k = k - 1$. Тому між будь-якими сусідніми натуральними числами знаходиться рівно один елемент із сукупності $n\sqrt{2}$ та $n(2 + \sqrt{2})$, а для їх цілих частин справедливе твердження задачі. Зауважимо, що числа $\sqrt{2}$ та $2 + \sqrt{2}$ можна замінити довільними додатними ірраціональними числами a та b , для яких $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$.

1997 рік

7 клас

1. Такого не може бути, бо за підрахунком по рядках у таблиці виходить більше чорних клітинок, ніж білих, а за підрахунком по стовпчиках – білих більше, ніж чорних.

2. Одним трикутником із меншими розмірами не вдасться покрити одночасно двох вершин намальованого трикутника. Отже, з двох трикутників, які його покривають, принаймні один більший, або рівний йому за розмірами.

3. Зрозуміло, що половину площі вони разом косили $8:2=4$ години. Тому перший косив сам 6 годин. Отже, на всю площу йому треба 12 годин.

4. Якщо $\overline{abc} = \overline{def}$, то таких квіток стільки ж, як і квіток \overline{abc} , тобто 1000. Якщо $\overline{abc} \neq \overline{def}$, то такі щасливі квітки можна розбити на пари \overline{abcdef} та \overline{defabc} .

8 клас

1. Запишемо нерівність у вигляді $1 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Звідси випливає,

що принаймні одне з чисел менше, ніж 3, а отже, дорівнює 2. Якщо є ще одна двійка, то третє може бути довільним простим. Якщо ні – то підходять лише набори 2, 3, 3 та 2, 3, 5 зі всіма перестановками чисел у них.

2. Оскільки $a^4 + a^3 + a^2 + 9 = a(a^3 + a - 1) + (a^3 + a - 1) + 10 = 10$,
 $a^5 - a^2 - a + 6 = a^2(a^3 + a - 1) - (a^3 + a - 1) + 5 = 5$, то значення такого виразу дорівнює 2.

3. Сума чисел таблиці дорівнює $3M$. Нехай a – її центральний елемент. Додамо до вказаних в умові восьми сум ще суми вертикального та горизонтального рядків таблиці, які містять елемент a . При цьому елемент a в одержані 10 сум ввійде 6 разів, а всі інші елементи таблиці – по 3 рази. Отже, $10M = 3 \cdot 3M + 3a$, тобто $M = 3a$.

4. Нехай задано квадрат $ABCD$, в якому $\angle DMC = 150^\circ$. Тоді $\angle MDC = \angle MCD = 15^\circ$. Побудуємо на стороні AB всередині квадрата правильний трикутник AKB . Отримаємо два рівнобедрені трикутники KAD та KBC з кутами 75° при основах. Тому $\angle KDC = \angle KCD = 15^\circ$. Отже, точки K та M співпадають, значить, $\angle AMB = \angle AKB = 60^\circ$.

5. Нехай A та B – дві довільні сусідні точки, $AB = a$. Тоді для довільної точки X прямої $|AX - BX| = a$, якщо X знаходиться поза AB . Тому модуль різниці між сумами відстаней від точки A та від точки B до решти 1995 точок буде мати вигляд $(2n + 1) \cdot a \neq 0$.

9 клас

1. Область допустимих значень є такою: $[-3; 3\sqrt{3}]$. При $x = 0$ нерівність очевидна, при $x > 0$ перший доданок більший від правої частини, а при $x < 0$ – другий. Отже, розв'язок: $[-3; 3\sqrt{3}]$.

2. Оскільки сума всіх множників дорівнює нулю, а їх кількість непарна, то хоч один множник є парним числом.

3. Число $n^2 + 8n + 9 = (n - 1)(n + 9) + 18$ повинно ділитися на $n + 9$, тому 18 ділиться на $n + 9$. Отже, $n = 9$ або, якщо допускати і таку можливість, $n = 0$.

4. Сума зовнішніх кутів довільного опуклого багатокутника дорівнює 360° . Якщо вони виражаються цілим числом градусів, то багатокутник не може мати більше, як 360 кутів.

5. Зауважимо, що $\angle EMH = 90^\circ$. Тому навколо чотирикутника $MECH$ можна описати коло. Тоді $\angle MHE = \angle MCE = 45^\circ$, $\angle MEN = \angle MCH = 45^\circ$. Отже, $\angle MEN = \angle MHE = 45^\circ$.

10 клас

1.
$$\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} \leq \frac{x}{2x^2 y} + \frac{y}{2xy^2} = \frac{1}{xy}.$$

2. Не можна. Нехай сума всіх чисел таблиці дорівнює $3M$, a – центральний елемент таблиці. Додамо до вказаних в умові восьми сум ще суми вертикального та горизонтального рядків таблиці, які містять елемент a . При цьому елемент a в одержані 10 сум ввійде 6 разів, а всі інші елементи таблиці – по 3 рази. Отже, $10M = 3 \cdot 3M + 3a$, тобто $M = 3a$. Тому M не може дорівнювати числу 1997, яке на 3 не ділиться.

3. Всередині такого квадрата можна помістити правильний трикутник зі стороною $10\sqrt{3}$. Оскільки кожна його вершина може знаходитися або на кляксі, або поза нею, то знайдуться такі дві вершини, що або обидві будуть на кляксах, або обидві поза ними. Вони і є кінцями шуканого відрізка.

4. На яку би цифру не помножив 10 перший гравець, він може отримати число від 20 до 90 включно. У кожному з цих випадків другий гравець матиме змогу записати число з відрізка $[111; 221]$. Тоді число, записане на другому кроці першим гравцем, попаде на відрізок $[222; 1989]$. Помноживши це число, наприклад, на 9, другий перемаже.

5. Нехай у трикутнику ABC кут C – прямий, O – центр описаного кола, R – радіус цього кола, CD – висота трикутника, S – його площа. зрозуміло, що CO – медіана, $AB = 2 \cdot CO$, $CO = R$. Тоді

$S = 0,5 \cdot AC \cdot BC = 0,5 \cdot CO^2$ та $S = 0,5 \cdot AB \cdot CD$. Отже, $CD = 0,5 \cdot CO$.
Тому $\angle COD = 30^\circ$. Звідси маємо, що $\angle BAC = 15^\circ$, $\angle ABC = 75^\circ$.

11 клас

1. Областю визначення функції є відрізок $[-2; 2]$. Розкриваючи знак модуля, одержимо, що $y = 1$ при $\sqrt{3} \leq |x| \leq 2$ та $y = \sqrt{4 - x^2}$ при $|x| < \sqrt{3}$. Відзначимо, що друга лінія є дугою кола $x^2 + y^2 = 4$.

2. При $p = 3$ число 20 має 6 дільників: 1, 2, 4, 5, 10, 20. При $p > 3$ число $p^2 + 11 = (p - 1)(p + 1) + 12 > 12$ ділиться на 12. Але 12 теж має 6 дільників, тому $p > 3$ не підійдуть. Безпосередньою перевіркою переконуємося, що не підходить також $p = 2$.

3. Всередині такого куба можна помістити правильний тетраедр з ребром 11 см. Якщо би більше, ніж дві із чотирьох вершин тетраедра належали поміщенням всередині кулькам, то принаймні дві з них були б одного кольору. В іншому випадку принаймні дві вершини тетраедра не належатимуть жодній кульці.

4. Зауважимо, що парні степені двійки при діленні на 3 дають остачу 1, а непарні – остачу 2. Тому виграшна стратегія є у гравця, який розпочав гру. Для цього на першому кроці він повинен відняти 2, одержавши, число 1995, яке ділиться на 3, а потім віднімати двійки в степенях, протилежних за парністю до степенів двійок у ході суперника. Тоді кожним своїм ходом він отримуватиме невід'ємні цілі числа, кратні 3, які щоразу зменшуються. Відповідно, другий гравець жодного разу отримати число, кратне трьом не зможе. Отже, за скінченну кількість кроків починаючий гру отримає 0.

5. Нехай у трикутнику ABC кут C – прямий, O – центр описаного кола, R – радіус цього кола, CD – висота трикутника, S – його площа. зрозуміло, що CO – медіана, $AB = 2 \cdot CO$, $CO = R$. Тоді $S = 0,5 \cdot AC \cdot BC = 0,5 \cdot CO^2$ та $S = 0,5 \cdot AB \cdot CD$. Отже, $CD = 0,5 \cdot CO$.
Тому $\angle COD = 30^\circ$. Звідси маємо, що $\angle BAC = 15^\circ$, $\angle ABC = 75^\circ$.

1998 рік

7 клас

1. Для отримання 12%-го розчину потрібно змішати дві частини 15%-го та три частини 10%-го розчинів. Це можна зробити, наприклад, так: наливаємо 5 літрів 15%-го розчину у п'ятилітрову посудину, а звідти переливаємо 3 літри у трілітрову посудину. Спорожнивши останню, наливаємо в неї 3 літри 10%-го розчину, а потім переливаємо весь вміст у п'ятилітрову посудину. І, нарешті, відливаємо зайвих 4 літри отриманого 12%-го розчину у чотирилітрову посудину.

2. Це можна зробити, наприклад, так:

-1	1	1	1
-1	-1	1	1
-1	-1	-1	1

3. Маємо $\frac{1}{1998} < \frac{1997}{n} < \frac{1}{1997} \Leftrightarrow \frac{1997}{1997 \cdot 1998} < \frac{1997}{n} < \frac{1997}{1997 \cdot 1997}$.

Тому $1997^2 < n < 1997 \cdot 1998$. Оскільки 1997 є простим числом, то всі такі n задовольняють умову задачі. Отже, шуканих дробів є 1996.

4. Переможе перший гравець. Спочатку він повинен закреслити клітинку з числом 1. Решту клітинок розіб'ємо на дві групи: 2 – 9 та 10 – 17. За умовою задачі тепер жоден гравець не зможе закреслити одночасно числа з різних груп. Отже, для перемоги першому достатньо на кожен хід другого гравця відповідати так, щоб модулі різниць між числами, закресленими ним і його суперником, весь час дорівнювали 8.

8 клас

1. Маємо $1998 = \overline{aab} + \overline{aba} + \overline{baa} = 111(2a + b)$. Отже, $2a + b = 18$. Звідси знаходимо такі чотири трійки розв'язків: (558,585,855), (666,666,666), (774,747,477), (882,828,288).

2. Буде. Справді,

$$\begin{array}{ccccccc} 11\dots155\dots56 & = & 11\dots100\dots0 & + & 55\dots5 & + & 1 = \\ \text{1998} & & \text{1997} & & \text{1998} & & \text{1998} & & \text{1998} \end{array}$$

$$= \frac{1}{9}(10^{1998} - 1)10^{1998} + \frac{5}{9}(10^{1998} - 1) + 1 = \left(\frac{10^{1998} + 2}{3} \right)^2.$$

Останній дріб є цілим числом, бо сума цифр чисельника дорівнює 3.

3. Нехай A_1, B_1, C_1 – точки дотику вписаного кола до сторін BC , CA , AB відповідно. Бісектриса кута A перпендикулярна до B_1C_1 , бо $AB_1 = AC_1$. Тому й пряма, проведена через A_1 , також перпендикулярна до B_1C_1 . Аналогічні міркування для інших проведених прямих доводять, що всі вони співпадають з прямими, на яких лежать висоти трикутника $A_1B_1C_1$, отже, перетинаються в одній точці.

4. Розіб'ємо таблицю вертикальною рисою на дві рівні частини. Для перемоги другому гравцеві достатньо на кожен хід суперника в одній з частин таблиці відповідати зафарбуванням клітинки з того ж рядка, яка знаходиться в іншій частині таблиці через клітинку від клітинки, зафарбованої перед цим першим гравцем. Таким чином, його ходи вичерпаються не раніше, ніж ходи першого гравця.

9 клас

1. 1998 ділиться на 3, то $11\dots1$ ділиться на 111, отже, й на 37.

1998

2. Нехай A_1, B_1, C_1 – точки дотику вписаного кола до сторін BC , CA , AB відповідно. Бісектриса кута A перпендикулярна до B_1C_1 , бо $AB_1 = AC_1$. Тому й пряма, проведена через A_1 , також перпендикулярна до B_1C_1 . Аналогічні міркування для інших проведених прямих доводять, що всі вони співпадають з прямими, на яких лежать висоти трикутника $A_1B_1C_1$, отже, перетинаються в одній точці.

3. Першому гравцеві для перемоги спочатку потрібно закреслити центральну клітинку, а потім робити симетричні відносно неї ходи до ходів суперника.

4. Нехай $x_1 = \frac{1}{x}$, $y_1 = \frac{1}{y}$. Тоді у системі координат x_1Oy_1

отримаємо точки $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{8}\right)$, $(2; 4)$, $(1; 2)$, $(3; 1)$, $\left(4; \frac{5}{4}\right)$ та рівняння

прямої $ax_1 + by_1 = 1$. Неважко переконатися, що серед цих точок максимальна кількість таких, які лежать на одній прямій, дорівнює 3. Така ж найбільша кількість заданих точок може лежати і на лінії, заданій в умові задачі.

5. Не можна. Справді, при вказаних перетвореннях дискримінант тричлена не змінюється, а дискримінанти тричленів $x^2 - 3x - 4$ та $x^2 - 2x - 5$ є різними. Зауважимо тільки, що при вказаних перетвореннях можуть появлятися також вирази, які не є квадратними членами. У такому разі обчислювати для них дискримінант будемо чисто формально, вважаючи відсутні коефіцієнти нулями.

10 клас

1. Справді,

$$\frac{m^3}{m+n} = \frac{(m^3 + n^3) - n^3}{m+n} = m^2 - mn + n^2 - n \cdot \frac{n^2}{m+n},$$

отже, є цілим числом.

2. Оскільки $\sin A + \sin C = \sin B + \sin D$, то отримаємо рівність

$$2 \sin \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2} = 2 \sin \frac{B+D}{2} \cos \frac{B-D}{2}. \quad \text{Але} \quad A+B+C+D = \pi,$$

$$\text{то} \quad \sin \frac{A+C}{2} = \sin \frac{B+D}{2} \neq 0. \quad \text{Отже,} \quad \cos \frac{A-C}{2} = \cos \frac{B-D}{2}. \quad \text{Звідси}$$

$$\text{випливає, що також} \quad \sin \frac{A-C-B+D}{4} \cdot \sin \frac{A-C+B-D}{4} = 0. \quad \text{Тому}$$

$A+D = B+C = \pi$ або $A+B = C+D = \pi$, що й досить було довести.

3. Із заданих рівнянь послідовно знаходимо: $x \geq 0$, $0 < z \leq 1$,

$$0 \leq y \leq 1, \quad \left| \frac{1-y}{1+y} \right| = \frac{1-y}{1+y}, \quad y^2 = \frac{z+1}{2}, \quad z^2 = \frac{1}{1 + \frac{1-y}{1+y}} = \frac{1+y}{2}. \quad \text{Отже,}$$

$$y^2 - z^2 = \frac{z-y}{2}, \quad \text{тобто} \quad (y-z)(y+z+1) = 0. \quad \text{Звідси маємо} \quad y = z. \quad \text{Тоді}$$

$$y^2 = \frac{y+1}{2}, \quad y_1 = -\frac{1}{2} \quad (\text{не задовольняє}), \quad y_2 = 1. \quad \text{Остаточо отримуємо}$$

$$y = z = 1, \quad x = 0.$$

4. У кожній парі «дівчина-хлопець» буде один замріяний погляд. Тому отримуємо рівняння $mn=117$, де m – кількість хлопців, а n – кількість дівчат у класі. Оскільки $117=1\cdot 117=3\cdot 39=9\cdot 13$, то умову задачі задовольняють лише такі два випадки: $m=9, n=13$ та $m=13, n=9$.

5. Нехай M та N є відповідно серединами відрізків AC та BD . Припустимо, що ці точки не співпадають. Тоді при кожному проектуванні вони обидві будуть проектуватися в центри паралелограмів. Отже, пряма MN повинна бути паралельною до кожного з напрямів проектування. Але це неможливо, бо в задачі мова йде про дві різні паралельні проекції. Отримане протиріччя доводить, що діагоналі $ABCD$ перетинаються в одній точці і діляться точкою перетину пополам. Отже, $ABCD$ – паралелограм.

11 клас

1. Справді,

$$x - \sqrt{x} \leq y - \frac{1}{4} \leq x + \sqrt{x} \Leftrightarrow \left| y - x - \frac{1}{4} \right| \leq \sqrt{x} \Leftrightarrow \left(x - y + \frac{1}{4} \right)^2 \leq x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(x - y - \frac{1}{4} \right)^2 \leq y \Leftrightarrow \left| x - y - \frac{1}{4} \right| \leq \sqrt{y} \Leftrightarrow y - \sqrt{y} \leq x - \frac{1}{4} \leq y + \sqrt{y}.$$

2. Оскільки справджуються нерівності:

$$\cos 12x - 5 \sin 3x \leq 1 - (-5) = 6, \quad 9 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = (3 \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x)^2 + 6 \geq 6,$$

то рівність можлива лише за умови, що одночасно $\cos 12x = 1$, $\sin 3x = -1$, $3 \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$. З останнього рівняння знаходимо

$$x = -\frac{\pi}{6} + \pi m, \quad m \in Z, \quad \text{або} \quad x = \frac{\pi}{6} + \pi l, \quad l \in Z.$$

Підставивши їх в перші два рівняння, переконуємося, що задовольняють тільки $m = 2n$, $n \in Z$, та

$$l = 2k - 1, \quad k \in Z. \quad \text{Отже,} \quad x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in Z, \quad \text{або} \quad x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in Z.$$

3. Оскільки $S(CMD) = S(AKD)$, то $S(CAK) = S(CAM)$. Отже, $AC \square MK$. Тоді $S(CPA) = S(CKA)$. Тому остаточно отримаємо, що

$$S(ABCP) = S(ABCK) = \frac{1}{2}S(ABCD).$$

4. Позначимо $f(-1) = a$. Тоді для всіх $x \neq 0$ виконується рівність

$$f(x) - a = af(x) - af\left(\frac{1}{x}\right). \text{ Замінивши в ній } x \text{ на } \frac{1}{x}, \text{ отримаємо}$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) - a = af\left(\frac{1}{x}\right) - af(x). \text{ Додавши дві останні рівності, одержимо}$$

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) - 2a = 0. \text{ Отже, } f(x) - a = af(x) - a(2a - f(x)), \text{ тобто}$$

$$f(x)(1 - 2a) = a(1 - 2a). \text{ Звідси знаходимо } a = \frac{1}{2}, \text{ бо при інших } a \text{ ми}$$

отримали би, що $f(x) \equiv a \neq \frac{1}{2}$, і рівняння $f(x) = \frac{1}{2}$ не мало би

жодного кореня, що суперечить умові задачі. Зауважимо, що принаймні одна така функція, яка задовольняє умови задачі, існує.

Наприклад, $f(x) \equiv \frac{1}{2}, x \neq 0$.

5. Доведемо справедливість даного твердження для прямокутників розмірами $2^n \times 1998^2, n \geq 0$, застосувавши метод математичної індукції по n . Для $n = 0$ твердження очевидне. Припустимо його справедливість для $n = k$. При цьому будемо вважати, що таких способів розбиття є K . Нехай тепер $n = k + 1$. Проведемо уявно пряму l , яка розбиває прямокутник розмірами $2^{k+1} \times 1998^2$ на два прямокутники розмірами $2^k \times 1998^2$. Розглянемо окремо розбиття, в яких жодна фігурка не перетинає пряму l , та розбиття, в яких хоч одна фігурка перетинає цю пряму. Перших, згідно припущення, отримаємо K^2 способів, тобто непарну кількість. А розбиття другого виду розпадуться на пари симетричних відносно l розбивань, оскільки ця пряма не буде віссю симетрії для жодної з фігурок. Отже, їх буде парна кількість. Таким чином отримаємо, що загальна кількість способів розбиття прямокутника розмірами $2^{k+1} \times 1998^2$ є непарною.

1999 рік

7 клас

1. Позначимо число у другій клітинці через x , а число у третій клітинці – через y . Тоді трійки чисел $34, x, y$ будуть повторюватися. Оскільки у восьмій клітинці має стояти x , то $x = 32, y = 33$.

2. Можна. Достатньо кожному дати по одному цілому листку, одній половинці та по дві треті частинки цілого листка. Для цього доведеться три листки розрізати пополам, а чотири – на три частини.

3. З умови задачі випливає, що $x + y \geq 0, x - y \geq 0, x + y = x - y$. Звідси знаходимо $y = 0$ за умови, що $x \geq 0$.

4. На перші 10 вантажівок будемо вантажити ящики до того часу, поки загальна маса вантажу на кожній з них не перевищить 1,2 тони. Цього завжди можна добитися, бо в іншому разі вдасться доставити ще принаймні один ящик. Тоді для одинадцятої вантажівки залишиться не більше 1,5 тони. Отже, якщо за об'ємом ящики помістяться, то перевезти такий вантаж завжди вдасться.

8 клас

1. З умови задачі випливає, що $x < 0, \sqrt{x^2} = -x$. Отже, $\frac{-2x}{2x^2} = 1999, x = -\frac{1}{1999}$.

2. Не існують. Нехай $m + 1999 = k$. Тоді зліва отримаємо $3k^2 - 1$. А остача правої частини при діленні на 3 дорівнювати двом не може.

3. Оскільки $\angle ABQ = \angle CBQ = \angle AQB$, то трикутник ABQ рівнобедрений. Оскільки P лежить на середній лінії, то $BP = PQ$. Отже, $\angle APQ = 90^\circ$.

4. Запишемо всі ці числа по колу. Послідовно виберемо по колу 1999 разів по 99 чисел підряд і додамо всі отримані при цьому суми. Таким чином ми отримаємо додатне число, яке в 99 разів перевищує суму всіх 1999-и заданих чисел. Отже, їх сума також додатна.

9 клас

1. Оскільки $1900^6 < 1999^6 < 2000^6$, і кожне з крайніх чисел є

двадцятицифровим, то і число 1999^6 також двадцятицифрове. Якщо би в ньому жодна цифра не повторювалася принаймні тричі, то кожна цифра від 0 до 9 використовувалась би по два рази. А отже, їх сума дорівнювала би 90. Але це неможливо, бо 1999^6 не ділиться на 3.

2. Зауважимо, що $x=1$ не є коренем цього рівняння, і помножимо обидві його частини на $(1-x)^2$. Тоді з отриманого при цьому рівняння $(1-x^3)(1-x^5) = (1-x^4)^2$ знайдемо $x=0$.

3. Опустимо перпендикуляри CC_1 та HH_1 до сторони AB . Тоді

$$\begin{aligned} AC_1^2 - BC_1^2 &= (AC^2 - CC_1^2) - (BC^2 - CC_1^2) = AC^2 - BC^2 = \\ &= AH^2 - BH^2 = (AH_1^2 + HH_1^2) - (BH_1^2 + HH_1^2) = AH_1^2 - BH_1^2. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що $AC_1 = AH_1$ і точки H_1 та C_1 співпадають. Отже, точка H належить прямій CC_1 . Аналогічно доводиться, що вона лежить і на двох інших прямих, які містять висоти трикутника.

4. Використовуючи теорему Вієта, отримаємо

$$\begin{aligned} x_1^4 + x_2^4 &= \left((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \right)^2 - 2x_1^2x_2^2 = \left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} \right)^2 - \frac{1}{2\alpha^4} = \\ &= 2 + \left(\alpha^4 + \frac{1}{2\alpha^4} \right) \geq 2 + 2\sqrt{\alpha^4 \cdot \frac{1}{2\alpha^4}} = 2 + \sqrt{2}. \end{aligned}$$

5. Неважко переконатися, що у четвертому рядку будуть записані числа $3(c-b)$, $3(a-c)$, $3(b-a)$. Тому, починаючи з четвертого рядка, всі числа мають ділитися на 3, і серед них не буде ні 1999, ні 2000.

10 клас

1. З даних рівностей випливає, що $(x-y)(1-z) = 0$. Якщо $x=y$, то отримуємо $x+xz=6$ та $z+x^2=6$. Віднімаючи від першого рівняння друге, знайдемо $(z-x)(1-x) = 0$. Отже, $x=y=z$ або $x=y=1$. У першому випадку знаходимо $x=y=z=-3$ або $x=y=z=2$. А у другому – отримаємо $x=y=1$, $z=5$. Якщо ж $z=1$, то приходимо до системи рівнянь $x+y=6$, $xy=5$. З неї знаходимо $x=5$, $y=1$ та $x=1$, $y=5$.

2. Нехай M – відмінна від O точка перетину прямої BO з колом, описаним навколо трикутника AOC . Тоді

$$\begin{aligned}\angle OCM &= \angle OCA + \angle ACM = \frac{1}{2} \angle ACB + \angle AOM = \\ &= \frac{1}{2} \angle ACB + \angle OAB + \angle OBA = \frac{1}{2} (\angle ACB + \angle BAC + \angle ABC) = 90^\circ.\end{aligned}$$

Отже, OM є діаметром кола і точка S лежить на цьому діаметрі.

3. Очевидно, що $x + y \geq 0$. Запишемо рівняння у вигляді $x^2 = (\sqrt{x+y})^2 - x + \sqrt{x+y}$. Звідси розкладом на множники легко одержати рівняння $(x - \sqrt{x+y})(x + \sqrt{x+y} + 1) = 0$. Отже, при $x \geq 0$ маємо $x = \sqrt{x+y}$, тобто $y = x^2 - x$. А при $x \leq -1$ знаходимо $x = -\sqrt{x+y} - 1$, звідки отримуємо $y = x^2 + x + 1$.

4. Такою є, наприклад, послідовність $a_n = (n!)^3$.

5. Зрозуміло, що менше, ніж $n^2 - 1$ дільниць доріг бути не може. Вказану ж кількість дільниць легко одержати, провівши одну вертикальну дорогу довжиною $10(n-1)$ км вздовж сторони квадрата та n горизонтальних доріг такої ж довжини. Отже, мінімальна довжина такої системи доріг буде $10(n^2 - 1)$ км.

11 клас

1. Зауважимо, що $x=1$ не є коренем цього рівняння, і помножимо обидві його частини на $(1-x)^2$. Тоді з рівняння $(1-x^3)(1-x^{11}) = (1-x^7)^2 \Leftrightarrow x^3(x^4-1)^2 = 0$ знайдемо $x = -1$ та $x = 0$.

2. Задану в умові рівність можна записати у вигляді

$$\sin \alpha (\sin \alpha - \cos \beta) + \sin \beta (\sin \beta - \cos \alpha) = 0.$$

Якщо $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$, то $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} - \beta < \frac{\pi}{2}$. Отже, рівність буде неможливою, бо $\sin \alpha - \cos \beta < \sin \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) - \cos \beta = 0$, $\sin \alpha > 0$ та

$\sin \beta - \cos \alpha < \sin \beta - \cos \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) = 0$, $\sin \beta > 0$. Аналогічно доводимо,

що не може бути $\alpha + \beta > \frac{\pi}{2}$. Якщо ж $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, то рівність очевидна.

3. Розглянемо функцію $F(x) = f(x) - f(x + \sin x)$. За умовою задачі $F(x) \geq 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Тоді $F(\pi n) = 0$, $n \in \mathbb{Z}$. Оскільки $F(x)$, як і $f(x)$, має похідні у всіх точках, то за теоремою Ферма $F'(\pi n) = 0$, $n \in \mathbb{Z}$. Отже, $f'(\pi n) - (1 + \cos \pi n) f'(\pi n + \sin \pi n) = 0$, $n \in \mathbb{Z}$. Звідси випливає, що $f'(\pi n) = 0$, $n \in \mathbb{Z}$. А це суперечить умові задачі.

4. Позначимо через D, E, F середини відрізків AB, AP, BP відповідно. Тоді $AE = PE = ME$, $BF = PF = KF$ за властивістю медіан. Крім того, за властивістю середніх ліній трикутників $DE = PF$, $DF = PE$. З отриманих рівностей випливає, що $\triangle DEM = \triangle KFD$ (за трьома сторонами) та $\angle DEM = \angle KFD$. Але $DFPE$ є паралелограмом, то $\angle DEP = \angle DFP$. Отже, $\angle PEM = \angle PFK$. Тоді і вдвічі менші від них кути PAC та PBC також будуть рівними.

5. Нехай $a = \frac{199919991999}{3}$. Умови задачі задовольняє таблиця:

	a	a	a	a	a	
a	a	$-5a$	a	$-5a$	a	a
a	a	a	a	a	a	a
a	$-5a$	a	$-5a$	a	$-5a$	a
a	a	a	a	a	a	a
a	a	$-5a$	a	$-5a$	a	a
	a	a	a	a	a	

2000 рік

7 клас

1. а). Зрозуміло, що $n \leq 1999$. Звідси випливає, що $S(n) \leq 28$, $n \geq 2000 - 28 = 1972$. Але числа n та $S(n)$ при діленні на 9 дають однакові остачі. Щоб у сумі отримати число 2000 з остачею 2,

такі остачі мають дорівнювати 1. Із отриманого діапазону цю умову задовольняють лише числа 1972, 1981, 1990 та 1999. Легко переконатися, що умову задачі задовольняє тільки $n = 1981$.

б). Таких n не існує. Перший і другий, другий і третій, а отже, всі три доданки в лівій частині при діленні на 3 дають однакові остачі. Тому їх сума має ділитися на 3. Але число 2000 на 3 не ділиться.

2. Розглянемо дану пряму як числову вісь і виділимо на ній цілочислові точки. Якщо кольори в них чергуються, то серед п'яти послідовних точок є кінці та середина потрібного відрізка. Якщо ні, то є дві сусідні точки, наприклад, $n+1$ та $n+2$ кольору A . Припустимо, що вказаного відрізка не існує. Тоді послідовно встановимо кольори таких точок: n , $n+3$ – колір B , $n+6$ – колір A , $n+4$ – колір B , $n+5$ – колір A . Але, яким би не був колір точки $n+8$, вказаний відрізок все одно існує.

3. Якщо спочатку сума всіх 1999 чисел була парною, то принаймні одне з них було парним. Витерши його, знову отримаємо парну суму. Якщо ж початкова сума була непарною, то принаймні одне з 1999 чисел також непарне. Сума, яка залишиться після його витирання, буде парною. Для 2000 чисел твердження не завжди правильне. Наприклад, якщо спочатку всі числа були непарними.

4. Якщо число n п'ятицифрове, то число k має не менше однієї цифри. Якщо число n трицифрове чи двоцифрове, то число k має не менше чотирьох цифр. У кожному з цих випадків разом маємо не менше 11 цифр. Тому принаймні одна з них повторюється. Якщо число n чотирицифрове чи одноцифрове, то менше 11 цифр отримаємо лише у випадках, коли відповідно число k буде одноцифровим чи чотирицифровим. Але, оскільки при цьому $10000 \leq m = n + k \leq 1999 + 9 = 10008$, то повториться цифра 0.

5. Покладемо $a = 1999n$, $n \in N$, $b = 1999m$, $m \in N$. Підставивши їх у задану рівність, отримаємо $n^{1999} = m^{2000}$. Якщо тепер покласти $n = k^{2000}$, $m = k^{1999}$, $k \in Z$, то знайдемо такі пари розв'язків: $a = 1999 \cdot k^{2000}$, $b = 1999 \cdot k^{1999}$, де k – довільне натуральне число.

8 клас

1. Позначимо $19991999 = a$. Тоді значення заданого виразу дорівнюватиме $a + (a - 1)a(a + 1) = a^3 = 19991999^3$.

2. Нехай a – початковий об'єм води в озері, x – об'єм води, яку випиває один слон за хвилину, y – продуктивність джерел за хвилину, t – шуканий час у хвилинах. З умов задачі отримуємо такі три рівняння: $48x = a + 4y$, $54x = a + 6y$, $6tx = a + ty$. З перших двох випливає, що $y = 3x$. Підставивши цей вираз у третє рівняння, одержимо, що $a = 3tx$. Отже, на основі першої рівності, $48x = 3tx + 12x$, звідки знаходимо $t = 12$ хв.

3. Нехай M, K, N, L є відповідно серединами відрізків AC, DC, BD, AB . За властивістю середніх ліній відповідних трикутників $MK \parallel AD$, $NL \parallel AD$, $ML \parallel BC$, $KN \parallel BC$. Отже, $MKNL$ – паралелограм. Оскільки $MN = KL$, то він є прямокутником. Тоді $\angle ADB = \angle LNB = 180^\circ - \angle DNL > 180^\circ - \angle KNL = 90^\circ$.

4. Запишемо рівняння у вигляді $2(n^2 + 1) = 7n^2 - 7m^2 + 2002$. Його права частина ділиться на 7 при $m, n \in \mathbb{Z}$, а $n^2 + 1$ при діленні на 7 дає лише остачі 1, 2, 3, 5, тому розв'язків у цілих числах немає.

5. Розіб'ємо рядки на пари: перший і другий, третій і четвертий, п'ятий і шостий. Спочатку Миколка записує число у сьомому рядку, який залишився без пари. Далі на кожен запис Сергійка у сьомому рядку відповідає записом у цьому ж рядку. Якщо ж Сергійко записує своє число в іншому рядку, то Миколка робить свій запис у спареному з ним рядку, але лише до тих пір, поки Сергійко не записав у цьому рядку восьме число. Якщо ж Сергійко записує у рядку восьме число, то Миколка у цьому ж рядку записує останнє дев'яте число так, щоб сума всіх чисел рядка стала парною. При такій стратегії Миколка завершуватиме кожен рядок, отже, зможе добитися, щоб усі суми були парними.

9 клас

1. Якщо x – корінь рівняння $x^2 - 4x - 2 = 0$, то $x^2 - 3x - 2 = x$.

Отже, $(x^2 - 3x - 2)^2 - 3(x^2 - 3x - 2) - x - 2 = x^2 - 3x - 2 - x = 0$, тобто x – корінь другого рівняння.

2. З умови задачі випливає, що число $5n - 1 - 5(n - 10) = 49$ ділиться на p . Отже, $p = 7$. Тоді $2000n + 13 = 7(285n + 2) + 5n - 1$ також ділиться на $p = 7$.

3. Оскільки $(x - y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 2xy - y^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{y} \geq 2x - y$ при $y > 0$,

то

$$\begin{aligned} \frac{a^4}{bc} + \frac{b^4}{ca} + \frac{c^4}{ab} &\geq (2a - b)(2a - c) + (2b - c)(2b - a) + \\ &+ (2c - a)(2c - b) = 4(a^2 + b^2 + c^2) - 3(ab + bc + ca) = \\ &= \frac{3}{2} \left[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \right] + a^2 + b^2 + c^2 \geq a^2 + b^2 + c^2. \end{aligned}$$

4. Нехай O, O_1, O_2 – центри цих кіл, і точки A, D лежать на колі з центром O_1 , а точки B, C – на колі з центром O_2 . Зауважимо, що $\angle O_1AD = \angle O_1DA, \angle O_2BC = \angle O_2CB, \angle O_1DC = \angle O_1CD = 90^\circ$. Тому досить довести, що $\angle O_1AB = \angle O_2BA$. Але оскільки в точці A дотична є спільною, то радіуси O_1A та OA перпендикулярні до цієї дотичної. Аналогічно O_2B та OB перпендикулярні до дотичної в точці B . Отже, $\angle O_1AB = \angle OAB = \angle OBA = \angle O_2BA$. Звідси отримуємо, що $\angle ABC + \angle ADC = \angle DAB + \angle DCB$, тому точки A, B, C, D лежать на одному колі.

5. Замінімо спочатку всі числа їхніми остачами від ділення на 3. Виділимо в отриманій послідовності наступні фрагменти для розстановки знаків замість зірочок: $1*2*0$ на початку, $0*1*2$ в кінці та 665 фрагментів вигляду $0*1*2*0$ між ними. При цьому крайні нулі виявляться спільними кінцями для сусідніх фрагментів. Покажемо, що гравець, який починає гру, може добитися перемоги. Розіб'ємо останні 665 фрагментів на пари: перший і другий, третій і четвертий, ..., 663-ій і 664-ий. Спочатку перший гравець ставить знак у

665-му фрагменті, який залишився без пари. Далі, якщо його суперник ставить знак у вільному з цих 665-и фрагментів, то перший гравець ставить свій знак у спареному фрагменті. Якщо ж суперник ставить знак у тому фрагменті, де один знак уже був поставлений, то перший ставить третій знак у цьому ж фрагменті так, щоб серед трьох поставлених знаків у жодному разі не виявилось двох плюсів та одного знака множення. Зрозуміло, що при цьому будуть можливими лише наступні комбінації знаків у даних фрагментах: $0 \times 1 \times 2 \times 0$, $0 \times 1 \times 2 + 0$, $0 \times 1 + 2 \times 0$, $0 + 1 \times 2 \times 0$, $0 + 1 + 2 + 0$. Тому, якщо, крім того, на хід другого гравця у ті фрагменти, де були лише дві зірочки, перший гравець відповідатиме тим самим знаком у тому ж фрагменті, то значення отриманого вкінці виразу ділитиметься на 3.

10 клас

1. Після піднесення обох частин рівності до квадрату дане рівняння може бути записане у вигляді

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 + 2\sqrt{2x-y^2+z^2-7} \cdot \sqrt{2y-x^2+z^2-12} = 0.$$

Оскільки всі доданки у лівій частині рівності невід'ємні, то $x=1$, $y=2$, $z=3$. Перевірка показує, що знайдені x, y, z задовольняють початкове рівняння.

2. Нехай у Івана Карповича x курей та y індиків. З умови задачі випливає, що $0,1x + 0,9y = 0,2(x + y)$. Звідси знаходимо, що $x = 7y$. Отже, індики складають восьму частину господарства.

3. З паралельності відповідних відрізків випливає, що прямі AA_1, BB_1, CC_1 перетинаються в одній точці – центрі гомотетії трикутників ABC та $A_1B_1C_1$. Позначимо цей центр через O . З властивостей площ подібних трикутників випливає, що коефіцієнт гомотетії дорівнює $\sqrt{\frac{a}{b}}$. Нехай P_1 – точка перетину прямих A_1B_1 та

PO . Тоді $\frac{PO}{P_1O} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, а отже, також $\frac{S(PB_1O)}{S(P_1B_1O)} = \sqrt{\frac{a}{b}}$. Аналогічно

отримаємо для площ трикутників $PA_1O, RA_1O, RC_1O, QC_1O, QB_1O$, отже,

$$\frac{S(PQR)}{S(A_1B_1C_1)} = \sqrt{\frac{a}{b}}. \text{ Тому } S(PQR) = b \cdot \sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{ab}.$$

4. З умови задачі випливає, що $a_0 + a_1 + \dots + a_{10} = 11$, тобто дорівнює кількості всіх записаних чисел. З іншого ж боку $a_0 + a_1 + \dots + a_{10} = 0 \cdot a_0 + 1 \cdot a_1 + \dots + 10 \cdot a_{10}$. Отже, $a_0 = a_2 + 2a_3 + \dots + 9a_{10}$ та $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + 10a_{10} = 11$. З останньої рівності випливає, що відмінними від нуля можуть бути не більше чотирьох доданків. Отже, $a_0 = k \geq 7$. Тоді обов'язково $a_k = 1, a_1 \geq 1$. При цьому з останнього рівняння отримаємо, що $a_2 \leq 1$, а всі інші елементи, крім перерахованих вище, можуть бути лише нулями. Якщо $a_2 = 0$, то $a_0 = 8$. При цьому жодне значення a_1 умову задачі задовольняти не буде. Отже, $a_2 = 1$. Тоді $a_1 = 2$, і ми отримуємо такий набір шуканих чисел: 7, 2, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0.

$$5. \text{ Якщо } y = \operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}, \text{ то } \frac{2}{y} = \frac{1}{\operatorname{tg} x} - \operatorname{tg} x, \frac{4}{y^2} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} + \operatorname{tg}^2 x - 2.$$

$$\text{Отже, } f(y) = \operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x = \left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} + \operatorname{tg}^2 x \right)^2 - 2 = \left(\frac{4}{y^2} + 2 \right)^2 - 2 = \frac{16}{y^4} + \frac{16}{y^2} + 2.$$

Позначимо $\sin^2 x = a, \cos^2 x = b$. Враховуючи, що $a + b = 1$, після простих перетворень одержимо $f(\sin x) + f(\cos x) = 4 \left(\frac{2}{ab} - 1 \right)^2$. Але

$$ab = \frac{1}{4} \sin^2 2x \leq \frac{1}{4}, \text{ то } f(\sin x) + f(\cos x) \geq 4 \left(\frac{2}{0,25} - 1 \right)^2 = 196.$$

11 клас

1. Сума кубів трьох послідовних натуральних чисел дорівнює $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = 3n(n^2 + 2)$. При непарних n вона є непарною, а при парних – ділиться на 4. Отже, не може дорівнювати числу, записаному лише двійками, яке є парним і на 4 не ділиться.

2. За властивістю кута між хордою і дотичною $\angle BDA = \angle BCD$. Оскільки чотирикутник $CFKD$ вписаний, то $\angle BCD = \angle FKD$. Отже, $\angle BDA = \angle FKD$, значить, $BD \parallel FK$.

3. Нехай $f(x) = \sin 1999x + \sin ax + \sin bx \equiv 0$. Тоді також

$$f'(x) = 1999 \cos 1999x + a \cos ax + b \cos bx \equiv 0,$$

$$f'''(x) = -1999^3 \cos 1999x - a^3 \cos ax - b^3 \cos bx \equiv 0.$$

Поклавши в двох останніх тотожностях $x = 0$, одержимо систему рівнянь $1999 + a + b = 0$ та $1999^3 + a^3 + b^3 = 0$. З першого рівняння знаходимо $(a + b)^3 = -1999^3$. Віднявши тепер друге рівняння, отримуємо, що $ab = 0$. Отже, маємо два розв'язки: $a = 0, b = -1999$ та $a = -1999, b = 0$. Вони обидва задовольняють умову задачі.

4. З нерівності Коші та рівнянь системи випливає:

$$12 = xy + yz + zx \geq 3\sqrt[3]{xy \cdot yz \cdot zx} \Rightarrow xyz \leq 8,$$

$$xyz = 2 + x + y + z \geq 4\sqrt[4]{2xyz} \Rightarrow xyz \geq 8.$$

Отже, $xyz = 8$, причому рівність досягається тільки при $x = y = z = 2$, які і є розв'язками заданої системи.

5. Всього можна утворити $C_6^3 = 20$ різних трьохелементних множин. Розглянемо разом із вибраними множинами A_i їх доповнення. Разом отримаємо 18 множин. Отже, знайдеться така множина C , яка не співпадатиме з жодною множиною A_i та з жодним доповненням до A_i . Зрозуміло, що таку ж властивість матиме і множина $X \setminus C$. Тоді до кожної з множин A_i входять як елементи множини C , так і елементи $X \setminus C$. Залишається пофарбувати елементи множини C в один колір, а елементи її доповнення – в інший.

2001 рік

7 клас

1. Оскільки сума трьох відстаней від B до A , від A до D , від D до C дорівнює відстані від B до C , то ці пункти лежать на одній прямій у такому порядку: B, A, D, C . Отже, $AC = AD + DC = 220$ км.

2. Оскільки $111111 = 3 \cdot 33333 + 3 \cdot 3333 + 3 \cdot 333 + 3 \cdot 33 + 5 \cdot 3$, то звідси маємо 17 доданків. Якщо би кількість доданків якогось з перших чотирьох типів була меншою за 3, то від цього загальна кількість доданків лише збільшилась би. Зрозуміло також, що їх не може бути і більше за 3.

3. а) Так. Змістимо спочатку білі шашки з другого рядка у перший, а з третього у четвертий. Потім чорні шашки – з першого рядка у другий, а з четвертого – у третій. Наступні 8 ходів витратимо для пересування білих шашок вдовж рядків вправо, а чорних шашок – вліво. Ще два ходи витратимо, щоб у кожному рядку стало по одній білій та по одній чорній шашці. І два останні ходи білими шашками вправо, а чорними вліво приведуть до потрібної конфігурації.

б) Ні. Поставимо у відповідність кожній шашці номер стовпчика, у якому вона знаходиться. Спочатку сума таких номерів дорівнювала 21. При вказаних переміщеннях така сума або не змінюється, або змінюється на 2, а отже, весь час залишається непарною. Тому вона не зможе стати рівною 6, що відповідатиме всім чорним шашкам у першому стовпчику.

4. В обох випадках – так. Додавимо до наявних чисел число 0. Легко бачити, що $0^2 + 3^2 + 5^2 + 6^2 = 1^2 + 2^2 + 4^2 + 7^2$. Крім того, для кожного натурального n справедлива рівність

$$\begin{aligned} (8n)^2 + (8n+3)^2 + (8n+5)^2 + (8n+6)^2 &= \\ &= (8n+1)^2 + (8n+2)^2 + (8n+4)^2 + (8n+7)^2. \end{aligned}$$

Отже, достатньо буде включати у першу групу числа вигляду $8n, 8n+3, 8n+5, 8n+6$, а в другу – числа $8n+1, 8n+2, 8n+4, 8n+7$, де $n \in \mathbb{Z}_+$. Зайвий уже тепер нуль можна відкинути.

8 клас

1. З умови випливає, що $x \geq 0$. Тому рівняння зводиться до такого: $|x-2| = x$. З нього знаходимо $x = 1$.

2. Нехай x – довжина половини шляху між заданими пунктами у кілометрах. Тоді середня швидкість на всьому шляху $\frac{2x}{x/4 + x/6} = 4,8$

(км/год.). Оскільки у зворотному напрямі турист частину шляху рухався зі швидкістю, більшою за середню швидкість у напрямі від A до B , то затратити на зворотний шлях більше часу, ніж на шлях від A до B , він не міг.

Пропонуємо читачам самостійно розв'язати аналогічну задачу за умови, що на зворотний шлях турист затратив на дві хвилини менше, ніж на шлях від A до B . (Відповідь: 12 км).

3. Якщо число n при діленні на 3 дає остачі 0, 1, 2, то число n^3 при діленні на 9 матиме відповідно остачі 0, 1, 8. Отже, ліва частина рівності при діленні на 9 може мати лише остачі 0, 1, 2, 7, 8. Тому вона не може дорівнювати числу 2001 з остачею 3 від ділення на 9.

4. Проведемо через центр O_1 даного квадрата відрізки $M_1N_1 \parallel MN$ та $P_1Q_1 \parallel PQ$ з кінцями на сторонах квадрата. Тоді

$$P_{AMOQ} + P_{CPON} = P_{AM_1O_1Q_1} + P_{CP_1O_1N_1} = P_{BM_1O_1P_1} + P_{DQ_1O_1N_1} = P_{BMO_1P_1} + P_{DQ_1O_1N_1}.$$

5. Не зможе. Купі із n сірників поставимо у відповідність квадрат зі стороною n . Розбиття купи на m та k сірників інтерпретуємо як поділ цього квадрата на два квадрати зі сторонами m та k відповідно, і два прямокутники зі сторонами m та k . Один із цих прямокутників заштрихуємо. Його площа дорівнює числу mk , яке записують після здійснення ходу. При цьому кожен раз будемо заштриховувати саме той прямокутник, який лежить нижче діагоналі початкового квадрата. Після завершення гри заштрихованою виявиться площа $\frac{1}{2} \cdot 2001^2 - \frac{1}{2} \cdot 2001 = 1000 \cdot 2001$, і вона не залежить від порядку зроблених ходів. Це ж стосується і суми записаних чисел.

9 клас

1. Зрозуміло, що $a > 0$, $b > 0$. Тому знаки модуля можна опустити і, після зведення лівої частини до спільного знаменника, скоротити на $\sqrt{a} + \sqrt{b}$. У результаті отримаємо нерівність $\frac{a - \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + b}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}} \geq 1$, яка рівносильна нерівності $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$.

2. Якщо $y < 0$, то $[y] \leq -1$. Тоді $[x] = 1 - [y] \geq 2$. Отже, $x \geq 2$, звідки випливає $x|x| + y|y| = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) \geq 2([x] + [y]) = 2$, що суперечить першому рівнянню. Аналогічно доводимо, що не може бути $x < 0$. Але тоді $0 \leq x \leq 1$ та $0 \leq y \leq 1$, причому на основі другого рівняння хоч одне з цих чисел не менше одиниці. Звідси знаходимо $x = 1, y = 0$ та $x = 0, y = 1$.

3. Нехай фіксованими є точки A до B , а точка C рухається по колу. Тоді точка перетину медіан трикутників ABC утворюється за допомогою гомотетії з центром у середині відрізка BC та коефіцієнтом $\frac{1}{3}$. Отже шуканим геометричним місцем точок є образ кола з виколотими точками A до B при вказаній гомотетії, тобто також коло з двома виколотими точками.

4. Якщо рухати один з квадратів паралельно до сторін іншого квадрата, то кут між вказаними діагоналями восьмикутника змінюватися не буде. За допомогою двох таких взаємно перпендикулярних переміщень можна добитися, щоб центри обох квадратів співпали між собою. Оскільки при повороті на 90° навколо спільного центра кожен квадрат переходить сам у себе, то при такому повороті діагональ BD перейде у діагональ B_1D_1 . Отже, ці діагоналі перпендикулярні.

5. До сторін квадрата прилягають 28 його клітинок. Легко переконатися, що вказані фігурки зможуть покрити не більше восьми з них. Отже, принаймні 20 прилягаючих до границі клітинок вирізаними не будуть. Решти 44-ьох клітинок дошки вистачить не більше, як на 8 фігурок. Розставити їх нескладно.

10 клас

1. Оскільки

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}, \quad (k + 1)^2 - (k + 1) = k^2 + k,$$

то після очевидних спрощень рівняння запишеться у вигляді

$$\cos(n^2 + n)x = -1. \text{ Звідси знаходимо } x = \frac{(2m+1)\pi}{n^2 + n}, m \in Z.$$

2. а). Безпосереднім обчисленням переконуємося, що

$$a(k-1)a(k) = a(k^2) \in S.$$

б). Твердження задачі випливає з нерівності

$$a(m^2 - 2) = m^4 - 3m^2 + 3 < m^4 - 3m^2 + 9 = a(m-2)a(m+1) < m^4 - m^2 + 1 = a(m^2 - 1) \text{ при } n = m-2 > 2001, k = m+1 > 2001.$$

3. Задана нерівність рівносильна такій очевидній нерівності:

$$\left(a - \frac{e}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{e}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{e}{2}\right)^2 + \left(d - \frac{e}{2}\right)^2 \geq 0.$$

4. Проведемо діагональ CE . Оскільки чотирикутник $ABCE$ вписаний, то $\angle BAE = \angle QCE$. Оскільки прями AB та PQ паралельні, то $\angle BAE + \angle QPE = 180^\circ$. Отже, також $\angle QCE + \angle QPE = 180^\circ$. Тому навколо чотирикутника $CQPE$ можна описати коло. Звідси випливає, що $\angle PCQ = \angle PEQ$ та $\angle BCD = \angle AED$. Тоді $AD = BD$.

5. Припустимо, що таке перефарбування можливе. Для конкретності будемо вважати, що спочатку чорною була вершина A_1 правильного 2001-кутника $A_1A_2\dots A_{2001}$. Позначимо через a_k кількість разів, при яких відповідна вершина A_k вибиралася центральною у вказаних перефарбуваннях. Нехай

$$S = (a_1 + a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6) + \dots + (a_{1999} + a_{2000} + a_{2001}).$$

Оскільки колір вершини змінювався тоді і тільки тоді, коли центральною обиралася дана вершина або сусідня з нею, то суми, записані у круглих дужках, чисельно дорівнюють загальній кількості змін кольору у вершинах $A_2, A_5, \dots, A_{2000}$ відповідно, отже, будуть парними числами. Справді, колір у всіх цих вершинах має залишитися білим, як і на початку, а кожне перефарбування змінює колір на протилежний. Тому і сума S має бути парною. З іншого боку, ця сума записується у вигляді

$$S = (a_{2001} + a_1 + a_2) + (a_3 + a_4 + a_5) + \dots + (a_{1998} + a_{1999} + a_{2000}).$$

Оскільки колір у вершині A_1 має змінитися з чорного на білий, то отримаємо, що тут у перших дужках сума буде непарною, а в усіх інших дужках – парною, бо колір у вершинах A_4, \dots, A_{1999} має залишитися білим. Отже, S повинна бути непарною. Отримана суперечність доводить, що вказане перефарбування неможливе.

11 клас

1. Див. розв'язання задачі 1, 10 клас.

2. Із заданої рівності випливає, що $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n a_{n-1}}$ для всіх $n \geq 2$.

Звідси отримуємо, що $\frac{a_{n+1}}{a_n a_{n-1}} = \frac{a_3}{a_2 a_1} = 2$, $a_{n+1} = 2a_n a_{n-1}$ для всіх $n \geq 2$.

Тому всі члени цієї послідовності є натуральними числами. Крім того, числа $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2a_{n-1}$ є парними. Отже, $a_{2001} = \frac{a_{2001}}{a_{2000}} \cdot \frac{a_{2000}}{a_{1999}} \cdot \dots \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1$ ділиться на 2^{2001} .

3. Покладемо у даному функціональному рівнянні послідовно $y = -f(x)$ та $y = x^2$. Тоді для всіх $x \in R$ виконуватимуться рівності: $f(x^2 + f(x)) = 4(f(x))^2$ та $f(x^2 + f(x)) = 4x^2 f(x)$. Прирівнявши для $x=0$ праві частини цих рівностей, одержимо $f(0) = 0$. Оскільки $f(x)$ не може дорівнювати нулю для інших x , то із рівності правих частин впливатиме, що $f(x) = x^2$ для $x \neq 0$. Перевірка показує, що функція $f(x) = x^2$, $x \in R$, задовольняє дане рівняння.

4. Нехай B – проекція точки A на пряму l . Проведемо пряму m на відстані AB від прямої l . Якщо $N \in m$, і площина ABN перпендикулярна до прямої l , то спільний перпендикуляр до прямих l та AN є одночасно висотою і медіаною рівнобедреного трикутника ABN . Якщо ж $M \in m$ і не співпадає з точкою N , то проведемо площину, перпендикулярну до l , через точку L – середину відрізка MN . Нехай O та P є відповідно точками перетину цієї площини з прямими l та AM . Тоді $OP \perp l$. Крім того, оскільки $AN \perp PL$, то P –

середина відрізка AM . Але $OA = ON = OM$, то OP є не лише медіаною, а й висотою рівнобедреного трикутника AOM . Таким чином, пряма m є шуканою.

5. Див. розв'язання задачі 5, 10 клас.

2002 рік

7 клас

1. а). Оскільки $m < n$, то $1 - \frac{m}{n} = \frac{n-m}{n} < \frac{n-m}{m} = \frac{n}{m} - 1$. Отже,

правильний дріб $\frac{m}{n}$ ближчий до 1, ніж неправильний дріб $\frac{n}{m}$.

б). $2002 = \left(\frac{n}{m} - 1\right) : \left(1 - \frac{m}{n}\right) = \frac{n}{m}$. Тому шуканою є, наприклад,

пара дробів $\frac{1}{2002}$ та $\frac{2002}{1}$.

2. Принаймні три відзначені точки, наприклад, A, B, C , лежать на одній прямій. Якщо би відзначена точка D цій прямій не належала, то на прямих AD, BD, CD існувало би ще по одній з відзначених точок, відмінних від A, B, C, D . Але у такому разі всіх відзначених точок повинно бути не менше 7.

3. Можуть. Наприклад, якщо нанести поділки на відстанях 1 см, 2 см, 6 см та 10 см від одного з кінців лінійки.

4. Додавимо до заданих чисел ще одне число 0. Далі, зауважимо, що у кожній двадцятці чисел $20n, 20n+1, \dots, 20n+19$ пари $(20n, 20n+19)$, $(20n+2, 20n+17)$, $(20n+4, 20n+15)$, $(20n+6, 20n+13)$, $(20n+8, 20n+11)$ попадають до однієї групи, а пари $(20n+1, 20n+18)$, $(20n+3, 20n+16)$, $(20n+5, 20n+14)$, $(20n+7, 20n+12)$, $(20n+9, 20n+10)$ – до іншої. Оскільки у кожній зі цих пар суми чисел однакові, то для кожної двадцятки суми чисел, які попали у різні групи, також будуть однаковими. Отже, достатньо розглянути лише числа 2000, 2001 та 2002. Зрозуміло, що у такому разі сума всіх чисел другої групи виявиться на

$2000 + 2002 - 2001 = 2001$ більшою, ніж сума всіх чисел першої групи. Додавлене нами число 0 на цю різницю не впливає.

8 клас

1. Нехай було n годинників вартістю x . Тоді $nx - 13n = 54$, $18n - nx = 81$. Додавши ці рівняння, одержимо $5n = 135$, $n = 27$. Тоді $x = 15$.

2. Справді, такими є, наприклад, всі числа $k = m^3 n^2$, де $m \in N$, $m \geq 2$. Для них $nk + 1 = (mn)^3 + 1 = (mn + 1)(m^2 n^2 - mn + 1)$ – складене число. Зауважимо, що $m = 1$ не підійде для $n = 1$.

3. Нехай AM – медіана, BH – висота, CK – бісектриса, S, Q, P є відповідно точками перетину відрізків AM та BH , CK та BH , CK та AM . Якщо $\angle SQP = 60^\circ$, то $\angle QCH = 30^\circ$, $\angle ACB = 60^\circ$. Якщо $\angle QSP = 60^\circ$, то $\angle ASH = 60^\circ$, $\angle SAH = 30^\circ$, $\angle MAC = 30^\circ$, $\angle AMC = 90^\circ$. Отже, AM є також висотою. Тому $AB = BC$ і, оскільки $\angle ACB = 60^\circ$, то трикутник ABC рівносторонній, і точки S, Q, P співпадають. Отримали суперечність. Отже, PQS не може бути рівностороннім.

4. Справді,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2001} - \frac{1}{2002} =$$
$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2001} + \frac{1}{2002} - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2002} \right) =$$
$$= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2001} + \frac{1}{2002} - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{1001} \right) = \frac{1}{1002} + \frac{1}{1003} + \dots + \frac{1}{2002}.$$

5. Найлегший камінь важить $468 - 49 \cdot 2 = 370$ (кг). Але $370 + 372 + 374 + 376 + 378 + 380 + 382 + 384 = 3016 > 3000$, то на одну автомашину можна завантажити не більше 7 каменів. У такому разі необхідно буде не менше 8 вантажівок. Їх вистачить, якщо на перші 6 із них вантажити по 6 каменів у порядку спадання їхньої ваги, а на дві останні – по 7 каменів. Справді, $6 \cdot 468 < 3000$, $7 \cdot 396 < 3000$. Тут враховано, що перші 36 каменів не важчі за 468 кг, а 14 останніх – не важчі за 396 кг.

9 клас

1. Нехай у цих садках було відповідно x_1, x_2, x_3, x_4 та x_5 дерев. Тоді $x_1 + x_2 = 9$, $x_2 + x_3 = 13$, $x_3 + x_4 = 19$, $x_4 + x_5 = 11$, $x_5 + x_1 = 16$. Додавши ці рівності, знайдемо $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 34$. Але, віднімаючи тепер третє та п'яте рівняння, будемо мати, що $x_2 = -1$. Отже, Петрусь помилився у своїх підрахунках.

2. Могли. Наприклад, якщо x – корінь рівняння $x^2 - 2001 = x$. Тоді на кожному кроці отримуватимемо початкове число.

3. Оскільки $0 < a < b + c$, $0 < b < c + a$, $0 < c < a + b$, то $a^2 < a(b + c)$, $b^2 < b(c + a)$, $c^2 < c(a + b)$. Залишилось тільки додати три останні нерівності.

4. Добудуємо трикутник ABC до паралелограма $ABCH$. Тоді $\angle MBP = 180^\circ - \angle ABC = \angle BCH$, $MB = AB = HC$, $PB = BC$. Отже, $\triangle MBP = \triangle HCB$. А оскільки точка O лежить на перетині діагоналей паралелограма $ABCH$, то $\angle BMP = \angle CBH = \angle CBO$.

5. Зможуть. Нехай доріжки утворюють трикутник ABC з середніми лініями MP, MK, PK , причому точка M лежить на AB , P – на BC , K – на AC . Розмістимо спочатку сторожів у точках M та P . Якщо мавпа на трикутнику MBP , то ловля очевидна. В іншому разі, сторож із P рухається по PC , поки не опиниться із мавпою на одній прямій, паралельній до AC , а далі зберігає умову такої паралельності. Зрозуміло, що при цьому він не дасть мавпі втекти через точку P . Тепер сторож із M рухається по MK , поки не опиниться з мавпою на одній прямій, паралельній до AC , чи, якщо мавпа знаходиться на відрізку AK , – паралельній до AB . Зрозуміло, що він заблокує мавпі втечу через точки M та K . Якщо тепер мавпа знаходиться на трикутнику AMK , то сторожі мають змогу зібратись у точках M та K , а якщо мавпа на трикутнику PKC – то у точках K та P . В обох випадках мавпу легко впіймати.

10 клас

1. Розмалюємо таблицю у шаховому порядку. Тоді всі непарні числа опиняться у клітинках одного кольору, а всі парні – у клітинках

іншого кольору. Відповідно у кожному стовпчику виявиться не більше трьох непарних чисел. Оскільки 2 – єдине парне просте число, то більше чотирьох простих чисел в одному стовпчику опинитись не може. Такою є, наприклад, таблиця, в якій у третьому стовпчику зверху вниз записані числа 19, 2, 5, 8, 11. Решту чисел такої таблиці відновлюються однозначно.

$$\begin{aligned}
 2. \quad & \cos 20^\circ \cos 30^\circ \sin 50^\circ - \cos 10^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = \\
 & = \frac{1}{2}(\cos 50^\circ + \cos 10^\circ) \sin 50^\circ - \frac{1}{2} \cos 10^\circ (\cos 40^\circ - \cos 120^\circ) = \\
 & = \frac{1}{2}(\cos 50^\circ \sin 50^\circ + \cos 10^\circ \cos 120^\circ) = \frac{1}{4}(\sin 100^\circ - \cos 10^\circ) = 0.
 \end{aligned}$$

3. Нехай у трапеції $ABCH$ більша основа $AH = a$, менша основа $BC = b$, відрізок $MK = x$ ділить площу трапеції пополам. Продовжимо сторони AB та CH до їх перетину у точці P . Трикутники APH , MPK та BPC – гомотетичні. Тому $S_{\square APH} = ka^2$, $S_{\square MPK} = kx^2$, $S_{\square BPC} = kb^2$ при деякому k . Оскільки площі трапецій $AMKH$ та $MVCK$ рівні між собою, то $ka^2 - kx^2 = kx^2 - kb^2$. Звідси отримуємо $x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.

4. $f(f(1)) + f^2(1) = 7$. Отже, $1 \leq f(1) \leq 2$. Якщо $f(1) = 1$, то $f(1) + 1^2 = 7$, $f(1) = 6$. Суперечність. Отже, $f(1) = 2$. Тоді $f(2) + 2^2 = 7$, $f(2) = 3$. Припустимо, що $f(n) = n + 1$. Для $n = 1$ та $n = 2$ це правильно. Якщо припустити, що це правильно для $n = k$, то отримаємо $f(k+1) + (k+1)^2 = k^2 + 2k + 3$, $f(k+1) = k + 2$. Отже, $f(n) = n + 1$ для всіх $n \in N$.

5. Досить довести, що у кожній групі сума квадратів перемог усіх команд групи дорівнює сумі квадратів їхніх поразок. Справді, якщо у групі була $n+1$ команда, то одержимо, що $V_1^2 + \dots + V_{n+1}^2$ – сума квадратів їхніх перемог, а $(n - V_1)^2 + \dots + (n - V_{n+1})^2$ – сума квадратів їхніх поразок. Різниця між такими сумами дорівнює

$2n(V_1 + \dots + V_{n+1}) - (n+1)n^2 = 2n \frac{(n+1)n}{2} - (n+1)n^2 = 0$, оскільки сума всіх перемог дорівнює сумі всіх зіграних у групі ігор. Таким чином, виділена статистична характеристика не залежить від кількості команд, які беруть участь у змаганнях.

11 клас

1. Попередньо спрощуємо вираз:

$$\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = \sqrt{(\sqrt{x-1} - 1)^2} = |\sqrt{x-1} - 1| = \begin{cases} 1 - \sqrt{x-1}, & 1 \leq x \leq 2, \\ \sqrt{x-1} - 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

Тепер побудова графіка очевидна.

2. Задана система рівнянь рівносильна наступній:

$$(x+1)(y+1) = 2, \quad (y+1)(z+1) = 1001, \quad (z+1)(x+1) = 2002.$$

Перемножуючи ці рівняння, одержимо $(x+1)(y+1)(z+1) = \pm 2002$.

Отже, $x+1=2, y+1=1, z+1=1001$ або $x+1=-2, y+1=-1, z+1=-1001$. Звідси знаходимо два розв'язки: $x=1, y=0, z=1000$ та $x=-3, y=-2, z=-1002$.

3. Зауважимо, що вписані кути, які спираються на дуги AB, BC, CE, EA є гострими. Тому центр кола знаходиться всередині чотирикутника $ABCE$. Оскільки $\angle BAC + \angle ABE = 90^\circ$, то

$$\begin{aligned} S_{\square BOC} &= \frac{1}{2} R^2 \sin \angle BOC = \frac{1}{2} R^2 \sin 2\angle BAC = \\ &= \frac{1}{2} R^2 \sin 2\angle ABE = \frac{1}{2} R^2 \sin \angle AOE = S_{\square AOE}. \end{aligned}$$

Так само доводимо рівність площ трикутників AOB та COE .

4. Нехай AB – найбільше ребро цієї піраміди. Тоді

$$(AC + AE - AB) + (BC + BE - AB) = (AC + BC - AB) + (AE + BE - AB) > 0.$$

Отже, правильною є хоч одна з нерівностей: $AC + AE > AB$ чи $BC + BE > BA$. Тому хоч одна з вершин A або B задовольняє сформульоване твердження.

5. Число, вписане тричі, є спільним дільником або лише пари (a, c) , або лише пари (b, d) . У першому випадку воно є також

дільником числа $a + c = 3 \cdot 2^{2001}$. Оскільки a та c непарні, то таким дільником може бути лише число 3, бо число 1 виписувалось 4 рази. Аналізуючи остачі степенів двійки від ділення на 3, легко перевірити, що a, c, d на 3 діляться, а b – ні. У другому випадку це число має бути також дільником числа $d - b = 4025 = 25 \cdot 7 \cdot 23$. Але b та d не діляться ні на 25, ні на 7, ні на 23. Проте a, b, d діляться на 5, а c на 5 не ділиться. Отже, 3 та 5 – два числа, які були виписані учнем на дошці рівно 3 рази.

2003 рік

7 клас

1. Не могло, бо у кожній парі кількість горіхів ділиться на 3, а число 2003 на 3 не ділиться.

2. Оскільки спочатку інших дерев був 1%, а після рубки сосен їх мало стати 2%, то загальна кількість дерев зменшиться вдвічі. Отже, ліспромгосп має намір вирубати половину лісу.

3. Зрозуміло, що загальна довжина як підйомів, так і спусків на маршруті туди і назад дорівнює відстані між селами, яку позначимо через x (км). Тоді $\frac{x}{15} + \frac{x}{30} = 4$, $x = 40$ км.

4. Помиляється. Розглянемо трикутник ABC , в якому $\angle A = 30^\circ$, $\angle C = 90^\circ$. Нехай M – середина AB , $MK \perp AB$, $K \in AC$. Тоді трикутники AMK , BMK , BCK рівні між собою. Доведення очевидні.

8 клас

1. Запишемо рівняння у вигляді $(x - y)(x + y) = p^{2003}$ і покладемо $x - y = p^k$, $x + y = p^{2003-k}$, де $k = 1, 2, \dots, 1001$. Тоді $x = \frac{p^{2003-k} + p^k}{2}$, $y = \frac{p^{2003-k} - p^k}{2}$ – шукані розв'язки у натуральних числах. Для $p \neq 2$ існує ще один такий розв'язок при $k = 0$.

2. З умови задачі випливає, що 9 великих і 3 малі риби сьогодні коштують стільки ж, як 15 великих вчора, а 10 великих і 5 малих сьогодні – стільки ж, як 15 великих і 5 малих вчора. Отже, 1 велика і 2 малих сьогодні коштують стільки ж, як 5 малих вчора.

3. Спочатку Петрусь повинен поставити знак „ $-$ ” перед n^3 , а потім у кожній парі (n^2, n^4) , (n^5, n^7) , (n^6, n^8) ставити знак, протилежний до того, який поставив Миколка. Справді, $n^{k+2} - n^k = n^{k-1} \cdot (n-1)n(n+1)$:6 для всіх натуральних n .

4. $AM = \frac{2}{3}AD = 4$, $AE = EC = 4$. Отже, $AN = AE = EC$. Тому $\angle AME = \angle AEM$, $\angle AMB = \angle CEF$. Також маємо $BF = MF = ME$, а значить, $BM = FE$. Отже, $\triangle AMB = \triangle CEF$, $CF = AB = 5$.

9 клас

1. Оскільки рівняння не мають дійсних коренів, а коефіцієнти при x^2 додатні, то для всіх дійсних x їх ліві частини набувають лише додатних значень. Зрозуміло, що аналогічну властивість матиме і ліва частина рівняння, одержаного в результаті додавання. Отже, воно також не матиме дійсних коренів.

2. Нехай a – об’єм трави на лузі до випасання, x – об’єм трави, яку спасає за 1 день одна корова, y – об’єм трави, яка виростає на лузі за 1 день. Тоді $30x \cdot 4 = a + 4y$, $25x \cdot 6 = a + 6y$. Віднімаючи ці рівності, знаходимо $y = 15x$. Отже, безперервно на лузі може пастися не більше, як 15 корів.

3. Зауважимо, що відношення найбільшого з чисел, які можна утворити таким чином, до найменшого менше за 4. Крім того, сума цифр кожного з таких чисел при діленні на 3 дає остачу 2. Тому такі ж остачі даватимуть і самі числа. Оскільки рівності $3n + 2 = 3(3k + 2)$ та $3n + 2 = 2(3k + 2)$ для натуральних n та k виконуватися не можуть, то і утворені таким чином два різні числа не можуть ділитися одне на одне.

4. $\angle ABC = 60^\circ$, то $\angle BAC + \angle ACB = 120^\circ$, $\angle OAC + \angle OCA = 60^\circ$, $\angle AOC = 120^\circ$. Отже, отримуємо $\angle DBE + \angle DOE = 180^\circ$, і навколо чотирикутника $BEOD$ можна описати коло. Але $\angle OBE = \angle OBD$, то і хорди OE та OD цього кола рівні.

10 клас

1. Сума всіх записаних на сторонах десятикутника чисел дорівнює подвоєній сумі чисел, записаних у його вершинах, тобто дорівнює 110. Але, якщо би всі такі суми закінчувалися різними цифрами від 0 до 9 включно, то остання цифра вказаної суми була би 5, а не 0.

$$\begin{aligned} 2. \text{ Справді, } & 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 1001 + 1002 \cdot 1003 \cdot \dots \cdot 2002 = \\ & = 1001! + (2003 - 1001)(2003 - 1000) \cdot \dots \cdot (2003 - 1) = \\ & = 1001! + 2003 \cdot n - 1001! = 2003 \cdot n, \end{aligned}$$

де n – деяке ціле число.

3. Нехай $y + z - x = t$. Тоді $z + x - y = 3t$, $x + y - z = 5t$, $xyz = 6t$. Додавши перші три рівності, знайдемо $x + y + z = 9t$. Віднімаючи тепер по черзі перші три рівняння, одержимо $x = 4t$, $y = 3t$, $z = 2t$.

Отже, $4t \cdot 3t \cdot 2t = 6t$. Тому $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{1}{2}$, $t_3 = -\frac{1}{2}$. Звідси відповідно

маємо розв'язки: $(0, 0, 0)$, $\left(2, \frac{3}{2}, 1\right)$, $\left(-2, -\frac{3}{2}, -1\right)$.

4. $\angle SKM = \angle CPM = 90^\circ$. Тому навколо чотирикутника $SKMP$ можна описати коло з діаметром SM . Тоді для будь-якого розташування точки M на AB маємо $\angle KCP + \angle KMP = 180^\circ$. Отже, $\angle KMP = \text{const}$. Зрозуміло, що довжина хорди KP вказаного кола буде найменшою, якщо найменшим буде діаметр такого кола, тобто, якщо точка M є основою висоти SM трикутника ABC . Оскільки трикутник гострокутний, то $M \in AB$.

11 клас

1. Розмалюємо трикутники, з яких складається многокутник, у два кольори так, щоб будь-які два трикутники зі спільною стороною були різного кольору. Оскільки з кожної вершини виходить парне число діагоналей, то всі трикутники, які прилягають до сторін многокутника, будуть одного кольору. Отже, різниця між кількістю всіх сторін трикутників цього кольору і кількістю всіх сторін трикутників іншого кольору буде дорівнювати n . Оскільки така різниця ділиться на 3, то і n ділиться на 3.

$$2. \quad \angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B) \Rightarrow \operatorname{tg} \angle C = -\frac{\operatorname{tg} \angle A + \operatorname{tg} \angle B}{1 - \operatorname{tg} \angle A \cdot \operatorname{tg} \angle B} \Rightarrow \\ \Rightarrow \operatorname{tg} \angle A + \operatorname{tg} \angle B + \operatorname{tg} \angle C = \operatorname{tg} \angle A \cdot \operatorname{tg} \angle B \cdot \operatorname{tg} \angle C.$$

Нехай для конкретності $\operatorname{tg} \angle A \leq \operatorname{tg} \angle B \leq \operatorname{tg} \angle C$. Тоді

$$\operatorname{tg} \angle A \cdot \operatorname{tg} \angle B \cdot \operatorname{tg} \angle C \leq 3 \operatorname{tg} \angle C, \quad 1 < \operatorname{tg} \angle A \cdot \operatorname{tg} \angle B \leq 3.$$

Оскільки тангенси кутів є натуральними числами, то звідси простим перебором знаходимо $\operatorname{tg} \angle A = 1, \operatorname{tg} \angle B = 2, \operatorname{tg} \angle C = 3$.

3. Зрозуміло, що найменше значення досягається для $x \geq 0$. Побудуємо прямокутний трикутник ABC , в якому $AC = BC = 1$, і з вершини C проведемо відрізок $AH = x$ під кутами 60° та 30° до катетів. Тоді за теоремою косинусів отримаємо, що

$$\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 - x\sqrt{3} + 1} = AH + BH \geq AB = \sqrt{2},$$

причому рівність досягається тоді і тільки тоді, коли $H \in AB$. Отже, $\sqrt{2}$ – найменше значення цього виразу.

4. Не обов'язково. Припустимо, що острови $A_1, A_2, \dots, A_{2003}$ послідовно сполучені між собою мостами і, крім того, ще один міст з'єднує острови A_1 та A_3 . Якщо острів A_2 не заселений, на острові A_1 проживає одна особа, і з нею дружать всі інші жителі міста, закритим виявився міст між островами A_1 та A_3 , то слова кожного із жителів міста можуть бути правдою. Якщо ж вважати всі острови заселеними, то можна довести, що хтось помилився у підрахунках.

5. Справді,

$$\frac{MA_1}{AA_1} + \frac{MB_1}{BB_1} + \frac{MC_1}{CC_1} = \frac{h_a}{H_a} + \frac{h_b}{H_b} + \frac{h_c}{H_c} = \frac{S(BCM)}{S(ABC)} + \frac{S(CAM)}{S(ABC)} + \frac{S(ABM)}{S(ABC)} = 1,$$

де $h_a, h_b, h_c, H_a, H_b, H_c$ – висоти, а $S(***)$ – площі відповідних трикутників.

2004 рік

7 клас

1. Послідовно отримуємо $|4|x| - 3| = 5$, ($|4|x| - 3| = -1$ не задовольняє), $4|x| = 8$, ($4|x| = -2$ не задовольняє), $x = \pm 2$.

2. Автомобіль наздогнав велосипедиста рівно посередині шляху, тому у селище B він прибув на 15 хвилин раніше, ніж велосипедист. Отже, останньому на третину шляху потрібно 15 хвилин, а на весь шлях від A до B – 45 хвилин.

3. З умови задачі випливає, що $\angle CBE = \angle CEB$, $\angle DEA = \angle DAE$. Отже, $\angle OEB + \angle OBE = \angle CBA + \angle CAB = 90^\circ$. Тому $\angle BOE = 90^\circ$, значить, і $\angle DOE = 90^\circ$.

4. Учитель міг міркувати, наприклад, так: якщо би кожне викреслене слово записали рівно два учні, то, оскільки обидва вони викреслюють дане слово, загальна кількість викреслених слів у трьох списках мала бути парною, а отже, зі 150 записаних слів мала залишитися парна їх кількість. Але, згідно з умовою, їх залишилося $23 + 32 + 26 = 81$.

5. Наприклад, $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \dots \cdot \frac{9}{10} - \frac{10}{11} \cdot \frac{11}{12} \cdot \dots \cdot \frac{99}{100} = \frac{1}{10} - \frac{1}{10} = 0$.

6. При перестановці цифр місцями їх сума не змінюється. Тому при діленні на 3 всі записані числа дають однакові остачі. Якщо серед вибраних цифр немає нуля, то сума шести чисел, які можна утворити перестановками даних цифр, повинна ділитися на 3, і не може дорівнювати 3376. Якщо ж одна з вибраних цифр є нулем, то приходимо до рівності $\overline{ab0} + \overline{a0b} + \overline{ba0} + \overline{b0a} = 211(a + b) = 3376$. Тоді $a + b = 16$, і, оскільки вибрані цифри різні, то дві інші цифри – 7 та 9.

7. Занумеруємо фішки зліва направо цифрами 1, 2, 3, 4, 5. Для забезпечення перемоги першому гравцеві достатньо спочатку пересунути фішку №5 у крайнє праве положення, а потім весь час пересувати фішку з непарним номером впритул до тієї фішки з парним номером, яку перед цим пересунув його суперник. При цьому раніше вичерпаються ходи у другого гравця.

8 клас

1. Після розкриття модуля отримаємо $y = \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}$, $x > 0$.

2. Нехай A та B – гострі кути трикутника ABC , $BC = a$, $AC = b$.

Тоді $\operatorname{tg}A = \operatorname{ctg}B = \frac{a}{b}$, $\frac{a}{b} + \frac{a}{b} = 1$, $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$. Отже, $\angle A < \angle B$, $\operatorname{tg} \angle B = \frac{b}{a} = 2$.

3. $n^4 - 22n^2 - 46 = (n^2 - 25)(n^2 + 3) + 29$. Це число ділиться на $n + 5$, якщо $n + 5$ є дільником числа 29. Отже, $n = 24$.

4. За формулами для суми та різниці кубів отримаємо

$$A + B = \frac{(185 - 158)(158^2 + 158 \cdot 185 + 185^2)}{343 \cdot 27} + \frac{(185 + 158)(158^2 - 158 \cdot 185 + 185^2)}{343 \cdot 27} = \frac{2 \cdot 185^3}{21^3}.$$

Тоді $\left(\frac{37}{21}x\right)^3 = \left(\frac{185}{21}\right)^3$, звідки знаходимо $x = 5$.

5. Друге твердження не може бути правильним, бо у такому разі число B мало би закінчуватися на 1, $B + 41$ – на 2, $B - 48$ – на 3, отже, жодне з двох інших тверджень не було би правильним. Тому $B + 41 = x^2$ та $B - 48 = y^2$ – квадрати натуральних чисел. Тоді $x^2 - y^2 = 89$, $(x - y)(x + y) = 89$, $x - y = 1$, $x + y = 89$, $x = 45$, $y = 44$. Отже, $B = 44^2 + 48 = 1984$.

6. Достатньо продовжити одну зі сторін заданого кута і скористатися рівностями $35^\circ : 7 = 5^\circ = 180^\circ - 5 \cdot 35^\circ$. Можна також від однієї сторони кута відкласти кут 30° . Побудови очевидні.

7. Нехай P – середина AM . $\angle ABM = 90^\circ$, $AM = 2BK$, тому $BK = AP = PM = PB$. Тоді $\angle ABP = \angle BAP = 24^\circ$, $\angle BKP = \angle BPK = 48^\circ$. Далі знаходимо $\angle PBK = 84^\circ$, $\angle ABK = 108^\circ$, $\angle BAC = \angle BCA = 36^\circ$.

9 клас

1. Враховуючи область визначення для функції $y = \sqrt{2 - x}$, отримаємо, що $x \leq 2$. Оскільки $x^5 + x^3 + x - 42 < 2^5 + 2^3 + 2 - 42 = 0$ для $x < 2$, то залишається безпосередньою перевіркою переконатися, що $x = 2$ – єдиний корінь даного рівняння.

2. Зафіксуємо довільну з цих точок і проведемо серединні перпендикуляри до відрізків, які з'єднують дану точку з трьома іншими. Область, обмежена цими перпендикулярами, яка містить фіксовану точку, і є шуканою для даної точки. Аналогічно поступаємо для інших трьох точок.

3. Розглянемо функцію $y = (x - a)(x - b)$. З умов задачі випливає, що $x_0 > \max\{a, b\}$ та $y(3) > c$. Отже, залишається проаналізувати наступні варіанти:

а) $a = b = 1$. Тоді $y(3) = 4, c < 4$. Звідси знаходимо $c = 1 \Rightarrow x_0 = 2$, $c = 2 \Rightarrow x_0 = 1 + \sqrt{2}$, $c = 3 \Rightarrow x_0 = 1 + \sqrt{3}$;

б) $a = 1, b = 2$ чи $a = 2, b = 1$. Тоді $y(3) = 2, c = 1, x_0 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$;

в) $a = b = 2$. Тоді $y(3) = 1$, і рівняння потрібного кореня не має.

4. Зрозуміло, що числа $6n$ та $9n$ мають бути трицифровими, а число $13n$ – чотирицифровим. Отже, $77 \leq n \leq 111$. Оскільки ж $6n + 9n + 13n = 28n$, а сума всіх десяти цифр ділиться на 9, то і число n має ділитися на 9. Безпосередньою перевіркою переконуємося, що із чисел 81, 90, 99, 108 підходить тільки $n = 81$. Для нього $6n = 486, 9n = 729, 13n = 1053$.

5. Не завжди. Зауважимо, що всього можна зафарбувати 144 одиничних відрізки – сторони клітинок. Тоді зафарбуємо по 9 горизонтальних сторін клітинок першого, третього, п'ятого та сьомого стовпців шахівниці у синій колір. При цьому отримаємо 72 вершини клітинок, з яких виходить непарна кількість синіх відрізків. Зрозуміло, що при всіх перефарбовуваннях вона залишатиметься непарною, а отже, кількість вершин, з яких виходять сині відрізки, зменшитися не може. Оскільки кожен такий відрізок сполучає лише дві вершини, то кількість синіх відрізків не менша за $72 : 2 = 36 = 144 : 4$.

6. З умови задачі випливає, що $0 = (ax + by + cz)(x + y + z)$. Тому досить довести нерівність

$$\sqrt{ab}xy + \sqrt{bc}yz + \sqrt{ca}zx \leq ax^2 + by^2 + cz^2.$$

А вона рівносильна очевидній нерівності

$$(\sqrt{ax} - \sqrt{by})^2 + (\sqrt{by} - \sqrt{cz})^2 + (\sqrt{cz} - \sqrt{ax})^2 \geq 0.$$

7. З властивостей вписаного кола випливає такий процес відновлення трикутника ABC :

а) будуємо промінь HM , на якому лежить висота AN трикутника ABC ;

б) через точку H проводимо пряму $a = BC$, перпендикулярну до HM , на якій лежить сторона BC ;

в) будуємо коло, яке проходить через точки M , Q та дотикається до прямої a . Це можна зробити, скориставшись, наприклад, інверсією відносно кола з центром M і радіусом MQ , або враховуючи рівність добутку відрізків січної квадратові дотичної. В останньому випадку доцільно врахувати також, що висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, ділить останню на відрізки, добуток яких дорівнює квадратові висоти. Крім того, прямий кут, вписаний в коло, спирається на діаметр. Зауважимо, що таких кіл є два;

г) через центри O цих кіл проводимо прямі OQ . Те коло, для якого така пряма перетинає промінь HM , і буде колом, вписаним у трикутник ABC , а сама точка перетину – вершиною A цього трикутника;

д) з точки A проводимо дотичні до вписаного кола і на перетині їх з прямою a знаходимо вершини B та C .

10 клас

1. Якщо припустити, що $\alpha > \beta$, то, враховуючи задані рівності та монотонність функцій косинус і тангенс для гострих кутів, послідовно отримуємо $\cos \alpha < \cos \beta$, $\operatorname{tg} \beta < \operatorname{tg} \gamma$, $\beta < \gamma$, $\cos \beta > \cos \gamma$, $\operatorname{tg} \gamma > \operatorname{tg} \alpha$, $\gamma > \alpha$, $\cos \gamma < \cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \beta$, $\alpha < \beta$, що суперечить зробленому припущенню. Аналогічно доводимо, що не може бути $\alpha < \beta$. Звідси, з врахуванням заданих рівностей, випливає, що $\alpha = \beta = \gamma$. Тоді $\cos \alpha = \operatorname{tg} \alpha$, $1 - \sin^2 \alpha = \sin \alpha$, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Зрозуміло,

що також $\sin \beta = \sin \gamma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

2. Нехай $A = a^2 + a$, $B = a^3 + 2a$ – раціональні числа. Тоді $B = a(A + 3) - A$. Оскільки рівняння $a^2 + a + 3 = 0$ не має дійсних коренів, то $A \neq -3$. Отже, $a = \frac{A+B}{A+3}$ – раціональне число.

3. Оскільки для непарних a, b, c значення всіх трьох виразів є парними числами, то вони, будучи квадратами парних чисел, мали би ділитися на 4. У такому разі кожне з чисел ab^3, bc^3, ca^3 при діленні на 4 повинно давати остачу 3. Але тоді їхній добуток, який дорівнює $(a^2b^2c^2)^2$ і є точним квадратом, також мав би давати остачу 3, що неможливо. Отже, всі три вказані числа одночасно точними квадратами бути не можуть.

4. З умови випливає, що $x[x] = 2004$. Нехай $[x] = n$. Якщо $n \geq 0$, то $n^2 < 2004 < (n+1)^2$, $n = 44$. Звідси $x = \frac{2004}{44} > 45$, що не задовольняє умову $x - [x] < 1$. Якщо ж $n < 0$, то $(n+1)^2 < 2004 < n^2$, $n = -45$, $x = -\frac{2004}{45} = -44\frac{8}{15}$.

5. Нехай висоти AA_1 та BB_1 трикутника ABC перетинаються у точці H , точки K, P, Q – середини відрізків MN, AM, AN відповідно. Тоді $NP \parallel MC$, $BK = KM$, звідки випливає, що $\triangle HKN = \triangle A_1KM$, а тому чотирикутник HMA_1N – паралелограм. Отже, $A_1H = AH = \frac{1}{2}AA_1$,

$\frac{A_1C}{MC} = \frac{NC}{QC} = \frac{2}{3}$, а значить, $A_1C = \frac{1}{2}BB_1$. Тоді, враховуючи, що у

прямокутних трикутників AA_1C та BB_1C кут C спільний, отримаємо

$\frac{A_1H}{BA_1} = \frac{A_1C}{AA_1}$, звідки випливає, що $\frac{1}{2}AA_1^2 = \frac{1}{2}BA_1^2$, тобто $AA_1 = BB_1$. Але

$\angle AA_1B = 90^\circ$, то $\angle ABC = 45^\circ$.

6. Оскільки для $v > 0$ виконується нерівність $\frac{u^2}{v} \geq 2u - v$, яка

впливає з очевидної нерівності $(u - v)^2 \geq 0$, то різниця між лівою і правою частинами заданої в умові нерівності не менша за

$$x(2x - y) + y(2y - z) + z(2z - x) + x(2x - z) + y(2y - x) + z(2z - y) - \frac{x^2 + y^2 + z^2 + (x + y + z)^2}{2} = \frac{3}{2} \left((x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \right) \geq 0,$$

звідки і впливає потрібна нерівність.

7. Доведемо, що всі непарні числа одного кольору, а всі парні – іншого. Припустимо, що є, наприклад, два числа n та $n + 2$ різних кольорів. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що n – синього, а $n + 2$ – жовтого кольору. Позначимо $n = s_1$, $n + 2 = g_1$. Оскільки чисел кожного з кольорів є безліч, то знайдеться пара сусідніх чисел $g_2 > g_1$ та $s_2 = g_2 + 1$ відповідно жовтого та синього кольорів, і аналогічна пара $g_3 > g_2$ та $s_3 = g_3 + 1$. Зауважимо, що $s_1 + s_2 + s_3 = g_1 + g_2 + g_3$. Наступні 2000 пар, кожна з яких знаходиться строго правіше від попередньої, утворимо за таким принципом: $g_4 = s_4 + 1$, $s_5 = g_5 + 1$, $g_6 = s_6 + 1$, $s_7 = g_7 + 1, \dots$, $g_{2002} = s_{2002} + 1$, $s_{2003} = g_{2003} + 1$, де s_i – синього, а g_i – жовтого кольору. Позначимо тепер їх спільну суму $s_1 + s_2 + \dots + s_{2003} = g_1 + g_2 + \dots + g_{2003} = M$. Тоді за умовою задачі число M повинно бути зафарбоване як у синій, так і у жовтий кольори, що одночасно не можливо. Така суперечність доводить, що кольори всіх чисел однієї парності співпадають. Оскільки число 1 – синього кольору, то 2004 – жовтого кольору.

11 клас

1. Задане рівняння рівносильне системі
$$\begin{cases} x^2 + (a - 4)x + 2 = 0, \\ x \geq 2. \end{cases}$$

Якщо тут дискримінант квадратного рівняння $D < 0$, то дійсних коренів немає. Якщо $D = 0$, то $a = 4 \pm 2\sqrt{2}$, $x = \pm\sqrt{2}$ не задовольняють умову задачі. Якщо ж $D > 0$, то, враховуючи особливість графіка

функції $f(x) = x^2 + (a - 4)x + 2$, одержимо, що єдиність кореня $x > 2$ забезпечить умова $f(2) < 0$, з якої знайдемо $a < 1$. Єдиний корінь $x = 2$ отримуємо і при $a = 1$. Отже, $a \in (-\infty, 1]$.

2. Нехай K, L, O – середини відрізків AB, AC, MN відповідно. Тоді $KL \parallel BC$, $KL = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}MN$, $KL \perp MN$. Оскільки $\angle FDC > 90^\circ$, то M лежить на відрізку AL . Крім того, чотирикутник $KNLM$ вписаний у коло з діаметром MN . Отже, $OL = ON = OM = KL$. Оскільки діаметр MN ділить перпендикулярну до нього хорду пополам, то $\sin \angle MOL = \frac{1}{2}$. Отже, $\angle MOL = 30^\circ$. Тоді $\angle OML = \angle OLM = 75^\circ$, $\angle BCA = \angle KLM = 15^\circ$, $\angle AMK = 30^\circ$, $\angle BAC = \angle KAM = 60^\circ$, $\angle ABC = 105^\circ$.

3. Легко бачити, що

$$\begin{aligned} & \cos(x + y) + \cos(y + z) + \cos(z + x) = \\ & = \cos((x + y + z) - z) + \cos((x + y + z) - x) + \cos((x + y + z) - y) = \\ & = \cos(x + y + z)(\cos x + \cos y + \cos z) + \\ & \quad + \sin(x + y + z)(\sin x + \sin y + \sin z) = \\ & = a \cos^2(x + y + z) + a \sin^2(x + y + z) = a. \end{aligned}$$

4. Оскільки $AE \perp A_1D$ за умовою задачі і $AE \perp CD$, бо $CD \perp (AA_1D)$, то $AE \perp (A_1CD)$, отже, $AE \perp A_1C$. Але за умовою задачі також $AF \perp A_1C$, тому $A_1C \perp (AEF)$, значить, $EF \perp A_1C$. Крім того, за умовою задачі $B_1Q \perp A_1C$, і, оскільки EF та B_1Q належать одній площині A_1B_1CD , то $EF \parallel B_1Q$. Аналогічно доводиться паралельність прямих AF та PQ . Звідси випливає, що $\angle EFA = \angle PQB_1$.

5. Див. розв'язання задачі 6, 10 клас.

6. Таких функцій не існує. Справді, з умови задачі випливає, що для всіх додатних x, y виконується нерівність $f(x + y) > f(x)$, тому функція f строго монотонно зростає на проміжку $(0, +\infty)$. З вихідної тотожності, якщо в ній аргументи поміняти місцями, також випливає,

що $f(xf(y)) = f(yf(x))$. Оскільки ж шукана функція є строго монотонною, то $xf(y) = yf(x)$, тобто $f(x) = \frac{f(y)}{y}x$. Отже, $f(x) = kx$, де $k > 0$. Але безпосередня підстановка у вихідне рівняння показує, що жодна з таких функцій його не задовольняє.

7. Див. розв'язання задачі 7, 10 клас.

2005 рік

7 клас

1. Зрозуміло, що кількість риб, спійманих першим рибак, повинна ділитись на 9, а спійманих другим – на 17. При сумі 70 це можливо лише для чисел 36 та 34 відповідно. Тоді отримаємо, що обидва спіймали по 20 карасів та по 14 окунів. Отже, перший рибак спіймав дві щуки, а другий не спіймав жодної.

2. Якщо перший – лицар, то з його слів другий і третій – брехуни, що суперечить висловлюванню другого. Отже, перший – брехун. Якщо другий – брехун, то з слів третій також мав би бути брехуном, що неможливо, бо у такому разі перший, який є брехуном, сказав би правду. Отже, другий – лицар, тому з його слів випливає, що і третій є лицарем. Значить, відповідь третього буде: один.

3. Число і сума його цифр при діленні на 3 дають однакові остачі. Тому, починаючи з остачі 1, на другому кроці отримаємо остачу 2, а з остачі 2 – знову остачу 1, і так далі. Таким чином число 200520052005, яке ділиться на 3, появитись на дошці не зможе.

4. Можна. Наприклад, відрізати по периметру квадрата 4 прямокутники зі сторонами $\frac{7}{8}m$ та $\frac{1}{8}m$, а потім розрізати квадрат, який залишився, на 3 прямокутники зі сторонами $\frac{3}{4}m$ та $\frac{1}{4}m$.

8 клас

1. Припустимо, що з даних відрізків трикутник скласти не можна. Тоді їх довжини у сантиметрах, впорядковані за зростанням, задовольнятимуть нерівності: $a_1 \geq 1, a_2 \geq 1, a_3 \geq 2, a_4 \geq 3, a_5 \geq 5, a_6 \geq 8$,

$a_7 \geq 13, a_8 \geq 21$. А це суперечить умові, що довжина найбільшого відрізка дорівнює 20 см.

2. Нехай $m_i, i = 1, \dots, 16$, – маси цих яблук. За чотири зважування легко знайти

$$(m_1 + m_2 + m_3) + (m_1 + m_2 + m_4) + (m_1 + m_3 + m_4) + (m_2 + m_3 + m_4) –$$

потроєну сумарну масу перших чотирьох яблук. Ще за чотири зважування знаходимо сумарну масу решти дванадцяти яблук:

$$(m_5 + m_6 + m_7) + (m_8 + m_9 + m_{10}) + (m_{11} + m_{12} + m_{13}) + (m_{14} + m_{15} + m_{16}).$$

3. Оскільки $AB = AF$, то бісектриса кута BAF є висотою і медіаною трикутника BAF . Аналогічно міркуємо і щодо бісектрис кутів BCD та DEF . Таким чином, вказані бісектриси лежатимуть на серединних перпендикулярах до сторін трикутника BDF . А вони, як відомо, перетинаються в одній точці – центрі кола, описаного навколо цього трикутника.

4. Спільний дільник даних чисел є дільником числа $b - 2a = 3$. Аналізуючи остачі від ділення степенів двійки на 3 (2 в парному степені дає остачу 1, а в непарному – остачу 2), переконуємося, що кожне із заданих чисел на 3 ділиться. Тому $НСД(a, b) = 3$.

9 клас

1. Оскільки $x^2 + 1 > 0$, то $x > 15$. При цих x обидва множники у лівій частині рівняння є додатними зростаючими функціями. Отже, рівняння може мати не більше одного кореня. Легко перевірити, що таким коренем є $x = 20$.

$$\begin{aligned} 2. \quad a^3 + b^3 + 3abc &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) + 3abc > \\ &> c(a^2 - ab + b^2) + 3abc = c(a + b)^2 > c^3. \end{aligned}$$

3. Так. З усіх таблиць, які можна утворити з початкової таблиці вказаним способом, розглянемо ту, в якій є найбільша можлива кількість плюсів. Якщо би в ній в якомусь рядку чи в якомусь стовпчику мінусів було більше, ніж плюсів, то, змінивши у ньому всі знаки на протилежні, ми отримали би таблицю з більшою загальною кількістю плюсів, що суперечить вибору таблиці.

4. На промені KO відкладемо точку N , відмінну від точки K , так, що $ON = OK$. Тоді $\triangle AON = \triangle BOK$ (за двома сторонами і кутом між ними). А отже, $AN = BK$, $\angle OAN = \angle OBK$. Тому $\angle MAN = 90^\circ$. Крім того, MO – висота і медіана трикутника KMN , звідки $MN = MK$. Отже, $AM^2 + BK^2 = AM^2 + AN^2 = MN^2 = MK^2$.

10 клас

1. Зрозуміло, що після $2n$ відрізань залишається відрізок довжиною $\left(\frac{3}{4}\right)^{2n} \rightarrow 0$. Тому залишитися не відрізаною може лише

одна точка, а саме $2004 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{2n} + \dots = 2004\frac{4}{7}$.

2. Припустимо, що підприємець кожного місяця знижує зарплату на одну гривню одному з робітників, котрий одержує більше, ніж найменш оплачуваний у даний момент часу, і зразу ж всім десятком підвищує зарплату на одну гривню. Очевидно, що за рахунок лише самих знижень вирівняти зарплати вдається. А оскільки кожного разу прибавки для всіх є однаковими, то при цьому зарплати вирівнюються і в ситуації, описаній в задачі.

3. Зрозуміло, що $OM \perp AB$ як серединний перпендикуляр до AB . Продовжимо NK до перетину з прямою AB у точці P . Тоді $\angle PAK + \angle PKA = \angle KDC + \angle CKN = \frac{1}{2}\angle KNC + \frac{1}{2}(\angle CKN + \angle KCN) = 90^\circ$. Отже, $KN \perp AB$. Тому $KN \parallel OM$. Аналогічно доводиться, що $KM \parallel ON$. Отже, $KNOM$ – паралелограм, і в ньому $OM = KN$.

4. Справді,

$$a + \frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} = c + \left(a - b + \frac{1}{a-b}\right) + \left(b - c + \frac{1}{b-c}\right) \geq c + 2 + 2 = c + 4.$$

11 клас

1. Медіана ML прямокутного трикутника AMC дорівнює половинам гіпотенузи AL та LC , а також відрізкам KL та MK , оскільки сторони трикутника KLM рівні. У трикутнику AKC медіана KL дорівнює половині сторони AC , тому кут AKC прямий, і у

трикутнику ABC бісектриса AK є і висотою. Отже, трикутник ABC рівнобедрений ($AB = AC$), в якому AK є також медіаною: $BK = KC$. Значить, MK – медіана прямокутного трикутника BMC . Тому $BC = 2MK = 2KL = AC$. Отже, $AB = BC = AC$ що і слід було довести.

2. Нехай $\frac{2005}{2} = a$. Тоді рівняння легко зводиться до вигляду $(x^2 - a)(x^2 + 2x + 2 - a) = 0$. Звідси знаходимо чотири корені: $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2005}{2}}$, $x_{3,4} = -1 \pm\sqrt{\frac{2003}{2}}$. Зауважимо, що, позначивши $f(x) = x^2 + x - a$, ми могли б записати рівняння у вигляді $f(f(x)) = x$. При цьому $f(x) = x \Leftrightarrow x^2 - a = 0$.

3. Перебором остач від ділення на 11 легко перевірити, що якщо ціле число не ділиться на 11, то його десятий степінь при діленні на 11 дає остачу 1. Тому сума одинадцяти таких десятих степенів ділитиметься на 11.

4. Правильно. Нехай a_1, a_2, \dots, a_n , – задана геометрична прогресія, q – її знаменник. За умовою $a_1, a_{10} = a_1 q^9, a_{30} = a_1 q^{29}$ – натуральні числа. Тому q^9 та q^{29} – додатні раціональні числа. Звідси випливає, що також $q^2 = \frac{q^{29}}{(q^9)^3}$ та $q^2 = \frac{q^9}{(q^2)^4}$ – додатні раціональні числа.

Нехай $q = \frac{m}{n}$, де m та n – натуральні взаємно прості числа. Оскільки число $a_{30} = \frac{a_1 m^{29}}{n^{29}}$ натуральне, m^{29} та n^{29} – взаємно прості, то a_1 ділиться на n^{29} . Тому й $a_{20} = \frac{a_1 m^{19}}{n^{19}}$ – натуральне число.

5. Нехай AS – найбільше з бічних ребер піраміди. Розглянемо розгортку бічної поверхні піраміди, яка починається і закінчується гранями з ребром AS . З'єднаємо точки A між собою і проведемо до цього відрізка серединний перпендикуляр, який пройде через точку S . Позначимо через M точку перетину цього перпендикуляра з

ребром чи вершиною основи піраміди на цій розгортці. Тоді периметр основи $P > 2 \cdot AM > 2 \cdot AS$, що й треба було довести.

2006 рік

7 клас

1. Жоден учень, крім Петруся, не міг зайняти перше місце, оскільки у протилежному випадку він виступив би не гірше, ніж очікував. Отже, Петрусь був першим.

2. Оскільки $\frac{3}{11} + \frac{4}{13} + \frac{5}{14} = \frac{1877}{2002}$, і останній дріб нескоротний, то всього у шкатулці пірата 2002 дорогоцінні камені. З них $2002 - 1877 = 125$ смарагдів.

3. Міг. Нехай весь товар становить 1. Позначимо його частину, продану за першою ціною, через x . Тоді із рівняння $1,5x + 1,5 \cdot 1,5 \cdot (1 - x) = 2$ знаходимо $x = \frac{1}{3}$.

4. Помиляється. Розглянемо три грані куба, які містять вершину з числом 7, і зафарбуємо дану вершину та діагонально протилежні до неї вершини виділених граней у чорний колір. Решту вершин куба вважаємо білими. Тоді на кожному кроці по одиниці буде додаватися у трьох вершинах одного кольору. Тому при діленні на 3 остачі сум чисел і в чорних, і в білих вершинах куба змінюватися не будуть. Спочатку для чорних вершин така остача дорівнювала 1, а для білих становила 0, тому вирівняти числа у всіх вершинах не вдасться.

5. Нехай довжини сторін такого прямокутника дорівнюють x, y . Тоді $xy = 2x + 2y$. Останнє рівняння перепишемо у вигляді $(x - 2)(y - 2) = 4$. Оскільки числа x, y повинні бути натуральними, то отримуємо такі пари розв'язків: $x = 3, y = 6, x = 4, y = 4, x = 6, y = 3$.

8 клас

1. *Перший спосіб.* Припустимо, що кожен учень класу має не більше семи друзів. Зафіксуємо одного з учнів. Тоді у класі знайдеться принаймні 17 учнів, з якими він не дружить. Зафіксуємо одного з них. Тоді серед решти шістнадцяти учнів є принаймні 9, з

якими він не дружить. Зафіксуємо одного з них. Тоді серед решти восьми знайдеться хоч 1, з яким він не дружить. Отже, ми отримали четвірку, в якій немає жодної пари друзів. Така суперечність доводить, що принаймні в одного учня класу не менше восьми друзів.

Другий спосіб. Якщо кожен учень дружить з усіма учнями класу, то твердження задачі очевидне. Якщо ж є два учні, які не дружать між собою, то можливі два випадки: а) кожен з решти 23-ьох учнів дружить принаймні з одним із них. Тоді хоч в одного з цих двох учнів не менше 12 друзів; б) знайдеться принаймні один учень, який не дружить із жодним з цих двох учнів. Тоді з решти 22-ох учнів кожен повинен дружити хоч з одним учнем виділеної трійки. Отже, хоч один учень з цієї трійки матиме не менше 8 друзів.

2. Ліву частину рівняння можна трактувати як суму відстаней від точки x числової прямої до точок $x_1 = -1003$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1003$. Оскільки відстань між крайніми з цих точок дорівнює 2006, то сума всіх відстаней не менша 2006. З іншого боку, права частина рівняння набуває значень, які не перевищують 2006. Рівність досягається тільки для $x = 0$.

3. Оскільки сума всіх заданих чисел дорівнює 36, а сума їх квадратів – 204, то вказаний поділ можливий лише за умови, що у кожній групі сума чисел дорівнюватиме 18, а сума квадратів цих чисел – 102. Розглянемо групу, в яку входить число 8. Тоді сума квадратів решти трьох чисел цієї групи має дорівнювати $102 - 64 = 38$. Це неможливо, якщо в дану групу попадуть числа 7 або 6. З іншого боку, якщо до неї не ввійде число 5, то сума квадратів чисел цієї групи не перевищить $64 + 16 + 9 + 4 = 93$. Оскільки $38 - 25 = 13$, то разом із 8 та 5 у дану групу можуть потрапити лише числа 3 та 2. Перевірка показує, що справді $8 + 5 + 3 + 2 = 18$. Зрозуміло, що такий поділ на групи єдиний.

4. Оскільки діагоналі паралелограма точкою перетину діляться пополам, то проведені прямі ділять медіани трикутників ABC та ADC у відношенні 2:1, рахуючи від вершин B та D відповідно. А отже, дані прямі ділять кожну зі сторін BC та CD пополам. Тому

відстань між точками перетину дорівнює половині BD , тобто 3 см.

5. *Перший спосіб.* Продовжимо сторону BA поза точку A до точки K так, щоб $AK = AE$. Нехай $\angle ACB = \gamma$. Тоді $\angle AEC = 2\gamma$, $\angle BAC = 3\gamma$. Отже, $\angle CAE = \angle CAK = \pi - 3\gamma$. Тоді $\triangle CAE = \triangle CAK$ (за двома сторонами і кутом між ними). Отже, $\angle BKC = \angle BCK = 2\gamma$. Звідси випливає, що $AB + AE = AB + AK = BK = BC$.

Другий спосіб. Відкладемо на стороні BC точку K так, щоб $\angle KAC = \angle KCA$. Тоді $\angle BAK = \angle BKA = \angle KEA = 2\angle BCA$. Отже, $AB = BK$, $AE = AK = CK$. Тому $AB + AE = BC$.

9 клас

1. Запишемо рівняння у вигляді $(x^2 + 1)^2 - 2(x - 1)^2 = 0$. Тоді $(x^2 - \sqrt{2}x + 1 + \sqrt{2})(x^2 + \sqrt{2}x + 1 - \sqrt{2}) = 0$. Дискримінант першого з цих множників від'ємний. А другий множник має два дійсні корені

$$x_{1,2} = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2}.$$

2. Оскільки $a^2 + b^2 = c^2$, то задана нерівність рівносильна нерівності $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca > 0$, отже, й нерівності $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 > 0$. Остання ж нерівність очевидна, бо у прямокутному трикутнику одночасно всі три сторони рівними бути не можуть.

3. Ні. Припустимо, що BD ділить рівносторонній трикутник ABC зі стороною 9 см на трикутники ABD та CBD з периметрами 20 см та 23 см відповідно. Тоді приходимо до рівності $2BD = P_{ABD} + P_{CBD} - P_{ABC} = 20 + 23 - 27 = 16$. Отже, $BD = 8$, $AD = 3$. Але це неможливо, бо за теоремою косинусів

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos 60^\circ = 63.$$

4. Якщо Марійка візьме одну, дві чи три цукерки, то хлопці мають змогу забрати за сумою ходів кожного з них «дві + дві», «дві + одну» чи «одну + одну» цукерки відповідно. При дотриманні ними такої стратегії перед кожним ходом Марійки залишатиметься кількість цукерок, яка при діленні на 5 дає остачу 1, а перед ходами

кожного із хлопців такі остачі будуть відмінними від 1. Тому останню цукерку змушена буде взяти саме Марійка.

5. *Перший спосіб.* Відкладемо на прямій AC точку K , відмінну від точки M , так, щоб $AK = AM$. Тоді чотирикутник $DKBM$ буде паралелограмом. Отже, кут між вказаними прямими дорівнюватиме куту KBE . Але $MK = MB = ME$, то $\angle KBE = 90^\circ$.

Другий спосіб. Оскільки $\vec{BE} = \vec{BM} + 2\vec{MC}$,

$$\vec{DM} = \vec{DA} + \vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AM} = 2\vec{AM} + \vec{MB} = 2\vec{MC} - \vec{BM},$$

то $\vec{DM} \cdot \vec{BE} = (2\vec{MC} - \vec{BM}) \cdot (2\vec{MC} + \vec{BM}) = 4\vec{MC}^2 - \vec{BM}^2 = 0$. Отже, кут між вказаними прямими дорівнює 90° .

Третій спосіб. Оскільки $AB = AD$, $\frac{EM}{MA} = \frac{2}{1}$, то M – точка перетину медіан трикутника DBE . Нехай P – точка перетину прямих DM та BE . Тоді MP – медіана трикутника BME . Але $BM = ME$. Тому пряма MP , а отже, і пряма DM перпендикулярна до BE .

10 клас

1. Розклавши ліву частину рівняння на множники, запишемо рівняння у вигляді $(x^2 + x - 1)(x^2 - 2x - 1) = 0$. Звідси знаходимо

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, \quad x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{2}. \text{ Можна поступити ще й так: поділити}$$

обидві частини рівняння на x^2 і зробити заміну $y = x - \frac{1}{x}$.

2. Оскільки $(x - 2y)^2 \geq 0$, то для $y > 0$ виконується нерівність $\frac{x^2}{y} \geq 4x - 4y$, причому рівність досягається лише для $x = 2y$. Отже,

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{2006} \geq (4a - 4b) + (4b - 4 \cdot 2006) = 4(a - 2006).$$

Рівність можлива тільки для $a = 8024$, $b = 4012$.

3. З очевидної рівності $\frac{x^2 + y^2}{x + y} = x + y - \frac{2xy}{x + y}$ і простоти числа $x + y$ випливає, що $x + y$ має бути дільником принаймні одного

множника у чисельнику останнього дробу. Але $x < x + y$ та $y < x + y$, то $x + y$ є дільником двійки. Звідси знаходимо $x = y = 1$.

4. Нехай A_1, B_1, C_1 – точки перетину висот трикутника ABC зі сторонами BC, CA, AB відповідно. Тоді отримуємо $AA_1 \cdot BC + BB_1 \cdot CA + CC_1 \cdot AB = 6S$. Оскільки при цьому також $HA_1 \cdot BC + HB_1 \cdot CA + HC_1 \cdot AB = 2S$, то віднявши останню рівність від попередньої, переконуємося у справедливості твердження задачі. Якщо ж M – довільна інша точка всередині трикутника ABC , A_2, B_2, C_2 – основи перпендикулярів, опущених з точки M на сторони BC, CA, AB відповідно, то з нерівностей $AM + MA_2 \geq AA_1$, $BM + MB_2 \geq BB_1$, $CM + MC_2 \geq CC_1$, серед яких принаймні одна буде строгою, та рівності $MA_2 \cdot BC + MB_2 \cdot CA + MC_2 \cdot AB = 2S$ випливатиме, що $AM \cdot BC + BM \cdot CA + CM \cdot AB > 4S$. Отже, H – єдина точка із заданою властивістю.

5. Могла. Наприклад, якщо павук попарно з'єднав протилежні вершини однієї з граней куба, потім поступив аналогічно з вершинами протилежної до неї грані, а вкінці з'єднав між собою центри цих граней. Тоді загальна довжина павутини становитиме $4 \cdot \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2} + \frac{3}{2} < 10$.

II клас

1. Очевидно, що при заміні знака „ $*$ ” діленням чи відніманням ми не отримаємо жодної пари натуральних чисел, менших за 2006, які задовольняли би одержане рівняння, бо у такому разі число x повинно бути не менше 2006. У випадку операції додавання отримуємо $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 2\sqrt{2005} < 2006$. Отже, і при такій заміні рівність неможлива. І, нарешті, якщо Миколка замінив „ $*$ ” знаком множення, то $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} \leq \sqrt{2005} \cdot \sqrt{2005} < 2006$. Тому рівність теж не може виконуватися. А оскільки ми перебрали всі знаки арифметичних дій і не отримали жодної пари, про яку йде мова в задачі, то звідси випливає, що Миколка помилився у своїх обчисленнях, і пар натуральних чисел із вказаними властивостями не існує.

2. Віднявши від першого рівняння друге, отримаємо $(y-x)(x+y-1)=0$. Тоді $y=x$ або $x+y=1$. Додавши ж перші два рівняння, будемо мати $x+y+x^2+y^2+2z^2=\frac{3}{4}$. Отже, другий випадок є неможливим. Аналогічно з другого і третього рівняння встановлюємо, що $y=z$. Таким чином, маємо $x=y=z$. Тому з першого рівняння отримуємо $2x^2+x-\frac{3}{8}=0$. Звідси $x_1=\frac{1}{4}$, $x_2=-\frac{3}{4}$.
 Остаточо маємо: $x=y=z=\frac{1}{4}$ та $x=y=z=-\frac{3}{4}$.

3. Позначимо $\cos \alpha + \cos \beta = t$. Тоді

$$t^2 + 1 = (\cos \alpha + \cos \beta)^2 + (\sin \alpha + \sin \beta)^2 = 2 + 2\cos(\alpha - \beta) \leq 4.$$

Отже, $t^2 \leq 3$, $t \leq \sqrt{3}$. Рівність досягається, наприклад, для $\alpha = \beta = \frac{\pi}{6}$.

4. При гомотетії з центром у точці перетину діагоналей початкового чотирикутника і коефіцієнтом $\frac{3}{2}$ чотирикутник з вершинами у точках перетину медіан отриманих трикутників перейде у чотирикутник, вершини якого є серединами сторін заданого опуклого чотирикутника. Цей чотирикутник є паралелограмом, бо за властивостями середніх ліній трикутників його протилежні сторони попарно паралельні. Тому й гомотетичний до нього чотирикутник з вершинами у точках перетину медіан отриманих при поділі трикутників також буде паралелограмом.

5. Нехай M та N – середини ребер AD та BC відповідно. Оскільки $\triangle ABD = \triangle DCA$ (за трьома сторонами), то їх медіани BM та CM рівні. Отже, трикутник BMC рівнобедрений. Тому $MN \perp BC$. Аналогічно доводимо, що $AN = DN$. Отже, також $MN \perp AD$. Таким чином, відстань між прямими AD і BC дорівнює MN . З трикутника ABD знаходимо медіану $BM = \frac{1}{2}\sqrt{2AB^2 + 2BD^2 - AD^2} = \frac{\sqrt{29}}{2}$. А з

прямокутного трикутника BMN маємо $MN = \sqrt{BM^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2} = \sqrt{5}$.

2007 рік

7 клас

1. Позначимо записані числа через $a_1, a_2, \dots, a_{2007}$, а їх суму – через S . Тоді $a_1 = a_{2007} + a_2$, $a_2 = a_1 + a_3, \dots, a_{2006} = a_{2005} + a_{2007}$, $a_{2007} = a_{2006} + a_1$. Додавши ці рівності, отримаємо $S = 2S$. Звідси випливає, що $S = 0$.

2. Може. Оскільки $\frac{1}{2} = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}$, то Андрійко міг би поступити, наприклад, так: зігнути наявну віршовку пополам, потім одну з половинок ще раз зігнути пополам і розрізати віршовку в місці останнього згину.

3. Існують. Наприклад, це кількості місяців високосного року, які мають відповідно 29, 30 та 31 день. Для знаходження всіх розв'язків зауважимо, що $29(x + y + z) < 366$. А отже, $x + y + z \leq 12$. З іншого боку $31(x + y + z) > 366$. Тому $x + y + z \geq 12$. Таким чином, остаточно отримаємо, що $x + y + z = 12$. Отже, записавши задане рівняння у вигляді $30(x + y + z) + z - x = 366$, будемо мати, що $z - x = 6$. Зі сказаного вище отримуємо наступні трійки розв'язків у натуральних числах: (1, 4, 7) та (2, 2, 8).

4. Нехай шуканим є число n . Тоді число $n + 1$ повинно ділитися і на 2, і на 3, і на 4, і на 5, і на 6, і на 7. Найменшим натуральним числом, яке ділиться на всі вказані числа, є 420. Отже, шуканим буде число 419.

5. Могло. Розглянемо рівносторонній трикутник зі стороною 9 см і відріжемо в ньому від однієї вершини рівносторонній трикутник зі стороною 1 см, від другої вершини – рівносторонній трикутник зі стороною 2 см, а від третьої вершини – рівносторонній трикутник зі стороною 3 см. Отримали шуканий шестикутник з рівними кутами.

8 клас

1. З умови задачі випливає, що Іван Царевич відрубав рівно 2007 голів, причому після останнього відрубування нова голова не відростала.. Оскільки натуральних чисел, які діляться на 4 і не перевищують 2007, є 501, то саме стільки голів виросло додатково. Отже, спочатку у Змія було 1506 голів.

2. Якщо серед цих чисел є число, кратне 2007, то виберемо його в ролі a . Якщо ж такого числа немає, то при діленні заданих 2007-и чисел на 2007 отримаємо не більше 2006 різних остач. А отже, принаймні два із цих чисел при такому діленні даватимуть однакові остачі. Тоді їх різниця $b - c$ буде ділитися на 2007. Тому вказана трійка чисел завжди знайдеться.

Аналогічний вибір можна зробити і з 2006 натуральних чисел. Справді, якщо серед них є число, кратне трьом, то позначимо його через a . Тоді серед решти чисел знайдуться два, різниця яких $b - c$ буде ділитися на 669. А отже, $a(b - c)$ поділиться на 2007. Якщо ж числа, кратного трьом, немає, то немає і остач від ділення на 2007, кратних трьом. А отже, різних таких остач не більше 1338. Тому знайдуться такі два числа, різниця яких $b - c$ ділиться на 2007.

3. Задане співвідношення може бути представлене у вигляді
$$\frac{(a^2 + b^2)(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}{a^2 b^2 c^2 (a^2 + b^2 - c^2)} = 0.$$
 Звідси отримуємо $a = c$ або $b = c$.

Зауважимо, що для спрощення доцільно було перенести доданок $\frac{1}{c^2}$ в ліву частину і окремо зводити ліву та праву частини до спільних знаменників. Можна було також позначити $a^2 = x$, $b^2 = y$, $c^2 = z$.

4. Оскільки $AB = AM$, то кути ABM та AMB рівні. А отже, рівними будуть і кути KBM та AMC . Тоді трикутники KBM та AMC рівні між собою (за двома сторонами і кутом між ними). Отже, $\angle HSM = \angle BMK = \angle HMC$. Тому $SH = MH$.

5. Після розстановки знаків «+» та «-» плюсів та мінусів у кожному рядку буде порівну, тому віднімання одного і того ж числа від кожного з чисел будь-якого рядка таблиці не змінить суми чисел

таблиці, утвореної описаною розстановкою знаків. Віднімемо від всіх чисел другого рядка число 8, від всіх чисел третього рядка – число 16, четвертого рядка – 24, п'ятого рядка – 32, шостого рядка – 40, сьомого рядка – 48, восьмого рядка – 56. У результаті отримаємо таблицю, в якій у кожному стовпчику всі записані числа цього стовпчика однакові. Зрозуміло, що після описаної розстановки знаків суми чисел кожного із стовпчиків зміненої таблиці дорівнюватимуть нулю. Отже, нулю дорівнюватиме і сума чисел таблиці, отриманої в умові задачі.

9 клас

1. Нехай $A = \overline{a_1 a_2 \dots a_n}$, де $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Зрозуміло, що при цьому $n \leq 9$. Тоді $9A = 10A - A = \overline{a_1 a_2 \dots a_n 0} - \overline{a_1 a_2 \dots a_n}$. Цифри такого числа послідовно зліва направо дорівнюватимуть: $a_1, a_2 - a_1, \dots, a_{n-1} - a_{n-2}, a_n - 1 - a_{n-1}, 10 - a_n$ при $n > 1$ та $a_1 - 1, 10 - a_1$ при $n = 1$, причому в останньому випадку при $a_1 = 1$ першу цифру нуль писати не потрібно. А отже, незалежно від кількості таких цифр, їх сума дорівнюватиме 9.

2. Запишемо систему рівнянь у вигляді:
$$\begin{cases} (x-3)^2 + y^2 = 1, \\ x^2 + (y-4)^2 = a^2. \end{cases}$$

Отримали систему рівнянь двох кіл, відстань між центрами яких дорівнює 5. Ця система матиме єдиний розв'язок тоді і тільки тоді, коли такі кола дотикатимуться одне до одного, тобто коли сума або різниця їх радіусів дорівнюватиме 5. Звідси $a = \pm 4$ або $a = \pm 6$.

3. Виграшна стратегія є у першого гравця. Для перемоги йому достатньо весь час віднімати останню цифру числа, залишаючи суперникові числа, які закінчуються нулем.

4. Розглянемо коло з центром у точці B радіуса BA . Оскільки $\angle AMC = \frac{1}{2} \angle ABC$, то точка M лежить на цьому колі. Отже, $AB = BM$. Тому $\angle BAM = \angle BMA = \alpha$. Звідси знаходимо, що $\angle ABM = 180^\circ - 2\alpha$, $\angle KBM = 120^\circ - 2\alpha$, $\angle BKM = 60^\circ + \alpha$. Тому трикутник BKM може бути рівнобедреним лише при $\alpha = 20^\circ$ (тоді $BM = KM$) або $\alpha = 40^\circ$ (тоді $BK = KM$).

5. Вдасться. Занумеруємо учнів цифрами від 1 до 9 і запишемо їхні номери у вигляді таблиці справа. Чергування організуємо таким чином: перші три дні чергують трійки учнів, номери яких записані в одному рядку таблиці; наступні три дні – трійки учнів, номери яких записані в одному стовпчику таблиці; решту шість днів – трійки учнів, номери яких записані в різних рядках та різних стовпчиках таблиці. У результаті отримаємо, наприклад, такий графік чергування: (1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9), (1, 4, 7), (2, 5, 8), (3, 6, 9), (1, 5, 9), (1, 6, 8), (2, 4, 9), (2, 6, 7), (3, 4, 8), (3, 5, 7).

1	2	3
4	5	6
7	8	9

10 клас

1. Нехай діагоналі опуклого чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці O під кутом α . Тоді добуток площ трикутників AOB та COD дорівнює добутку площ трикутників BOC та AOD і дорівнює $\frac{1}{4}AO \cdot BO \cdot CO \cdot DO \cdot \sin^2 \alpha$. Тому, якщо площі кожного з цих чотирьох трикутників є цілими числами, то добуток таких площ повинен бути квадратом натурального числа, отже, не дорівнює 2007.

$$2. \cos 36^\circ - \cos 72^\circ = \frac{\cos 18^\circ \cdot \cos 36^\circ - \cos 18^\circ \cdot \cos 72^\circ}{\cos 18^\circ} =$$

$$= \frac{(\cos 18^\circ + \cos 54^\circ) - (\cos 54^\circ + \cos 90^\circ)}{2\cos 18^\circ} = \frac{1}{2}.$$

3. Запишемо рівняння у вигляді $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = t$. Отже, $t \leq 3$ для всіх

натуральних чисел x, y, z . Надалі для конкретності спочатку будемо вважати, що $x \leq y \leq z$. Якщо $x > 3$, то $t < 1$, що не задовольняє умову задачі. При $x = 3$ ліва частина з врахуванням накладених обмежень не перевищує значення $t = 1$, яке при цьому набувається лише для $y = z = 3$. Якщо $x = 2$, то $t \leq 1,5$, а отже, t має дорівнювати 1. Тоді з

рівняння $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$ аналогічними міркуваннями отримуємо, що $y \leq 4$,

і знаходимо $y = z = 4$ або $y = 3, z = 6$. І, нарешті, при $x = 1$ та $t \leq 3$

отримуємо ще такі три рівняння $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$, $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ та $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$.

Перше з них не має розв'язків у натуральних числах, з другого знаходимо $y = z = 2$, а з третього – $y = z = 1$. Таким чином, з врахуванням всіх можливих перестановок чисел x, y, z отримаємо наступні розв'язки (x, y, z, t) даного рівняння у натуральних числах: $(1, 1, 1, 3)$, $(1, 2, 2, 2)$, $(2, 1, 2, 2)$, $(2, 2, 1, 2)$, $(3, 3, 3, 1)$, $(2, 4, 4, 1)$, $(4, 2, 4, 1)$, $(4, 4, 2, 1)$, $(2, 3, 6, 1)$, $(2, 6, 3, 1)$, $(3, 2, 6, 1)$, $(3, 6, 2, 1)$, $(6, 2, 3, 1)$ та $(6, 3, 2, 1)$.

4. Після множення на r^2 рівність, яку необхідно довести, запишеться у вигляді $tg \frac{A}{2} \cdot tg \frac{B}{2} + tg \frac{B}{2} \cdot tg \frac{C}{2} + tg \frac{C}{2} \cdot tg \frac{A}{2} = 1$. При цьому справедливість останньої випливає з таких рівностей

$$tg \frac{C}{2} = tg \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{2} \right) = ctg \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} \right) = \frac{1 - tg \frac{A}{2} \cdot tg \frac{B}{2}}{tg \frac{A}{2} + tg \frac{B}{2}}.$$

5. Зрозуміло, що для розв'язання задачі досить довести, що завжди вдасться доставити другий із «кораблів» 1×3 , третій із «кораблів» 1×2 та четвертий «корабель» 1×1 за умови, що всі попередні розстановки вже зроблені. Адже інші «кораблі» відповідних розмірів у такому разі перед цим тим більше вдасться поставити. Для доведення розглянемо наступні три малюнки:

* * *	* * * * * * *	* * * * *
	* * *	* * * * *
* * *	* * * * *	* * * * *
	* * *	* * * * *

З малюнка 1 видно, що, як би не були поставлені перші два кораблі (1×4 та 1×3), принаймні одна з позицій, позначених трьома зірочками, буде придатною для постановки ще одного «корабля» 1×3 . З малюнка 2 отримуємо, що кожен із перших п'яти поставлених «кораблів» (1×4 , 1×3 , 1×3 , 1×2 , 1×2) може зробити непридатними для розміщення ще одного «корабля» 1×2 не більше як по дві позиції, позначені двома зірочками. Отже, місце ще для одного такого «корабля» завжди знайдеться. І, нарешті, дев'ять перших виставлених на малюнку 3 «кораблів» зможуть зробити непридатними для постановки останнього «корабля» 1×1 не більше 15 намальованих на цьому малюнку позицій, позначених однією зірочкою (по одній позиції можуть відібрати «кораблі» 1×1 та по дві – решта 6 «кораблів»). Отже, місце знайдеться і для постановки останнього «корабля» 1×1 .

11 клас

1. Нехай $n = 11m + k$, де $m \in \mathbb{Z}_+$, k – остача від ділення n на 11. Тоді заданий в умові задачі вираз запишеться у вигляді $121m^2 + 22mk + k^2 + 33m + 3k + 5$. Оскільки $121 = 11^2$, тому для подільності на 121 необхідно, щоб $k^2 + 3k + 5$ ділилося на 11. Повний перебір остач k показує, що таке можливе лише для $k = 4$. Але при такому k вираз набуває вигляду $121m^2 + 121m + 33$ і ділитися на 121 не може. Тому вираз $n^2 + 3n + 5$ не ділиться на 121, яким би не було натуральне число n .

2. Зауважимо, що для будь-яких чисел a, b, x виконується нерівність $|x - a| + |x - b| \geq |a - b|$, причому рівність досягається лише тоді, коли x лежить на відрізку з кінцями a та b . Тому

$$\begin{aligned} f(x) &= (|x - 1| + |x - 2007|) + (|x - 2| + |x - 2006|) + \dots + \\ &\quad + (|x - 1003| + |x - 1005|) + |x - 1004| \geq \\ &\geq 2006 + 2004 + \dots + 2 + 0 = \frac{2006 + 0}{2} \cdot 1004 = 1007012. \end{aligned}$$

Враховуючи сказане вище, рівність досягатиметься лише для точки $x = 1004$, яка лежить на кожному з відповідних відрізків і перетворює

в нуль останній доданок. Отже, найменшим значенням заданої функції є число 1007012.

3. Маємо

$$\begin{aligned} & \cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11} = \\ & = \frac{1}{2\sin \frac{\pi}{11}} \cdot 2\sin \frac{\pi}{11} (\cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11}) = \\ & = \frac{1}{2\sin \frac{\pi}{11}} \cdot \left[\sin \frac{2\pi}{11} + (\sin \frac{4\pi}{11} - \sin \frac{2\pi}{11}) + (\sin \frac{6\pi}{11} - \sin \frac{4\pi}{11}) + \right. \\ & \left. + (\sin \frac{8\pi}{11} - \sin \frac{6\pi}{11}) + (\sin \frac{10\pi}{11} - \sin \frac{8\pi}{11}) \right] = \frac{1}{2\sin \frac{\pi}{11}} \cdot \sin \frac{10\pi}{11} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

4. Повернемо трикутник AMC на 60° навколо точки A так, щоб він перейшов у трикутник AKB . Оскільки при цьому отримаємо рівносторонній трикутник AKM , то $\angle AMK = 60^\circ$. При цьому сторони трикутника KBM відповідно дорівнюють: $KM = \sqrt{3}$, $BM = 3$, $KB = 2\sqrt{3}$. Отже, $KM^2 + BM^2 = KB^2$. Тому $\angle KMB = 90^\circ$. Тоді $\angle AMB = 150^\circ$. Знову повернемо трикутник AMC на 60° (але навколо точки C) так, щоб він перейшов у трикутник BNC . Отримаємо рівносторонній трикутник CMN , в якому $\angle CMN = 60^\circ$. А у трикутнику BMN сторони будуть відповідно дорівнювати: $BN = \sqrt{3}$, $BM = 3$, $MN = 2\sqrt{3}$. Тому $\angle MBN = 90^\circ$. А оскільки $\frac{BN}{MN} = \frac{1}{2}$, то $\angle BMN = 30^\circ$. Отже, $\angle BMC = 90^\circ$. Зрозуміло, що тоді $\angle AMC = 120^\circ$.

5. Не обов'язково. Нехай п'ять із цих відрізків мають довжину 1 см, а шостий – довжину $\sqrt{3}$ см. Зрозуміло, що із будь-яких трьох із них скласти трикутник вдасться. Припустимо, що із цих шести відрізків вдасться скласти тетраедр $ABCD$. Нехай для конкретності $CD = \sqrt{3}$. Позначимо через M середину ребра CD . Тоді з рівнобедрених трикутників CAD та CBD визначимо $AM = BM = \frac{1}{2}$.

Тоді у трикутнику ABM сума довжин двох сторін дорівнюватиме довжині третьої сторони, що є неможливим. Зрозуміло також, що точка M не може знаходитися на відрізку AB . Отримана суперечність доводить, що із таких шести відрізків скласти тетраедр не вдасться.

2008 рік

7 клас

1. Якщо задумане число \overline{ab} , то
$$\begin{cases} 10a + b = 4(a + b) + 3, \\ 10a + b - 2(a + b) = 25. \end{cases}$$
 Звідси

знаходимо $a = 4$, $b = 7$. Отже, шукане число 47.

2. Оскільки $2007 = 3^2 \cdot 223$, і число 223 просте, то отримуємо лише дві такі суми: $1 + 3 + 669 = 673$ та $1 + 9 + 223 = 233$.

3. Якщо обидва кути AOC та BOC менші розгорнутих, то кут AOB дорівнює їх сумі і дорівнює подвоєному куту MON , тобто дорівнює 180° . Якщо обидва ці кути більші розгорнутого, то їх сума дорівнюватиме 540° . А якщо один з них більший розгорнутого, а другий менший, то отримаємо, що різниця цих кутів дорівнює 180° . У кожному з цих випадків точка O належатиме прямій AB .

4. Див. розв'язання задачі 1, 7 клас, 2004 рік.

5. Наприклад, $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) : \frac{1}{6024} = 2008$.

8 клас

1. Нехай CH – висота, а CM – медіана, проведені до гіпотенузи AB . Тоді $CM = MA$. Отже, $\angle MCA = \angle MAC$. Також $\angle HCA = 90^\circ - \angle HAC = \angle ABC$. Тому кут MCH дорівнює різниці між гострими кутами цього трикутника.

2. Зауважимо, що $a^3 - a = (a - 1)a(a + 1)$ для всіх цілих значень a ділиться на 6. Тому, якщо $\sum_{k=1}^n a_k \div 6$, то й $\sum_{k=1}^n a_k^3 \div 6$.

3. З умови задачі випливає, що $\angle ABC_1 = \angle ABC$ та $\angle A_1BC = \angle ABC$. Оскільки точки A_1, B, C_1 лежать на одній прямій, то всі ці кути дорівнюють 60° . Крім того, $AB = BA_1 = 2BC_1$. Нехай точка

B_1 – симетрична до точки B відносно C_1 . Тоді трикутник ABB_1 рівносторонній, і в ньому медіана AC_1 одночасно буде і висотою. Тому $\angle AC_1B = 90^\circ$.

4. Зміна положення дверей відбувається при проходженні сторожа, порядковий номер якого є дільником номера дверей. Тому після проходження всіх сторожів відкритими будуть ті двері, номери яких мають непарну кількість дільників, тобто є точними квадратами. Оскільки $44^2 < 2008 < 45^2$, то всього будуть відкритими 44 двері.

$$5. \quad \sqrt{\sqrt{19} - \sqrt{3 - 8\sqrt{35 - 8\sqrt{19}}}} = \sqrt{\sqrt{19} - \sqrt{3 - 8\sqrt{(\sqrt{19} - 4)^2}}} = \\ = \sqrt{\sqrt{19} - \sqrt{3 - 8(\sqrt{19} - 4)}} = \sqrt{\sqrt{19} - (\sqrt{19} - 4)} = 2.$$

9 клас

1. Зрозуміло, що кожна з цих сум більша, ніж 2. Отже, як прості числа, такі суми мали би бути непарними. Але це неможливо, бо їх загальна сума $4(x + y + z)$ є парною.

2. Припустимо, що всі ці числа менші від 2. Тоді їх добуток $\frac{(a^9 + 2)^2}{a^9} < 8$, тобто $(a^9 - 2)^2 < 0$, чого не може бути. Тому хоч одне з цих чисел не менше, ніж 2.

3. Проведемо діагоналі п'ятикутника і розглянемо 5 трикутників, кожен з яких утворений двома суміжними сторонами п'ятикутника і однією з його діагоналей. Жодна точка не може одночасно належати більше, ніж двом таким трикутникам. Тому хоч в одному з них не буде жодної з вибраних точок. Відрізавши його від п'ятикутника, отримаємо шуканий чотирикутник.

4. Зауважимо, що даний вираз визначений для $a \geq -\frac{3}{4}$ і для всіх таких a виконується рівність

$$A^3 = a + 1 + 3A \cdot \sqrt[3]{\frac{a+1}{2} + \frac{a+3}{6}} \cdot \sqrt{\frac{4a+3}{3}}.$$

$$\sqrt[3]{\frac{a+1}{2} - \frac{a+3}{6}} \cdot \sqrt{\frac{4a+3}{3}} = a+1 - Aa.$$

Звідси випливає, що $(A-1)(A^2 + A + 1 + a) = 0$. Для $a = 2008$ другий множник додатний. Тому $A = 1$.

5. Нехай задана рівнобічна трапеція $ABCD$ з основами $AD = a$, $BC = b$ та бічною стороною $AB = c$. Оскільки у трапецію можна вписати коло, то $a + b = 2c$. Опустивши з вершин меншої основи перпендикуляри на більшу основу трапеції, за теоремою Піфагора отримаємо, що діаметр вписаного кола

$$d = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{ab}.$$

10 клас

1. Оскільки $x^2 = |x|^2$, $y^2 = |y|^2$, $|xy| = |x| \cdot |y|$, то задана рівність може бути зведена до вигляду $(|x| - 2|y| + 1)^2 = 0$. Тому достатньо побудувати графік функції $y = \frac{x+1}{2}$ для $x \geq 0$ і додати до нього симетричні вітки відносно кожної з координатних осей та відносно початку координат.

2. Запишемо дане рівняння у вигляді

$$\sqrt{(x-3)^2 + 1} + \sqrt{(x-3)^2 + 9} = a.$$

Оскільки його ліва частина не менша 4, то при $a < 4$ рівняння розв'язків не має. При $a = 4$ рівняння має єдиний розв'язок $x = 3$. Враховуючи ж монотонність лівої частини на кожному з проміжків $(-\infty, 3)$ та $(3, \infty)$, легко бачити, що при $a > 4$ рівняння має два розв'язки – по одному на кожному з цих проміжків.

3. Найменшим значенням виразу є 2010. Справді

$$A = x^{2007} + x + \underbrace{\frac{1}{x} + \dots + \frac{1}{x}}_{2008} \geq 2010 \cdot \sqrt[2010]{x^{2007} \cdot x \cdot \underbrace{\frac{1}{x} \cdot \dots \cdot \frac{1}{x}}_{2008}} = 2010.$$

Рівність досягається для $x = 1$.

4. З умов задачі випливає, що $\angle AMN + \angle ACN = 180^\circ$ та $\angle BMK + \angle BCK = 180^\circ$. Отже, навколо $AMNC$ та $BMKC$ можна описати кола. Тому $\angle ANC = \angle AMC$, $\angle BKC = \angle BMC$. Тоді

$$\angle LNC + \angle LKC = \angle ANC + \angle BKC = \angle AMC + \angle BMC = 180^\circ,$$

значить, точки C, K, L, N лежать на одному колі.

5. З умов задачі випливає рівність вигляду $n(n+1) = \dots 4016$. Розглядаючи її як квадратне рівняння відносно n , отримаємо, що його дискримінант закінчується на 65, отже, не є точним квадратом. Тому натуральних коренів це рівняння не має. Значить, при жодному натуральному n вказана сума не може закінчуватися на 2008.

11 клас

1. Розглянемо графіки кожної з рівностей системи. З цих рівнянь відповідно отримуємо

$$y = \begin{cases} -2x + 4, & x < 0, \\ 4, & x \in [0, 4], \\ 2x - 4, & x > 4, \end{cases} \quad y = (a-1)^2 - (x-2)^2.$$

Мінімумом першої функції є 4, а максимумом другої є $(a-1)^2$, причому обидва ці значення досягаються при спільному значенні $x = 2$. Крім того, лінія $x = 2$ є віссю симетрії кожного з цих графіків. Тому при $(a-1)^2 < 4$ система не має розв'язків, при $(a-1)^2 = 4$ – має один розв'язок, а при $(a-1)^2 > 4$ – два розв'язки.

2. Не можна. Припустимо, що такими є числа a та b . Тоді повинна виконуватися рівність $ab = 66 - a - b$, тобто $(a+1)(b+1) = 67$. Але 67 – просте число, тому таке рівняння розв'язків у натуральних числах не має.

3. Покладемо $y = 1$. Нехай $f(1) = a$. Тоді отримаємо, що $f(ax) \equiv x^2$. При цьому $a \neq 0$. Тому $f(x) = \left(\frac{x}{a}\right)^2 = cx^2$. Підстановкою такої функції у початкове рівняння встановлюємо, що вона є його розв'язком лише при $c = 1$. Отже, остаточно $f(x) = x^2$.

4. Оскільки навколо чотирикутника $ABCD$ можна описати коло, то $AB + CD = BC + AD$. Отже, $AD = a - 1$. Крім того, для площ чотирикутників, вписаних в коло, сторони яких дорівнюють m, n, k, l , маємо $S = \sqrt{(p - m)(p - n)(p - k)(p - l)}$. За цією формулою, отримуємо, що площа заданого трикутника $S = \sqrt{2a(a - 1)}$, де $a > 1$.

Зауважимо, що формулу для обчислення площі можна було б отримати і безпосередньо як суму площ двох трикутників, які утворюють чотирикутник $ABCD$. Для цього спочатку з цих трикутників за теоремою косинусів обчислюємо діагональ чотирикутника і знаходимо з отриманої рівності косинуси протилежних кутів, які відрізняються лише знаком. Далі знаходимо синуси цих кутів. А знаходимо і площі кожного з цих трикутників.

5. Розглянемо півкруг з діаметром $4n$. Проведемо перпендикуляри до цього діаметра на відстанях $1, 2, 3, \dots, 2n - 1$ від його лівого кінця. Їх довжини дорівнюють відповідним доданкам у лівій частині нерівності. На кожному з перпендикулярів справа від нього побудуємо прямокутник з основою 1, яка лежить на діаметрі півкруга. Сума площ цих прямокутників дорівнює лівій частині нерівності. Вона менша площі половини півкруга, тобто менша πn^2 .

2009 рік

7 клас

1. Щоб придбати товару на суму, не меншу 600 грн., треба мати не менше $0,9 \cdot 600 = 540$ грн. Отже, у випадку а) покупець зможе отримати знижку 10% і зробити покупку на максимальну суму $594 : 0,90 = 660$ грн. А у випадку б) знижка становитиме лише 4%. Тому максимальна сума покупки становитиме $534 : 0,96 = 556,25$ грн.

2. Можна. Для цього досить пройти шлях від лівої нижньої кутової клітинки до кожної з білих клітинок, повертаючись при цьому кожен раз у початкову кутову клітинку тим же маршрутом, але у зворотному напрямі. Після кожного такого обходу свій колір змінять тільки ліва нижня кутова клітинка і та кінцева з білих клітинок, до якої дійшла фішка. А оскільки на вказаній шахівниці є

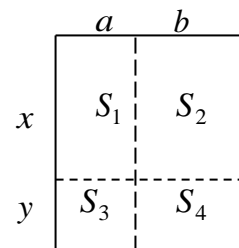
24 білих клітинки, то за 24 такі обходи всі клітинки дошки стануть чорними. Зауважимо також, що існує й значно коротший маршрут фішки, при якому вона у кожній білій клітинці побуває по одному разові, а у кожній чорній – не більше, як двічі.

3. Розглянемо остачу від ділення суми цифр записаного числа на 9. Вона не залежить від порядку, в якому були виписані числа $1, 2, \dots, 2009$, а з іншого боку – дорівнює остачі від ділення на 9 суми цих чисел, бо натуральне число i сума його цифр при діленні на 9 дають однакові остачі. Враховуючи рівність $1 + 2 + \dots + 2009 =$

$$= (1 + 2006) + (2 + 2005) + \dots + (1003 + 1004) + 2007 + 2008 + 2009$$

та подільність числа 2007 на 9, отримаємо, що шукана остача дорівнює 3. Тому записане число ділиться на 3, але не ділиться на 9. Отже, не може бути квадратом цілого числа.

4. Розглянемо рисунок справа. Оскільки $S_1 = ax$, $S_2 = bx$, $S_3 = ay$, $S_4 = by$, то $S_1 S_4 = S_2 S_3$. Отже, якщо відома площа трьох із цих чотирьох прямокутників, то можна знайти й площу останнього. Таким чином, на заданому в умові задачі рисунку можна обчислити площі усіх прямокутників: верхній ряд: 2, 4, 8, 10, другий ряд: 4, 8, 16, 20, третій ряд: 5, 10, 20, 25, і четвертий ряд: 3, 6, 12, 15. Їх сума складає 168.



8 клас

1. Оскільки добуток цифр є простим числом, то цифри числа повинні бути $1, 1, p$ де цифра p – просте число. Проаналізуємо можливі значення p у порядку спадання: 7, 5, 3, 2. Цифра p не може дорівнювати 7, оскільки тоді це число ділиться на 3 і не є простим. Цифра $p = 5$ не може бути першою, бо це суперечить умові 2). Число 311 задовольняє умови задачі. Із сказаного вище випливає, що це найбільше із таких чисел, отже, є шуканим.

2. З умов задачі випливає, що $abc \neq 0$ та $ab + bc + ca = 0$. Тому

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a + b + c)^2,$$

що й треба було довести.

3. Розглянемо остачу від ділення суми цифр записаного числа на 9. Вона не залежить від порядку, в якому були виписані числа 1, 2, ..., 2009, а з іншого боку – дорівнює остачі від ділення на 9 суми цих чисел, бо натуральне число і сума його цифр при діленні на 9 дають однакові остачі. Враховуючи рівність $1 + 2 + \dots + 2009 =$

$$= (1 + 2006) + (2 + 2005) + \dots + (1003 + 1004) + 2007 + 2008 + 2009$$

та подільність числа 2007 на 9, отримаємо, що шукана остача дорівнює 3. Тому записане число ділиться на 3, але не ділиться на 9. Отже, не може бути квадратом цілого числа.

4. Можна. Для цього досить пройти шлях від лівої нижньої кутової клітинки до кожної з білих клітинок, повертаючись при цьому кожен раз у початкову кутову клітинку тим же маршрутом, але у зворотному напрямі. Після кожного такого обходу свій колір змінять тільки ліва нижня кутова клітинка і та кінцева з білих клітинок, до якої дійшла фішка. А оскільки на вказаній шахівниці є 24 білих клітинки, то за 24 такі обходи всі клітинки дошки стануть чорними. Зауважимо також, що існує й значно коротший маршрут фішки, при якому вона у кожній білій клітинці побуває по одному разові, а у кожній чорній – не більше, як двічі.

5. Не залежно від вибору точки X , отримаємо, що $A_3H_2 \parallel A_1X$ та $A_2H_3 \parallel A_1X$ як прями, перпендикулярні до l_1 . Зрозуміло, що при цьому також $A_3H_2 \parallel A_2H_3$. Далі, аналогічно встановимо, що, $A_1H_2 \parallel A_3X$ та $A_1H_3 \parallel A_2X$. Тому чотирикутники $A_1XA_3H_2$ та $A_1XA_2H_3$ є паралелограмами. Отже, $A_3H_2 = A_1X = A_2H_3$. Тому чотирикутник $A_2A_3H_2H_3$ – також паралелограм, і в ньому $A_2A_3 = H_2H_3$. Аналогічно доводимо, що $A_2A_3 = H_2H_3$ та $A_2A_3 = H_2H_3$. Отже, $\square A_1A_2A_3 = \square H_1H_2H_3$.

9 клас

1. При $x \neq 0$ перше рівняння системи рівносильне рівнянню $9xy = 2(x + y)^2 \Leftrightarrow 2y^2 - 5xy + 2x^2 = 0 \Leftrightarrow (y - 2x)(2y - x) = 0$. Отже, для $x \neq 0$ з першого рівняння отримуємо $y = 2x$ та $y = \frac{1}{2}x$. Друге

рівняння при $|x| \geq \sqrt{2}$, $|y| \leq \sqrt{3}$ після піднесення до квадрату зводиться до вигляду $x^2 + y^2 = 5$. Якщо $y = 2x$, то звідси отримуємо два розв'язки системи: $(2,1)$ та $(-2,-1)$. А якщо $y = \frac{1}{2}x$, то знайдемо такі дві пари чисел (x, y) : $(1,2)$ та $(-1,-2)$. Легко бачити, що друге рівняння системи жодна з них не задовольняє.

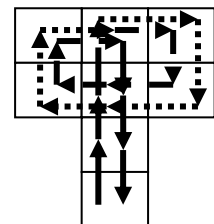
2. Оскільки $320 = 2^6 \cdot 5$, то одна з цифр цього числа ділиться на 5. Зрозуміло, що такою цифрою може бути тільки цифра 5, бо інакше добуток всіх цифр такого числа дорівнював би нулю. Тоді добуток решти цифр становить $64 = 2^6$. При цьому таких інших цифр не менше, як дві. Оскільки число 64 єдиним способом розкладається у добуток двох одноцифрових множників: $64 = 8 \cdot 8$, то серед чисел 588, 858, 885 найменшим трицифровим числом із добутком цифр 320 буде число 588. Оскільки всі інші числа з таким добутком цифр не менше, як чотирицифрові, отже, більші, ніж 588, то число 588 є шуканим.

3. Оскільки $xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$ для будь-яких дійсних чисел x, y , то

$$a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2} \leq \frac{a^2 + (1-b^2)}{2} + \frac{b^2 + (1-a^2)}{2} = 1.$$

4. Див. розв'язання задачі 5, 8 клас.

5. Оскільки жодна біла клітинка дошки не є кутовою, то для кожної білої клітинки існують дві сусідні клітинки, які знаходяться або обидві на одній горизонталі шахівниці, або обидві на одній вертикалі шахівниці. Пройдемо тепер з лівого нижнього кута до кожної білої клітинки маршрутом, проілюстрованим для першого з цих варіантів на рисунку справа. Тут біла клітинка, до якої ми проходимо фішкою, є центральною у верхньому ряді рисунка. Інші можливі входження у білі клітинки при їх розташуванні на лівому, правому чи нижньому краях шахівниці легко проаналізувати повертаючи цей рисунок на 90 чи 180 градусів. Обійшовши згідно поставлених стрілок клітинки верхніх двох рядів рисунка, ми далі вертаємося у лівий нижній кут шахівниці тим же маршрутом, яким



ввійшли у середню клітинку другого рядка, але, рухаючись у зворотному напрямі. Оскільки при цьому непарну кількість разів ми побуваємо лише у вибраній білій клітинці, то її колір стане чорним. Крім того, при кожному такому обході буде змінюватися на протилежний і колір лівої нижньої клітинки шахівниці. Враховуючи, що кількість білих клітинок на такій шахівниці є парною, отримаємо після завершення всіх обходів всі клітинки шахівниці чорними.

10 клас

1. Нехай рівняння прямих l_1 та l_2 мають вигляд $y = kx + d_1$ та $y = kx + d_2$. Тоді абсциси точок A і B є коренями рівняння $ax^2 + bx + c = kx + d_1$, а абсциси точок C і D – коренями рівняння $ax^2 + bx + c = kx + d_2$, які за умовою задачі мають по два розв'язки x_1, x_2 та x_3, x_4 відповідно. За теоремою Вієта отримуємо:

$$x_1 + x_2 = \frac{k - b}{a} \quad \text{та} \quad x_3 + x_4 = \frac{k - b}{a}. \quad \text{Отже, } x_1 + x_2 = x_3 + x_4.$$

2. а) Не обов'язково. Наприклад, $a = c = 2, b = d = 4$.

б) Обов'язково. Покажемо, що якщо у натурального числа n його квадрат n^2 є кубом деякого іншого натурального числа, то й саме число n також є кубом деякого натурального числа. Дійсно, розглянемо розклад числа n на прості множники, тобто $n = p_1^{m_1} \dots p_k^{m_k}$. Його квадрат – число $n^2 = p_1^{2m_1} \dots p_k^{2m_k}$. Якщо воно є кубом натурального числа, то для кожного $i = \overline{1, k}$ повинна виконуватись рівність $2m_i \div 3$, що рівносильне умові $m_i \div 3$. А це означає, що число n є кубом. Оскільки $\frac{ab \cdot cd \cdot ea}{bc \cdot de} = a^2 = a_1^3$, то й кожне з чисел a, b, c, d, e є повним кубом.

3. Виграє той, хто ходить другим. Для цього йому досить дотримуватися такої стратегії: 1) якщо він своїм ходом може пофарбувати останню сторону якої-небудь клітини, то він це робить і перемагає; 2) якщо ні, то на хід першого він відповідає симетричним ходом відносно однієї і тієї ж діагоналі квадрата. Зрозуміло, що при

цьому він або першим замалює четверту сторону якогось одиничного квадрата, або матиме симетричний хід після ходу першого гравця. Зауважимо, що після такого симетричного ходу перший гравець виграти не зможе, бо інакше другий уже мав би нагоду виграти раніше своїм попереднім ходом.

4. З властивостей зовнішніх та вписаних кутів отримуємо, що $\angle CFK = \angle CFE = \angle CAE + \angle AED = \frac{1}{2}(\cup CE + \cup AD) = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$.

Аналогічно доводимо, що $\angle CKF = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$. Тому $CF = CK$. Далі, з рівності дуг $\cup CD = \cup AD$ та $\cup CE = \cup BE$ отримуємо рівність трикутників DCE та DIE за спільною стороною DE та прилеглими до неї кутами. Звідси випливає, що також $\triangle DCK = \triangle DIK$ та $\triangle FCE = \triangle FIE$ за відповідними двома сторонами і кутом між ними. Тому $CF = FI$ та $CK = KI$. Отже, у чотирикутнику $CFIK$ всі сторони рівні і він є ромбом.

5. Див. розв'язання задачі 3, 9 клас.

Можна міркувати ще й так: зробимо заміну: $a = \cos \alpha$, $b = \cos \beta$, $\alpha, \beta \in [0, \pi]$. Тоді нерівність набуває вигляду:

$$\cos \alpha \sin \beta + \cos \beta \sin \alpha = \sin(\alpha + \beta) \leq 1.$$

Крім того, справедливість нерівності отримаємо, розглянувши скалярний добуток векторів $\vec{x} = (a, \sqrt{1-a^2})$ та $\vec{y} = (\sqrt{1-b^2}, b)$. Тоді

$$\begin{aligned} a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2} &= a \cdot \sqrt{1-b^2} + \sqrt{1-a^2} \cdot b = \\ &= \vec{x} \cdot \vec{y} \leq |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| = \sqrt{a^2 + (1-a^2)} \cdot \sqrt{b^2 + (1-b^2)} = 1. \end{aligned}$$

11 клас

1. Перше число більше. Запишемо цю задачу у загальному вигляді: для деяких додатних $a \neq b$ порівняти додатні числа $A = \sqrt{a+\sqrt{b}} + \sqrt{b+\sqrt{a}}$ та $B = \sqrt{a+\sqrt{a}} + \sqrt{b+\sqrt{b}}$. Доведемо, що $A > B$. Це рівносильне тому, що

$$A^2 > B^2 \Leftrightarrow \sqrt{a+\sqrt{b}} \cdot \sqrt{b+\sqrt{a}} > \sqrt{a+\sqrt{a}} \cdot \sqrt{b+\sqrt{b}}.$$

Після чергового піднесення до квадрату та спрощень маємо: $a\sqrt{a} + b\sqrt{b} > a\sqrt{b} + b\sqrt{a} \Leftrightarrow (a-b)(\sqrt{a} - \sqrt{b}) > 0$ для $a \neq b$.

2. $n \in \{1; 7\}$. Число 3π є періодом період даної функції $f(x)$, якщо для всіх $x \in R$ виконується рівність $f(x + 3\pi) = f(x)$. Зокрема, ця рівність має виконуватись і для $x = 0$. Знаходимо: $f(0) = 0$;

$f(3\pi) = \cos 3\pi n \cdot \sin \frac{3 \cdot 2009\pi}{n^2}$. Тому повинна виконуватись рівність

$$0 = \cos 3\pi n \cdot \sin \frac{3 \cdot 2009\pi}{n^2} \Leftrightarrow 0 = \sin \frac{3 \cdot 2009\pi}{n^2} \Leftrightarrow \frac{6027\pi}{n^2} = \pi k, k \in Z.$$

Отже, $6027 : n^2$. Але $6027 = 3 \cdot 7^2 \cdot 41$, то можливими значеннями n можуть бути лише числа 1 та 7. Перевіркою переконуємося, що для цих n число 3π справді є періодом функції $f(x)$.

3. Див. розв'язання задачі 4, 10 клас.

4. Неважко заповнити квадрат 2009×2009 числами $1, 2, \dots, 2009$ так, щоб виконувались умови задачі і відстань до найближчої одиниці дорівнювала 502. Для цього будемо виписувати одиниці на тих діагоналях, паралельних до діагоналі квадрата, яка йде з його лівого нижнього кута у правий верхній кут, що складаються відповідно з 1005 та 1004 клітинок квадрата. Решту клітинок квадрата заповнимо аналогічно, дотримуючись принципу, щоб при кожному k на діагоналях із k та $2009 - k$ було записане одне і те ж число від 2 до 2009, різне для різних k . Покажемо, що отримати більшу відстань, ніж 502, не вдасться. Для цього помітимо, що у верхніх та нижніх 502 горизонталях разом завжди будуть знаходитися $2 \cdot 502 = 1004$ одиниці (бо в кожному рядку є рівно одна одиниця). Крім них, у лівих 502 вертикалях та у правих 502 вертикалях знаходиться не більше 1004 одиниць (не більше, бо деякі з них можуть бути враховані в горизонталях). Отже, в центральному квадраті з розмірами 1005×1005 лежить принаймні одна одиниця. А відстань від центра до будь-якої клітини цього квадрата не перевищує 502.

5. Не існує. Справді, припустивши, що корені такого многочлена задовольняють умову задачі, отримаємо $f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$, де α, β, γ – цілі числа. Тоді число $|f(34)| = |(34 - \alpha)(34 - \beta)(34 - \gamma)|$ просте. Можна вважати, що $|34 - \alpha| = |34 - \beta| = 1$, а $|34 - \gamma|$ – просте

число. Звідси випливає, що $\alpha \geq 33$ та $\beta \geq 33$. А оскільки найближчими до 34 є прості числа 31 та 37, то $|\gamma| \geq 3$. Отже, $|c| = |\alpha\beta\gamma| \geq 33 \cdot 33 \cdot 3 = 3267 > 2009$, що суперечить умові $|c| \leq 2009$.

2010 рік

I тур

7 клас

1. $12 - (11 - 10 - 9 - 8 - 7 - 6 - 5 - 4 - 3 - 2 - 1) = 56$. При будь-якій розстановці дужок число 12 завжди буде зі знаком «+», а число 11 – зі знаком «-». Тому значення виразу буде найбільшим, якщо всі інші доданки після розкриття дужок будуть зі знаком «+».

2. 999. Якщо $n < 999$, то хоч одна цифра числа n менша, ніж 9. А тоді сума цифр принаймні одного з чисел $n+1$, $n+10$ або $n+100$ більша, ніж сума цифр числа n .

3. Могли. Двом дівчатам слід було розрізати прямокутник по діагоналі і скласти два різні трикутники, третій – розрізати його від вершини до середини більшої сторони, а четвертій – від вершини до середини меншої сторони.

4. 12 фігурок. Вісьмома з них заповнити прямокутник 5×8 , а ще по дві розмістити у двох прямокутниках 3×4 . На більшу кількість фігурок просто не вистачить площі квадрата.

8 клас

1. $2010 - (2009 - 2010 - 2009 - \dots - 2010 - 2009) = 4035077$. При будь-якій розстановці дужок перше число 2010 завжди буде зі знаком «+», а перше число 2009 – зі знаком «-». Тому значення виразу буде найбільшим, якщо всі інші доданки після розкриття дужок будуть зі знаком «+». Врахуйте також, що

$$2010 - (2009 - 2010 - 2009 - \dots - 2010 - 2009) = 1 + (2010 + 2009) \cdot 1004.$$

2. Усіх можливих варіантів випадання очок є $6^2 = 36$. У шести з них в обох дітей очок випаде порівну. У решті тридцяти – в половині випадків більше очок випаде в Олесі. Тому шукана ймовірність

$$\text{дорівнює } \frac{15}{36} = \frac{5}{12}.$$

3. Для всіх $n \geq 3$. Справді, тоді $n \cdot (2n + 2) = 2n \cdot (n + 1)$, причому $n < n + 1 < 2n < 2n + 2 < n^2$. Якщо ж $n = 1$ чи $n = 2$, то у пропонуваному наборі чотирьох різних чисел просто не існує.

4. Проведемо висоту AH цього трикутника. Тоді $BM = MH$, $CN = NH$. Якщо S співпадає з однією з точок B, C, H , то заданий добуток дорівнює нулю. Якщо S лежить між B і H , то маємо $MB - MS < MB - MH < 0$, $NC - NS > NC - NH > 0$, і нерівність виконується, а якщо S лежить між C і H , то аналогічно доводимо, що $MB - MS > MB - MH > 0$, $NC - NS < NC - NH < 0$.

5. а). Існують. Наприклад, $a_1 = 2$, $a_2 = 1005$. З умови задачі випливає рівність $a_1 \cdot a_2 = 2010$, яка дає змогу знайти й інші пари чисел a_1, a_2 – дільників числа 2010.

б). Існують. Наприклад, числа 2, 3, 5, 6, 10, 15, 134, 201, 335, 402, 670, 1005, які можна розбити на 6 пар, в кожній з яких добуток чисел дорівнює 2010.

9 клас

1. Розкриваючи знаки модулів при $x \neq 0$, $y \neq 0$, отримаємо $y = 1$ при $x > 0$, $y > 0$ та $y = -1$ при $x < 0$, $y < 0$. Якщо ж $xy < 0$, то з рівняння випливає $y = 0$, що неможливо.

2. Жовтих 12066, блакитних 10044. Зовнішні шари прямокутників розмірами 2008×9 , 2004×5 , 2000×1 будуть блакитними. Кількості їх клітинок чисельно дорівнюють площам відповідних шарів, які ще можна подати як різниці площ відповідних прямокутників. Остаточо отримуємо блакитних клітинок

$$(2008 \cdot 9 - 2006 \cdot 7) + (2004 \cdot 5 - 2002 \cdot 3) + 2000 \cdot 1 = 10044.$$

Решта $2010 \cdot 11 - 10044 = 12066$ клітинок жовті.

3. Для $x = 0$ та $x = 1$. Для інших допустимих $x \in (0; 1)$ отримуємо нерівність $0 < (\sqrt{x})^{2009} + (\sqrt{1-x})^{2010} < x + (1-x) = 1$.

4. Відкладемо на стороні BC точку E таку, що $CE = BD$. Оскільки $OB = OC$, то $\triangle OBD = \triangle OCE$. Враховуючи умову задачі,

отримаємо, що $BD = OD = OE = CE = DE$. Далі знаходимо $\angle DOE = \angle OED = \angle ODE = 60^\circ$, $\angle BOD = \angle COE = 30^\circ$. Звідси випливає, що $\angle BOC = 120^\circ$, $\angle DOC = 90^\circ$, $\angle AOC = 90^\circ$, $\angle AOB = 150^\circ$. А оскільки вписаний кут дорівнює половині відповідного центрального кута, то $\angle ABC = 45^\circ$, $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle ACB = 75^\circ$.

5. 2011. Нехай $n = 2010 + m$. Тоді за умовою задачі для кожного $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ числа $n + k = 2010 + m + k$ та $2010 + k$ є взаємно простими. Віднявши від першого з них друге, отримаємо, що для цих же k взаємно простими будуть і числа m та $2010 + k$. Але серед m послідовних чисел $2011, 2012, \dots, 2010 + m$ одне обов'язково ділиться на m . Тому m може дорівнювати лише 1.

10 клас

1. Три. Наприклад, $9954 - 4599 = 5355$. Зрозуміло, що п'ятірок не більше чотирьох. Але різниця $\overline{abcd} - \overline{dcba} = 999(a - d) + 90(b - c) : 9$, а число 5555 на 9 не ділиться.

2. $x = 0$. Помноживши ліву і праву частину заданого рівняння на $2 = (x + 1) - (x - 1)$, отримаємо рівняння

$$(x + 1)^6 - (x - 1)^6 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = (x - 1)^2.$$

3. Вказані чотирикутники є трапеціями з рівними відповідними основами. Позначимо довжини цих основ a та b . Тому, враховуючи формулу площі трапеції: $S = \frac{a + b}{2} \cdot h$, достатньо довести, що у названих парах таких трапецій суми висот є рівними. Неважко побачити, що вони дорівнюють $|a - b|$.

4. З умов задачі випливає, що $z = xy^2 + x - 1 = 2xy - 1$. Отже, $x(y^2 - 2y + 1) = 0$. Оскільки ж $x \neq 0$, то знаходимо $y = 1$. Тоді з рівності $xy = \frac{z + 1}{2}$ будемо мати $x = \frac{z + y}{2}$, що й треба було довести.

5. При дванадцяти. Кількість пар сусідів дорівнює кількості учнів за столом. З умови задачі випливає, що з одного боку вона має ділитись на 3, а іншого боку – на 4, отже, не може бути меншою, ніж

12. Для трьох хлопчиків, два з яких сидять поруч, а третій окремо від них, і дев'яти дівчаток умова задачі виконується.

11 клас

1. Якщо n – парне, то групуючи зліва доданки по два, починаючи з другого, переконуємося, що ліва частина від'ємна. Якщо ж n – непарне, то знову групуючи зліва доданки по два, але починаючи з першого, бачимо, що у кожній парі різниці дорівнюють відповідним доданкам правої частини. Враховуючи монотонність суми зліва, звідси знаходимо єдиний розв'язок $n = 2010 \cdot 2 + 1 = 4021$.

Можна було також порахувати суми зліва та справа за формулами для суми членів геометричної прогресії.

2. Жовтих 846, блакитних 485. Зовнішні шари кубів розмірами $9 \times 9 \times 9$, $5 \times 5 \times 5$, $1 \times 1 \times 1$ будуть блакитними. Кількості їх клітинок чисельно дорівнюють об'ємам відповідних шарів, які ще можна подати як різниці об'ємів відповідних кубів. Отже, остаточно отримуємо кількість блакитних клітинок $(9^3 - 7^3) + (5^3 - 3^3) + 1^3 = 485$.
Всі інші $11^3 - 485 = 846$ клітинок жовті.

3. Позначимо через O точку перетину діагоналей AC та BD . Оскільки висота AO трикутника ABD лежить на прямій AC , то на цій прямій лежатиме і точка K перетину його висот. Проведемо через K висоту BH цього трикутника. Тоді $\angle DBH = \angle DAC = \angle DBC$. Отже, у трикутнику KBC висота BO є ще й бісектрисою, а значить, і медіаною. Тому точка K симетрична до C відносно точки O . Аналогічно доводимо симетричність відносно O пар точок M та A , L та B , Q та D . Отже, чотирикутники $MLKQ$ та $ABCD$ рівні як симетричні відносно O .

4. Останні цифри чисел 2^n та 3^m повторюються з періодом 4. Для першого числа їх послідовність 2, 4, 8, 6, а для другого – 3, 9, 7, 1. При подільності $2^n + 3^m$ на 5 отримуємо такі комбінації останніх цифр: 2 + 3, 4 + 1, 8 + 7, 6 + 4. Тоді для числа $2^m + 3^n$ відповідні їм комбінації будуть такими: 2 + 3, 6 + 4, 8 + 7, 4 + 1. Отже, дане число також ділиться на 5.

5. Запишемо перше рівняння даної системи у вигляді $(xy - 1)^2 = x(x - y)$. Оскільки $x = 0$ не задовольняє його, то для $x > 0$ звідси отримуємо, що $x \geq y$. Аналогічно з інших двох рівнянь знайдемо $y \geq z$ та $z \geq x$. Тому $x = y = z$. Далі з першого рівняння отримаємо $x^4 + 1 = 2x^2$. Отже, $x = y = z = 1$.

II тур

7 клас

1. Зрозуміло, що учасників олімпіади непарна кількість, і номер Андрія не більший, ніж 18. Тому всіх учасників олімпіади не більше, ніж 35. Їх також не менше, ніж 28. Між 28 і 35 є єдине непарне число, кратне 3, – це 33. Тому шкіл у районі – 11.

2. Проведемо діагональ AC квадрата $ABCD$, виберемо на ній точки E та F і сполучимо ці точки з вершиною B . Далі, виберемо на відрізку BF точку G і сполучимо її з E та серединою відрізка BE . Отримаємо одне з багатьох можливих розбиттів квадрата.

3. Для довільного $n \in \mathbb{N}$ сума цифр числа $10^n - 1$ дорівнює $9n$. Оскільки $(10^n - 1)^2 = 10^{2n} - 2 \cdot 10^n + 1 = 99\dots9800\dots01$, причому цифр 9 та 0 тут по $n - 1$, то і сума цифр квадрата такого числа теж буде $9n$.

4. Якщо фішка рухається достатньо довго, то настане момент, коли у деякій клітинці A вона побуває 2010 разів. Перший свій стрибок з цієї клітинки вона зробить у деяку клітинку B , другий – у наступну за B клітинку, і так далі. За 2010 таких послідовних стрибків із клітинки A фішка побуває у всіх клітинках.

8 клас

1. Зрозуміло, що учасників олімпіади непарна кількість, і номер Андрія не більший, ніж 18. Тому всіх учасників олімпіади не більше, ніж 35. Їх також не менше, ніж 28. Між 28 і 35 є єдине непарне число, кратне 3, – це 33. Тому шкіл у районі – 11.

2. а). Зможе. $256 \rightarrow \sqrt{256} = 16 \rightarrow 3 \cdot 16 + 13 = 61 \rightarrow$

$\rightarrow 3 \cdot 61 + 13 = 196 \rightarrow \sqrt{196} = 14 \rightarrow 3 \cdot 14 + 13 = 55.$

б). Не зможе. Квадрати натуральних чисел при діленні на 4

можуть давати лише остачі 0 або 1. Число 55 при такому діленні дає остачу 3. Тому, діючи за першим правилом, ми отримаємо на другому кроці остачу 2, далі – остачу 3, потім – знову остачу 2, які, таким чином, будуть чергуватися. Отже, жодного точного квадрата, зокрема і числа 256, отримати не вдасться.

3. 45° . Нехай прямі CO_1 та AO_2 перетинаються в точці K . Відкладемо на цих прямих точки P та Q відповідно так, що $\angle PBA = \angle O_1BA$, $\angle QBC = \angle O_2BC$. Оскільки $\angle BAN = \angle BSN = 60^\circ$, то $\angle BO_1N = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAN = 120^\circ$, $\angle BO_2N = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BSN = 120^\circ$. Отже, навколо чотирикутників O_1BSN та O_2BAN можна описати кола. Тому $\angle O_1SN = \angle O_1BN = \angle PBA$, $\angle O_2AN = \angle O_2BN = \angle QBC$. Враховуючи, що $AN \perp BC$, $SN \perp AB$, звідси отримуємо $\angle BPK = \angle BQK = 90^\circ$. Тому $\angle PKA = \angle PBQ = 45^\circ$.

4. Якщо фішка рухається достатньо довго, то настане момент, коли у деякій клітинці A вона побуває 2010 разів. Перший свій стрибок з цієї клітинки вона зробить у деяку клітинку B , другий – у наступну за B клітинку, і так далі. За 2010 таких послідовних стрибків із клітинки A фішка побуває у всіх клітинках.

9 клас

1. а). Могло. Нехай на дошці були записані числа $n, n+1, n+2, \dots, n+15$. Їх сума $16n+120 = 8(2n+15)$ ділиться на 8, а для $n = 55$ – ще й на 125, і для цього n закінчується трьома нулями. Але серед 16 послідовних чисел є принаймні 3 числа, кратні 5, та 3 парні числа, то й їх добуток теж ділиться на 1000.

б). Не могло. Сума $8(2n+15)$ при жодному натуральному n не ділиться на 16. А добуток 16 послідовних натуральних чисел на 16 ділиться. Отже, 4 останні цифри у них співпадати не можуть.

2. а). Зможе. $256 \rightarrow \sqrt{256} = 16 \rightarrow 3 \cdot 16 + 13 = 61 \rightarrow$
 $\rightarrow 3 \cdot 61 + 13 = 196 \rightarrow \sqrt{196} = 14 \rightarrow 3 \cdot 14 + 13 = 55.$

б). Не зможе. Квадрати натуральних чисел при діленні на 4

дають лише остачі 0 або 1. Число 55 при такому діленні дає остачу 3. Діючи за першим правилом, ми отримаємо на другому кроці остачу 2, далі – остачу 3, а далі ці остачі будуть чергуватися. Отже, жодного точного квадрата, зокрема і числа 256, отримати не вдасться.

3. 45° . Нехай прямі CO_1 та AO_2 перетинаються в точці K . Відкладемо на цих прямих точки P та Q відповідно так, що $\angle PBA = \angle O_1BA$, $\angle QBC = \angle O_2BC$. Оскільки $\angle BAN = \angle BSN = 60^\circ$, то $\angle BO_1N = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAN = 120^\circ$, $\angle BO_2N = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BSN = 120^\circ$. Отже, навколо чотирикутників O_1BSN та O_2BAN можна описати кола. Тому $\angle O_1SN = \angle O_1BN = \angle PBA$, $\angle O_2AN = \angle O_2BN = \angle QBC$. Враховуючи, що $AN \perp BC$, $SN \perp AB$, звідси отримуємо $\angle BPK = \angle BQK = 90^\circ$. Тому $\angle PKA = \angle PBQ = 45^\circ$.

4. Дана нерівність для додатних a, b, c рівносильна нерівності

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq \frac{a^3}{b+c} + \frac{1}{4}a(b+c) + \frac{b^3}{c+a} + \frac{1}{4}b(c+a) + \frac{c^3}{a+b} + \frac{1}{4}c(a+b).$$

А справедливість останньої випливає з трьох нерівностей вигляду

$$\frac{x^3}{y+z} + \frac{1}{4}x(y+z) \geq 2\sqrt{\frac{x^3}{y+z} \cdot \frac{1}{4}x(y+z)} = x^2, \quad x > 0, y > 0, z > 0.$$

10 клас

1. Див. розв'язання задачі 1, 9 клас.

2. 11 раундів. Додамо до 2010 учасників ще 38 фіктивних програмістів, причому 19 з них розмістимо на початку, а решту 19 – в кінці списку. Після цього занумеруємо всіх їх номерами від 0 до 2047, записавши ці номери у двійковій системі числення таким чином, щоб кожен номер мав 11 цифр, дописуючи при потребі нулі на початку. Тепер в кожному k -му раунді, $k = 1, 2, \dots, 11$, в одну групу будемо включати всіх учасників, у яких на k -му місці стоїть 0, а в другу групу – всіх учасників, у яких на k -му місці стоїть 1. Зрозуміло, що при цьому всі групи будуть рівними і міститимуть по 19 фіктивних учасників. Крім того, кожен номер відрізнятиметься хоч в одному розряді, тому у відповідному цьому розряду раунді гравці з

цими номерами гратимуть в різних групах. Покажемо тепер, що 10 раундів буде недостатньо. Справді в першому раунді 1005 учасників будуть в одній групі. З них не менше 503 попадуть в одну групу у другому раунді, не менше 252 – у третьому, не менше 126 – у четвертому, не менше 63 – у п'ятому, не менше 32 – у шостому, не менше 16 – у сьомому, не менше 8 – у восьмому, не менше 4 – у дев'ятому, і принаймні два – у десятому.

3. Див. розв'язання задачі 4, 9 клас.

4. а). $\angle AMF = \angle CFE - \angle FAI = \left(90^\circ - \frac{1}{2}\angle C\right) - \frac{1}{2}\angle A = \frac{1}{2}\angle B$. Тому

$\angle IMN = \angle IBA$. Аналогічно доводимо, що $\angle INM = \angle IAB$. Точки F та D симетричні відносно прямої AM . Тому $\angle IMD = \angle IMN = \angle IBD$. Отже, навколо чотирикутника $IMBD$ можна описати коло. Тому $\angle IMB = \angle IDB = 90^\circ$. Нехай P – середина AB . Тоді $\angle MPD = 2\angle IAD = \angle A$. Аналогічно доводимо, що $\angle INA = 90^\circ$, $\angle NPA = \angle B$. Отже, точка P є центром кола, описаного навколо чотирикутника $ANMB$, причому $\angle NPM = \alpha = const$. Тому й довжина хорди MN цього кола теж стала.

б). Точки E та D симетричні відносно прямої BN , то $\angle MND = 2\angle MNI = 2\angle IAD = \angle MPD$. Тому точки P, N, M, D лежать на одному колі. Це означає, що кожен раз коло, описане навколо трикутника MND , проходить через середину AB .

11 клас

1. Нехай $A(x_1, ax_1^2)$, $B(x_2, ax_2^2)$. Тоді $P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{ax_1^2 + ax_2^2}{2}\right)$.

Запишемо рівняння дотичних до параболи у точках A та B : $y = 2ax_1x - ax_1^2$, $y = 2ax_2x - ax_2^2$. Розв'язавши систему цих рівнянь, знайдемо точку перетину цих дотичних: $T\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, ax_1x_2\right)$. Серединою

відрезка PT є точка $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{ax_1^2 + ax_2^2 + 2ax_1x_2}{4}\right)$. Звідси $y_M = ax_M^2$,

що й треба було довести.

2. Див. розв'язання задачі 2, 10 клас.

3. Оскільки $(n^3 - 1) : (mn - 1)$, $n > 1$, то отримуємо, що $m \leq n^2$.

$m^3 - 1 = \left((mn)^3 - 1 \right) - m^3(n^3 - 1) : (mn - 1)$, $m > 1$, то також $n \leq m^2$.

Якщо $m < n^2$, то з умови $n^2 - m = \left((n^3 - 1)m - n^2(mn - 1) \right) : (mn - 1)$ отримуємо $n^2 - m \geq mn - 1 > mn - m \Rightarrow n > m$. Якщо при цьому ще й $n < m^2$, то з умови $m^2 - n = \left((m^3 - 1)n - m^2(mn - 1) \right) : (mn - 1)$ будемо мати $m^2 - n \geq mn - 1 > mn - n \Rightarrow m > n$. Таким чином, отримуємо лише $n = m^2$ або $m = n^2$, які й є розв'язками задачі при $m > 1$, $n > 1$.

4. Див. розв'язання задачі 4, 10 клас.

2011 рік

I тур

7 клас

1. Оскільки число N натуральне, а сума чисел, записаних Андрійком, дорівнює

$$\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) N = \frac{29N}{20},$$

то найменшим числом, яке могла записати Олеся, є $N = 20$.

2. Якщо справа були дописані цифри, які утворюють число \overline{ab} , то за умовою задачі $100N + \overline{ab} : N$. Отже, також $\overline{ab} : N$. Оскільки ж цифри a та b різні, то $N \leq 98$. При цьому число $N = 98$ задовольняє умову, якщо справа до нього дописати цифри $a = 9$, $b = 8$.

3. Площа великого квадрата дорівнює $16 + 4 \cdot 96 = 400$. Отже, сторони малого та великого квадратів відповідно дорівнюють 4 та 20. Крім того, якщо a та b – більша та менша сторони прямокутника, то також $a - b = 4$ та $a + b = 20$. Звідси знаходимо $a = 12$, $b = 8$.

4. Не можна. Спочатку сумарна кількість камінців у купках становила $3 + 4 + 5 + \dots + 12 = 75$ і була непарною. На кожному кроці вона змінюється на 6, а отже, не може стати рівною $2011 \cdot 10$.

Можна було також враховувати подільність чисел 75 та 6 на 3.

8 клас

1. Неправильно. Рівність

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{b}{a} + \frac{d}{c} \Leftrightarrow \frac{ad + bc}{bd} = \frac{bc + ad}{ac}$$

означала би, що $bd = ac$, тобто $\frac{b}{a} = \frac{c}{d}$, що суперечить умові задачі.

2. Таких цілих чисел n не існує, оскільки і для парних, і для непарних n ліва та права частини рівності мають різну парність.

3. Якщо $a_i = 5$ при деякому $i = 1, 2, 3, 4, 5$, а відповідне $b_i \neq 5$, то два із записаних добутків діляться на 5, тобто дають остачу 0. Якщо ж $b_i = a_i = 5$, то припустимо, що решта чотири попарні добутки дають при діленні на 5 чотири різні остачі: 1, 2, 3, 4. Тоді їхній добуток при діленні на 5 мав би давати ту ж остачу 4, що й число $24 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$. Але цей добуток дорівнює $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4)^2$ і при діленні на 5 дає остачу 1. Одержане протиріччя і доводить справедливість твердження задачі.

4. Твердження задачі неправильне. Розглянемо, наприклад, прямокутний трикутник ABC з катетами $AB = BC$. Тоді рівність $\angle ANC = \angle ALC$ очевидна, але $\angle ABM = 45^\circ$, а $\angle LAC < 45^\circ$.

5. Не можна. Позначимо послідовно будинки, які знаходяться у вершинах внутрішнього квадрата буквами A, B, C, D . Тоді для проходження з будинку A у будинок C з дотриманням вимог задачі є два можливі рівноправні шляхи – ABC , або ADC . Вибравши для конкретності перший з них, переконуємося, що з будинку C у будинок A можна пройти тільки за маршрутом CDA . Позначимо будинки, які знаходяться у вершинах зовнішнього квадрата і зв'язані доріжками з парами будинків A, B та A, D , через E та F відповідно. Оскільки при цьому з будинку B у будинок A можна пройти лише за маршрутом BEA , а з будинку A у будинок D – лише за маршрутом AFD , то з будинку F у будинок B , пройшовши не більше двох доріжок із визначеними вище напрямками руху, потрапити не вдасться.

9 клас

1. $b > 0$. Оскільки $f_1(0) = f_2(0) = b$, то значення $b \leq 0$ умову не задовольняють. Якщо ж $b > 0$, то $f_1(x) + f_2(x) = 2x^2 + 2b > 0$. Отже, хоч одне з чисел $f_1(x)$ чи $f_2(x)$ додатне.

2. Такими є, наприклад, числа $n = 2k$, $m = n + 3$, де k – довільне натуральне число.

3. Одна. Якщо припустити, що стикових ігор не було взагалі, то різниця очок між першим і восьмим місцем була би не меншою, ніж $4 \cdot 2 = 8$. Але оскільки переможець міг набрати максимум 7 очок, а остання команда – мінімум 0 очок, то принаймні одна стикова гра буде проведена. Можливість лише однієї стикової гри (між третьою і четвертою командами) ілюструє наступна турнірна таблиця:

1 місце	---	1	1	1	1	1	1	1	7
2 місце	0	---	0	1	1	1	1	1	5
3 місце	0	1	---	0	0	1	1	1	4
4 місце	0	0	1	---	1	0	1	1	4
5 місце	0	0	1	0	---	1	1	1	4
6 місце	0	0	0	1	0	---	0	1	2
7 місце	0	0	0	0	0	1	---	1	2
8 місце	0	0	0	0	0	0	0	---	0

4. З умов задачі випливає рівність: $\angle BAT = \angle BCA = \angle BDT$. Тому навколо чотирикутника $BTAD$ можна описати коло. Отже, $\angle DAC = \angle ADT = \angle ABT = \angle ACB = \angle ACD$, тобто $AD = DC$.

5. З очевидної нерівності $(a - b)^4 \geq 0$ випливає рівносильна до неї нерівність $8ab(a^2 + b^2) \leq (a + b)^4$, з якої знаходимо

$$ab(a^2 + b^2) \leq \frac{1}{8}(a + b)^4 \leq \frac{1}{8}(a + b + c)^4 \leq 2.$$

Аналогічно доводимо, що $bc(b^2 + c^2) \leq 2$, $ca(c^2 + a^2) \leq 2$. Отже,

$$ab(a^2 + b^2) + bc(b^2 + c^2) + ca(c^2 + a^2) \leq 6 < 8.$$

10 клас

1. Може. Для цього їй достатньо у вершинах однієї основи призми записати числа 1, 2, 3, а у відповідних вершинах іншої основи записати числа 5, 6, 4.

2. а) Обов'язково. Без обмеження загальності можна вважати, що $x_1 < x_2 < x_3$. Оскільки при цьому вітки параболи

$$f(x) = (x - x_2)(x - x_3) + (x - x_3)(x - x_1) + (x - x_1)(x - x_2)$$

направлені вгору, а $f(x_2) = (x_2 - x_3)(x_2 - x_1) < 0$, то така функція має два нулі.

б) Не обов'язково. Наприклад, для функцій $f_1(x) = x^2 - x$, $f_2(x) = -x^2 + 1$, $f_3(x) = x^2 + x$ маємо нулі $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, але функція $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) = x^2 + 1$ нулів не має.

3. З допомогою лінійки спочатку знайдемо точку T перетину прямих AB та CD і точку O перетину діагоналей AC та BD . Тоді пряма TO перетне основу AD у точці E , яка є серединою цієї основи. Отже, чотирикутники $ABCE$ та $BCDE$ є паралелограмами. Точки M та N відповідно перетину діагоналей їх діагоналей лежать на середній лінії трапеції. Нехай K – точка перетину прямої MN зі стороною CD , а F – точка перетину прямих BK та AD . Оскільки $\square BCK = \square FDK$, то трикутник ABF – шуканий.

4. Якщо $a_i = 11$ для деякого $i = 1, 2, \dots, 11$, а відповідне $b_i \neq 11$, то два із записаних добутків діляться на 11, тобто дають остачу 0. Якщо ж $b_i = a_i = 11$, то припустимо, що решта 10 попарних добутків дають при діленні на 11 десять різних остач: 1, 2, ..., 10. Тоді їхній добуток при діленні на 11 мав би давати ту ж остачу 10, що й число $10! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 10$. Але цей добуток дорівнює $(10!)^2$ і при діленні на 11 дає остачу 1. Одержана суперечність і доводить справедливність твердження задачі.

5. Див. розв'язання задачі 5, 9 клас.

Зауважимо, що значення 6 набуватись не буде, бо для цього необхідне одночасне виконання таких чотирьох умов:

- 1) $a = b, c = 0$; 2) $b = c, a = 0$; 3) $c = a, b = 0$; 4) $a + b + c = 2$.

II клас

1. Записавши рівняння у вигляді $2x = [x^2] + 1$, отримаємо, що $x = n$ або $x = n + 0,5$, де n – деяке ціле число. У першому випадку маємо $2n = n^2 + 1$. Отже, $n = 1, x = 1$. А у другому випадку відповідно отримуємо $2n + 1 = [n^2 + n + 0,25] + 1 \Leftrightarrow 2n + 1 = n^2 + n + 1 \Leftrightarrow n^2 - n = 0$. Звідси знаходимо $n = 0, x = 0,5$ та $n = 1, x = 1,5$.

2. $a = 1006^2, b = 1005^2$. Оскільки $a - b = 2011$, а число 2011 – просте, то $\text{НСД}(a, b)$ є або 1, або 2011. У першому випадку добуток ab буде квадратом натурального числа лише тоді, коли кожне з чисел a, b є точним квадратом: $a = c^2, b = d^2$. З умови $c^2 - d^2 = 2011$ отримуємо $c - d = 1, c + d = 2011$. Отже, $c = 1006, d = 1005$. Відповідно $a = 1006^2, b = 1005^2$. У другому випадку будемо мати $a = 2011m, b = 2011n$, де $m, n \in \mathbb{N}$, причому $m - n = 1$. Оскільки ж за умовою задачі $ab = 2011^2 mn$ – точний квадрат, а числа m, n – взаємно прості, то кожне з них має бути точним квадратом: $m = c^2, n = d^2$. При цьому $c^2 - d^2 = 1$, тобто $(c - d)(c + d) = 1$, що для чисел $c, d \in \mathbb{N}$ неможливо.

3. Не можна. Спочатку сумарна кількість камінців у всіх купках становила $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{2011} = 2^{2012} - 1$ і при діленні на 9 давала остачу 3. На кожному кроці вона змінюється на 9. Тому стати рівною числу $2012 \cdot 3^{1005}$, яке ділиться на 9, вона не зможе.

4. Позначимо центри кіл відповідно через O_1 та O_2 і розглянемо гомотетію кола γ_1 відносно точки K з коефіцієнтом $k = -\frac{KO_2}{KO_1}$. Вона

коло γ_1 переведе у коло γ_2 , а дотичні AB та AD до γ_1 перейдуть відповідно у дотичні CD та CB до γ_2 . При цьому точка A перетину першої пари дотичних перейде у точку C перетину другої пари дотичних. Отже, точка K лежить на діагоналі AC .

5. $f(x) = 0$ та $f(x) = \frac{1}{2}$. Покладаючи $x = y$, отримаємо

$$f(2x) = f(0)f(2x) + f(0)f(-2x), \quad x \in R.$$

Якщо тут $x = 0$, то $f(0) = 2f^2(0)$, звідки $f(0) = 0$ або $f(0) = \frac{1}{2}$.

У першому випадку зразу маємо $f(2x) = 0$, $x \in R$, тобто $f(x) \equiv 0$.

А у другому випадку отримуємо

$$f(2x) = \frac{1}{2}f(2x) + \frac{1}{2}f(-2x) \Leftrightarrow f(2x) = f(-2x), \quad x \in R,$$

тобто функція $f(x)$ – парна. Тому, підставляючи $x = 0$ у початкове

рівняння, будемо мати $\frac{1}{2} = 2f^2(y)$, $y \in R$. Звідси, з врахуванням

другої умови задачі, знаходимо $f(x) \equiv \frac{1}{2}$. Перевірка показує, що

обидві знайдені функції задовольняють умови задачі.

II тур

7 клас

1. Таким є число 9758642031. Зрозуміло, що шукане число має бути десятицифровим, причому для його запису послідовно зліва направо слід використовувати найбільшу із можливих цифр, яка на момент її записування не суперечить умові задачі.

2. Наприклад,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{17}{3} + \frac{13}{2} + \frac{11}{6} \right) + \frac{20}{10} + \frac{19}{1} + \frac{18}{9} + \frac{16}{8} + \frac{15}{5} + \frac{14}{7} + \frac{12}{4} = \\ & = 14 + 2 + 19 + 2 + 2 + 3 + 2 + 3 = 47. \end{aligned}$$

3. Існує. Таким, наприклад, є чотирикутник $ABCD$, у якому $AB = BC = 2CD = 2DA$, $\angle ADC = 90^\circ$. Розрізавши його по діагоналі AC , отримаємо два рівнобедрені трикутники, з яких один, а саме трикутник ACD , є прямокутним. Отже, його можна розрізати на два рівні рівнобедрені прямокутні трикутники. Вибравши один з них, знову розріжемо його на два рівнобедрені прямокутні трикутники, і так далі. При цьому кожного разу на один рівнобедрений трикутник

стає більше. Тому у такий спосіб чотирикутник $ABCD$ можна розрізати на будь-яке число $n \geq 2$ рівнобедрених трикутників, зокрема, і на 2011.

4. Переможе перший гравець. Перші три ходи він робить фішкою ввєрх. Після них у лівій або у правій половині дошки суперником буде доставлено не більше однієї білої фішки. Наступні три ходи перший гравець робить саме у цьому напрямі, після яких у нього появляються зразу дві можливості досягти наступним ходом зовнішньої межі квадрату. Перекрити одночасно обидві його суперник своїм шостим ходом не зможе, бо для цього йому потрібно у вказаній половині дошки доставити не менше 5 фішок, але принаймні дві білі фішки із шести були доставлені ним раніше в іншій половині дошки.

5. Нехай сума цифр числа N дорівнює n . Тоді $N = n + n^3 < 100$. Отже, $n \leq 4$. Тепер нескладно переконатися, що із чисел $N = 1 + 1^3 = 2$, $N = 2 + 2^3 = 10$, $N = 3 + 3^3 = 30$, $N = 4 + 4^3 = 68$ умову задачі задовольняє лише $N = 30$.

8 клас

1. Таким є число 9758641302. Міркуючи аналогічно, як і при розв'язуванні задачі 1 за сьомий клас, запишемо перші 6 цифр шуканого числа: 975864. Якщо тепер записати цифру 2, то за нею може йти лише 0, і отримане число не буде парним. Тому сьомою цифрою може бути лише 1, а останні три цифри вже визначаються однозначно.

2. З рівності $\frac{1}{n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{(n-1)n}$, $n \geq 2$, отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{2011} &= \frac{1}{2010} - \frac{1}{2010 \cdot 2011} = \left(\frac{1}{2009} - \frac{1}{2009 \cdot 2010} \right) - \\ &- \left(\frac{1}{2010 \cdot 2011 - 1} - \frac{1}{(2010 \cdot 2011 - 1)2010 \cdot 2011} \right) = \\ &= \left(\frac{1}{c+1} - \frac{1}{a+1} \right) - \left(\frac{1}{b+1} - \frac{1}{d+1} \right) = \left(1 - \frac{1}{a+1} \right) + \left(1 - \frac{1}{b+1} \right) - \end{aligned}$$

$$-\left(1 - \frac{1}{c+1}\right) - \left(1 - \frac{1}{d+1}\right) = \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} - \frac{c}{c+1} - \frac{d}{d+1}.$$

3. Діагоналі прямокутника $MNCD$ є діаметрами описаного навколо нього кола. $\angle NXD = 90^\circ$, то точка X лежить на цьому колі. Тоді і кут MXC , який спирається на діаметр MC , також є прямим.

4. Переможе перший гравець. Перші чотири ходи він робить фішкою ввверх. Після них у лівій або у правій половині дошки суперником буде доставлено не більше двох білих фішок. Наступні чотири ходи перший гравець робить саме у цьому напрямі, після яких у нього появляються зразу дві можливості досягти наступним ходом зовнішньої межі квадрату. Якщо суперник встигає після восьмого ходу перекрити обидва ці виходи, то перший гравець наступні вісім ходів пересуває чорну фішку вниз, заставляючи суперника весь час робити вимушені ходи. Але після восьмого такого ходу вниз перекрити одночасно обидві нові можливості досягти наступним ходом зовнішньої межі квадрату його суперник своїм шістнадцятим ходом уже не зможе, бо для цього йому потрібно у вказаній половині дошки доставити не менше 15 фішок, але принаймні дві білі фішки із шістнадцяти були доставлені ним раніше в іншій половині дошки.

5. Запишемо задану рівність у вигляді $y^k = x(x+1)$. Очевидно, що її задовольняють пари чисел: $(0;0)$ та $(-1;0)$. Для інших цілих x числа x та $x+1$ – взаємно прості, а їх добуток додатний. Тому задана рівність можлива лише за умови, що $x = m^k$, $x+1 = n^k$, $m, n \in \mathbb{N}$. Тоді

$$1 = (x+1) - x = m^k - n^k = (m-n)(m^{k-1} + m^{k-2}n + \dots + mn^{k-2} + n^{k-1}).$$

Але це неможливо, бо $m-n \geq 1$, а вираз в останніх дужках для $k > 1$ не менший, ніж 2.

9 клас

1. Нехай сума цифр трицифрового числа N дорівнює n . Тоді $100 \leq N = n + n^3 < 1000$. Отже, $5 \leq n \leq 9$. Але з чисел $N = 5 + 5^3 = 130$, $N = 6 + 6^3 = 222$, $N = 7 + 7^3 = 350$, $N = 8 + 8^3 = 520$, $N = 9 + 9^3 = 738$ умову задачі задовольняє лише $N = 222$.

2. Нехай 5 років тому у родині було m синів та n доньок. Якщо $m > n$, то навіть народження ще однієї доньки не приведе до зменшення різниці між сумарним віком синів та сумарним віком доньок. Якщо $m = n$, то така різниця може зменшитися на 4 лише при умові, що 4 роки тому народилася дочка. У такому разі 2 роки тому сумарний вік синів дорівнював сумарному віку доньок. Якщо $m = n - 1$, то вказана різниця зменшиться рівно на 4 лише за умови, що рік тому народився син. У такому випадку 2 роки тому сумарний вік доньок був на 1 рік більший, ніж сумарний вік синів. І, нарешті, якщо $m < n - 1$, то навіть при народженні сина така різниця зменшиться принаймні на 6, що не задовольняє умову задачі.

3. Розфарбуємо вузли наявної сітки у шаховому порядку. Тоді всі вершини побудованої ламаної лежатимуть лише у вузлах якогось одного з кольорів, а сама ламана обмежуватиме фігуру, складену з квадратиків зі стороною $\sqrt{2}$ і площею 2. Зрозуміло, що таких квадратиків буде рівно 4. Якщо при цьому намальована фігура є квадратом зі стороною $2\sqrt{2}$, то всередині неї знаходиться 5 вузлів початкової сітки. У решті з чотирьох принципово можливих формах фігури, складеної з таких квадратиків, матимемо всередині лише 4 вузли – центри цих квадратиків.

4. Оскільки точка дотику двох кіл є центром гомотетії, яка одне з цих кіл переводить в інше, то $C = A_1B_2 \cap A_2B_1$. При цьому $A_1B_2 \perp A_2B_1$, бо кут A_1CA_2 спирається на діаметр. Отже, MN – діаметр кола з центром O . Нехай $D = B_1B_2 \cap MN$. Тоді послідовно отримуємо $\angle DB_2C = \angle A_2A_1C = \angle A_2CO = \angle CNO = \angle CND$. Отже, навколо $NCDB_2$ можна описати коло. Тому $\angle B_2DN = \angle B_2CN = 90^\circ$, отже, $MN \perp B_1B_2$.

5. Запишемо задану рівність у вигляді $y^k = x(x+1)$. Очевидно, що її задовольняють пари чисел: $(0;0)$ та $(-1;0)$. Для інших цілих x числа x та $x+1$ – взаємно прості, а їх добуток додатний. Тому задана рівність можлива лише за умови, що $x = m^k$, $x+1 = n^k$, $m, n \in \mathbb{N}$. Тоді

$$1 = (x+1) - x = m^k - n^k = (m-n)(m^{k-1} + m^{k-2}n + \dots + mn^{k-2} + n^{k-1}).$$

Але це неможливо, бо $m - n \geq 1$, а вираз в останніх дужках для $k > 1$ не менший, ніж 2.

10 клас

1. Позначимо перше з цих чисел через a_1 , а останнє – через a_n . Тоді за формулою суми членів арифметичної прогресії отримаємо:

$$\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = 2011 \Leftrightarrow (a_1 + a_n)n = 2 \cdot 2011.$$

Оскільки $a_1 + a_n > 2$, а числа 2 та 2011 – прості, то можливий лише один варіант: $n = 2$, $a_1 + a_n = 2011$. Звідси знаходимо єдиний розв'язок: $a_1 = 1005$, $a_2 = 1006$.

2. Для $n = 1$, $n = 2$ маємо $a_1 = 1!$, $a_2 = 2!$. Припустимо, що також $a_n = n!$, $a_{n+1} = (n+1)!$. Звідси безпосередньо отримуємо, що

$$a_{n+2} = (n+1)(n! + (n+1)!) = (n+1)n!(1 + (n+1)) = (n+2)!$$

Отже, $a_n = n!$ при всіх натуральних n . Зокрема, $a_{2011} = 2011!$. Тому дане число закінчується на таку кількість нулів:

$$\begin{aligned} \left[\frac{2011}{5} \right] + \left[\frac{2011}{5^2} \right] + \left[\frac{2011}{5^3} \right] + \left[\frac{2011}{5^4} \right] + \left[\frac{2011}{5^5} \right] + \dots = \\ = 402 + 80 + 16 + 3 + 0 + \dots = 501. \end{aligned}$$

3. За 17. Оскільки $1 + 2 + 4 + \dots + 1024 > 2011$, то за один хід Петрик зможе забрати не більше 512 цукерок. При цьому одну і ту ж кількість цукерок він повинен брати не більше двох разів, бо, взявши замість двічі підряд по 2^n цукерок один раз 2^{n+1} , він зменшить кількість ходів на 1. Крім того, хоч один раз потрібно буде взяти 512 цукерок, бо інакше їх буде забрано не більше $2(1 + 2 + \dots + 256) = 1022$. Взявши 1, 2, 4, ..., 512 цукерок по разові, Петрик забере зі столу 1023 цукерки. Тому решту 988 цукерок він повинен забирати, повторюючи деякі з уже зроблених ним ходів. З єдиності запису числа 988 у двійковій системі числення: $988 = 512 + 256 + 128 + 64 + 16 + 8 + 4$ отримуємо мінімальну кількість ходів при такій послідовності дій Петрика: 1, 2, 4, 4, 8, 8, 16, 16, 32, 64, 64, 128, 128, 256, 256, 512, 512.

4. Див. розв'язання задачі 4, 9 клас.

5. Нехай $\text{НСД}(m, n) = d$. Тоді $m = ad, n = bd$, причому $\text{НСД}(a, b) = 1$. Оскільки, крім того, $\text{НСК}(m, n) = abd^2$, то задана рівність набуває вигляду: $ad + bd = abd^2 + d \Leftrightarrow d(a-1)(b-1) = 0$. Звідси маємо $a = 1$ або $b = 1$, що рівносильне твердженню задачі.

11 клас

1. Оскільки $n^3 + n^2 + 330n + 330 = (n+1)(n^2 + 330)$, то для подільності на просте число 2011 потрібно, щоб хоч один множник, $n+1$ чи $n^2 + 330$, ділився на 2011. Значення 2011 вони набувають для $n = 2010$ та $n = 41$ відповідно. Менше з них $n = 41$ – шукане.

2. З нерівності між середнім арифметичним і середнім геометричним випливають такі три нерівності:

$$a + a^2 + b \geq 3a\sqrt[3]{b}, \quad b + b^2 + c \geq 3b\sqrt[3]{c}, \quad c + c^2 + a \geq 3c\sqrt[3]{a}.$$

Додавши їх, додамо до обох частин отриманої нерівності число 3. Тоді, відповідно згрупувавши доданки, приходимо до нерівності, яку треба було довести.

3. Див. розв'язання задачі 3, 10 клас.

4. Нехай кола з діаметрами B_1B_2 та C_1C_2 перетинаються у точці A , з діаметрами A_1A_2 та C_1C_2 – у точці B , а з діаметрами A_1A_2 та B_1B_2 – у точці C . Оскільки точка дотику двох кіл є центром гомотетії, яка переводить одне коло в інше, то $A = B_1C_2 \cap B_2C_1$, $B = A_1C_2 \cap A_2C_1$, $C = A_1B_2 \cap A_2B_1$. Позначимо тепер $D = A_1B_2 \cap C_1A_2$. Тоді $\angle BDC = \pi - \angle BC_1A - \angle CB_2A = \pi - \angle BAE - \angle CAE = \pi - \angle BAC$, де E – точка на спільній дотичній до кіл з діаметрами B_1B_2 та C_1C_2 , відмінна від точки A . Отже, точка D лежить на колі, описаному навколо трикутника ABC . Аналогічно доводимо, що на цьому ж колі лежить і точка перетину прямих A_1B_2 та B_1C_2 . А оскільки пряма A_1B_2 перетинає це коло, крім точки C , лише у точці D , то саме у цій точці перетинаються всі три прямі: A_1B_2 , B_1C_2 , C_1A_2 .

5. Див. розв'язання задачі 5, 10 клас.

2012 рік

I тур

7 клас

1. Оскільки $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 18 \cdot 19}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 16 \cdot 18)^2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{9}{8} \cdot \dots \cdot \frac{17}{16} \cdot \frac{19}{18} > 1$, то

перше число більше.

2. Якщо точки A, B, C, D розташовані на прямій послідовно, то $AD = 18$ см. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що тоді $AB = 6$ см, $BD = 12$ см. Але, незалежно від розташування точки C , її відстані до трьох інших точок дорівнювати 1, 2 та 3 см не можуть.

3. Зауважимо, що крайній зліва лицар не може стояти у шерензі лівіше від крайнього справа брехуна, бо у такому разі з умови задачі отримуємо суперечність – або збрехав крайній зліва лицар, або сказав правду крайній справа брехун. Таким чином, у шерензі зліва підряд стоять всі брехуни, справа підряд – всі лицарі. Умову задачі задовольняє лише ситуація, коли тих та інших по 1006.

4. Забезпечити собі виграш може гравець, який розпочинає гру, взявши першим ходом чотири камінці, а всіма наступними – по одному. Таким чином, парна кількість взятих загалом камінців буде лише після ходів першого, а перемагає гравець, після ходу якого ця величина буде дорівнювати 2012.

8 клас

1. а) Може, якщо 3 прямі мають між собою 3 точки перетину та 3 паралельні прямі, кожна з яких перетинає кожную з трьох початкових.

б) Не може. Перша пряма має не більше 5 точок перетину, друга додатково – не більше 4 точок, і т.д. Всього маємо не більше ніж $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ різних точок перетину.

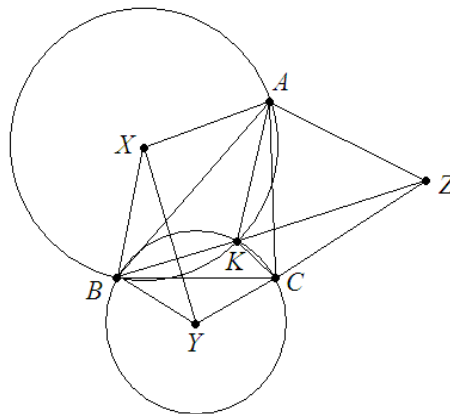
2. Останньою цифрою є 0, оскільки вказаний добуток ділиться на 10. Також $34!$ ділиться на 9, тому на 9 має ділитися сума всіх записаних цифр. Звідси випливає, що іншою заміненою цифрою є 6.

3. Оскільки

$$A + B = \overline{abcabc} + \overline{d00d} = 1001(\overline{abc} + d) \leq 1001(999 + 9) = 1001 \cdot 1008,$$

а число $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ не має кратних дільників, то для виконання умови задачі необхідно і достатньо, щоб $\overline{abc} + d = 1001$. Звідси випливає, що $a = 9, b = 9, c = 11 - d, d \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

4. Відкладемо (див. рисунок справа) на відрізку BZ точку K таку, що $\angle AKZ = \angle ACZ = 60^\circ$. Тоді навколо чотирикутника $AKCZ$ можна описати коло і $\angle CKZ = \angle CAZ = 60^\circ$. Отже, $\angle AKB = \angle CKB = 120^\circ$. Оскільки також $\angle AXB = \angle BYC = 120^\circ, XA = XB, YB = YC$, то й кола з центрами у точках X та Y , які проходять через точку B , перетнуться у точці K . Лінія центрів цих кіл перпендикулярна до їх спільної хорди, тому $XY \perp BK$, а отже, й $XY \perp BZ$.



5. Усіх можливих розташувань чисел є 2^{10} . Розіб'ємо їх на пари так, щоб у кожній парі числа на п'яти перших картках відрізнялися, а на п'яти інших – співпадали. Виграшна стратегія першого гравця полягає у тому, що він завжди перевертає лише перші п'ять карток. Після кожного ходу він створює розташування чисел, яке перебуває у парі з розташуванням чисел перед цим ходом і раніше не зустрічалося. Кожний наступний хід другого гравця буде створювати розташування чисел, яке не зустрічалося раніше (інакше він програє) і входить до нової пари розташувань, а тоді перший гравець знову створює розташування чисел, яке також не зустрічалося раніше і є другою компонентою цієї пари. Кількість усіх можливих розташувань чисел є скінченною, то в деякий момент другий гравець вже не зможе створити розташування цих чисел, яке раніше не зустрічалося.

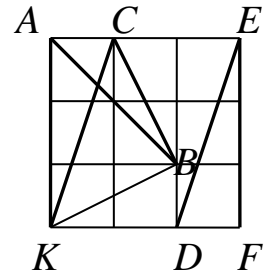
9 клас

1. а) Може. Досить взяти 4 кола, кожен два з яких перетинаються в двох точках, а п'яте коло таке, що не перетинається з іншими.

б) Не може. Перше коло має не більше 8 точок перетину, друге додатково – не більше 6 точок, і т.д. Всього маємо не більше ніж $8 + 6 + 4 + 2 = 20$ різних точок перетину.

2. Лінія, симетрична до параболи $y = x^2$ з вершиною у точці $(0;0)$ відносно точки $(1;1)$, також є параболою з вершиною $(2;2)$, вітки якої напрямлені вниз. Тому $f(x) = -(x-2)^2 + 2$. Тоді з рівняння $-(x-2)^2 + 2 = x^2$ знаходимо єдиний розв'язок $x = 1$.

3. Оскільки $\angle CBK = \angle CAK = 90^\circ$, (див. малюнок справа) то навколо $ACBK$ можна описати коло. Тому $\angle ABC = \angle AKC = \angle DEF$.



Рівність заданих кутів можна отримати також з теореми синусів для трикутників ABC та DEF , або обчисливши косинуси цих кутів за теоремою косинусів, чи знайшовши їх тангенси

4. Справедливість твердження задачі випливає з рівності

$$5^{2n+1} + 2^{n+4} + 2^{n+1} = 5 \cdot 5^{2n} + 16 \cdot 2^n + 2 \cdot 2^n = 5(25^n - 2^n) + 23 \cdot 2^n =$$

$$= 5 \cdot (25 - 2) \cdot (25^{n-1} + 25^{n-2} \cdot 2 + \dots + 25 \cdot 2^{n-2} + 2^{n-1}) + 23 \cdot 2^n.$$

5. Див. розв'язання задачі 5, 8 клас.

10 клас

1. Оскільки $34!$ ділиться на 10^7 , то другою заміненою цифрою є 0. Також $34!$ ділиться на 9, тому на 9 має ділитися сума всіх записаних цифр. Отже, іншою заміненою цифрою є 6.

2. Лінія, симетрична до параболи $y = x^2$ з вершиною у точці $(0;0)$ відносно точки $(1;1)$, також є параболою з вершиною $(2;2)$, вітки якої напрямлені вниз. Тому $f(x) = -(x-2)^2 + 2 = -x^2 + 4x - 2$. Проводячи у рівнянні $f(f(x)) = f(x)$ заміну $f(x) = t$, отримуємо рівняння $-t^2 + 4t - 2 = t$, з якого маємо $t_1 = 1, t_2 = 2$. Тоді з рівнянь $-x^2 + 4x - 2 = 1$ та $-x^2 + 4x - 2 = 2$ знаходимо $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$.

3. Нехай $x = a + 2, y = b + 2, z = c + 2$, де a, b, c – додатні числа. Тоді за нерівністю Коші, отримуємо

$$A = \frac{(a+2)^4}{bc} + \frac{(b+2)^4}{ca} + \frac{(c+2)^4}{ab} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{(a+2)^4}{bc} \cdot \frac{(b+2)^4}{ca} \cdot \frac{(c+2)^4}{ab}} \geq$$

$$\geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{(2\sqrt{2a})^4}{bc} \cdot \frac{(2\sqrt{2b})^4}{ca} \cdot \frac{(2\sqrt{2c})^4}{ab}} = 192,$$

причому рівності досягаються для $a = b = c = 2$, тобто $x = y = z = 4$.

Тому 192 є найменшим значенням заданого виразу.

Також можна було скористатися нерівністю

$$A = 16 \cdot \left(\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{y-2} \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{z-2} + \frac{\left(\frac{y}{2}\right)^2}{z-2} \cdot \frac{\left(\frac{y}{2}\right)^2}{x-2} + \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{x-2} \cdot \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{y-2} \right) \geq$$

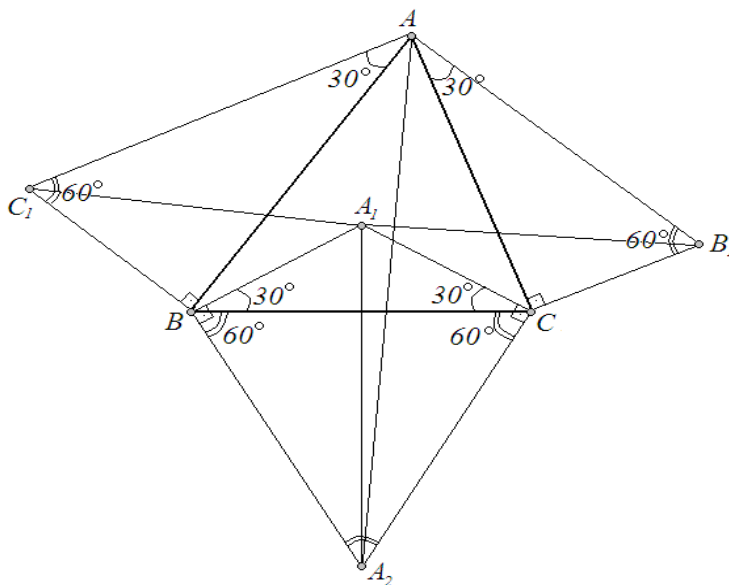
$$\geq 16 \cdot \left(\left(2 \cdot \frac{x}{2} - y + 2\right) \left(2 \cdot \frac{x}{2} - z + 2\right) + \left(2 \cdot \frac{y}{2} - z + 2\right) \left(2 \cdot \frac{y}{2} - x + 2\right) + \right.$$

$$\left. + \left(2 \cdot \frac{z}{2} - x + 2\right) \left(2 \cdot \frac{z}{2} - y + 2\right) \right) = 8 \cdot \left((x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \right) + 192,$$

у якій рівність досягається для $x = y = z = 4$.

4. Умови задачі суперечливі. Оскільки довжина кожного стрибка не перевищує $n-1$, то вказана сума довжин стрибків за виключенням останнього не може перевищувати $(n-1)(2n-1)$.

5. Побудуємо на стороні BC даного трикутника зовні його рівносторонній трикутник B_1CA_2 (див. малюнок нижче).



З рівності трикутників A_1BA_2 та A_1CA_2 (за трьома сторонами)

впливає, що $\angle A_2A_1B = \angle A_2A_1C = 60^\circ$. З прямокутних трикутників ABC_1 та A_2BA_1 маємо $\frac{BA}{BC_1} = \frac{BA_2}{BA_1} = \operatorname{tg} 60^\circ$. Оскільки, крім того, $\angle ABA_2 = \angle C_1BA_1$, то трикутники C_1BA_1 та ABA_2 подібні (за пропорційними сторонами і кутом між ними). Отже, $\angle C_1A_1B = \angle AA_2B$. Аналогічно доводиться, що $\angle B_1A_1C = \angle AA_2C$. Тоді $\angle C_1A_1B_1 = \angle BA_1C + (\angle C_1A_1B + \angle CA_1B_1) = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$, тобто точки A_1, B_1, C_1 лежать на одній прямій.

11 клас

1. Див. розв'язання задачі 1, 10 клас.

2. Нехай числа $a > b > 1$ такі, що $f(a) = g(b)$. Оскільки

$$\begin{aligned} a^4 &= b^4 + b^2 + b + 1 \Leftrightarrow a^4 - b^4 = b^2 + b + 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a - b &= \frac{b^2 + b + 1}{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3} < \frac{3b^2}{4b^3} = \frac{3}{4b}, \end{aligned}$$

то відстань між точками $A(a, f(a))$ та $B(b, g(b))$ менша за $\frac{1}{100}$, наприклад, для всіх $b \geq 75$.

3. Див. розв'язання задачі 5, 10 клас.

4. Безпосередньою перевіркою переконуємося, що прості числа $p = 2, p = 5, p = 7$ не задовольняють умову задачі, а $p = 3$ задовольняє умову, оскільки $3^5 - 3 = 240 = 2 \cdot 5!$

Для простих чисел $p > 7$ зауважимо, що з умови задачі випливає подільність $n!$ на p . Тому $n \geq p$, отже, отримуємо

$$\begin{aligned} 2n! &\geq 2p! = 2p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 > \\ &> p(p-1) \cdot (3(p-4))^3 > p(p-1) \cdot (p+1)^3 > \\ &> p(p-1) \cdot (p+1)(p^2+1) = p^5 - p. \end{aligned}$$

Таким чином, $p = 3$ – єдине шукане число.

5. Очевидно, що отримані у результаті розрізань шматки є опуклими многокутниками. При одному розрізанні загальна кількість вершин збільшується щонайбільше на 4. Тому після 100

розрізань багатокутники матимуть не більше 404 вершин. З іншого боку, після 100 розрізань утворився 101 багатокутник. Нехай серед них n трикутників та m чотирикутників, а решта – не менше, як п'ятикутники. Тоді утворені багатокутники мають не менше за $3n + 4m + 5(101 - n - m) = 505 - 2n - m$ вершин. Отже, з нерівності $505 - 2n - m \leq 404$ отримуємо $2n + m \geq 101 > 100$.

II тур

7 клас

1. Оскільки олівець та ручка коштують більше, ніж зошит, то два олівці і ручка дорожчі, ніж олівець і зошит, а отже, внаслідок другого твердження, дорожчі, ніж три ручки. Звідси отримуємо, що олівець дорожчий за ручку.

2. Навмання вибираємо монету A . Порівнюємо її з кожною іншою. Якщо кількість рівних їй за вагою монет відмінна від 4, монета A є фальшивою. Якщо ця кількість дорівнює 4, то відкладаємо виявлені 5 рівних за вагою монет, і беремо монету B серед інших. Порівнюємо B з усіма іншими залишеними. Якщо ця кількість не дорівнює 4, то B фальшива. Якщо ж вона дорівнює 4, то відкладаємо B і рівні їй за вагою монети. Остання монета, що залишилася, точно є фальшивою.

3. Оскільки рядок початкового квадрата містить непарну кількість клітинок, він буде перетинати непарну кількість частин 1×3 та 3×1 . Якщо твердження задачі невірне, то кожен рядок має перетинати непарну кількість частин 4×4 , тобто одну. Таким чином, один квадратик 4×4 буде лежати у перших чотирьох рядках, один – у чотирьох наступних, і ми не зможемо «вмістити» потрібний один квадратик у три нижні рядки.

4. Нехай $n = \overline{a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k}$, де $a_1 \neq 0, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k$ – цифри десяткової системи числення. Помічаємо, що $121n$ є сумою одного числа $100n$, двох чисел $10n$ і одного числа n . Якщо додавати ці числа порозрядно в стовпчик:

$$\begin{array}{r}
\overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_{k-1} a_k \quad 0 \quad 0} \\
+ \quad \overline{a_1 a_2 \dots a_{k-2} a_{k-1} a_k \quad 0} \\
\quad \quad \overline{a_1 a_2 \dots a_{k-2} a_{k-1} a_k \quad 0} \\
\hline
a_1 \dots a_{k-3} a_{k-2} a_{k-1} a_k
\end{array}$$

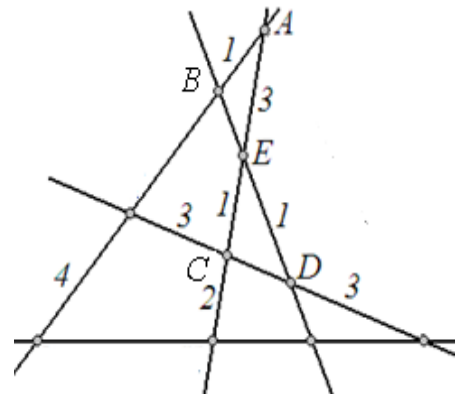
і при цьому не буде перенесень у наступні розряди, то кожна цифра числа n додається 4 рази, і сума цифр числа $121n$ дорівнюватиме $4S(n) = 4 \cdot 503 = 2012$. А при наявності хоча б одного перенесення сума цифр числа $121n$, очевидно, зменшиться (бо тоді із одного розряду суми віднімається 10, 20 або 30, а до наступного додається відповідно тільки 1, 2 або 3), тобто у цьому випадку $S(121n) < 4S(n) = 2012$. Оскільки за умовою задачі $S(121n) = 2012$, то це означає, що перенесень не було, а отже, усі цифри числа n не перевищують 4. Звідси, додаючи $10n + n$ у стовпчик без перенесень, отримуємо, що $11n = \overline{a_1 a_2 \dots a_k 0} + \overline{a_1 a_2 \dots a_k} = \overline{a_1 (a_2 + a_1) \dots (a_k + a_{k-1}) a_k}$. Тому $S(11n) = a_1 + (a_2 + a_1) + \dots + (a_k + a_{k-1}) + a_k = 2S(n) = 1006$.

8 клас

1. Оскільки сума двох послідовних кількостей хвилин непарна, то парності першого, третього, п'ятого і т.д. записаних чисел чергуються. Серед парних чисел цієї послідовності лише перше може дорівнювати 2 (отримане як $2+0$ або $1+1$). Наступні парні числа більші за 2, тому вони складені.

2. Див. розв'язання задачі 3, 7 клас.

3. Довжини всіх отриманих відрізків є натуральними числами, а суми довжин двох сторін трикутника більші за довжину третьої сторони. Тому з трикутників CDE та ABE (див. рисунок справа) знаходимо $CD = 1$, $BE = 3$. Тоді CDE –



рівносторонній трикутник, $\angle CED = 60^\circ$, $\angle BEA = 60^\circ$. Звідси і з рівності $BE = AE$ випливає, що всі кути трикутника ABE по 60° . Це суперечить умові $AB \neq AE$.

4. Доведемо, що виграє перший гравець. Його виграшна стратегія може бути такою: спочатку він віднімає x^2 , а далі повторює ходи другого. У результаті після ходів першого гравця завжди будуть з'являтися квадратні тричлени, вільний член яких є непарним, а коефіцієнти при x^2 та x мають однакову парність. У цілих точках вони набуватимуть лише непарних значень, тому не матимуть цілих коренів. Отже, діючи так, перший гравець не програє. Зауважимо тепер, що з кожним ходом сума коефіцієнтів одержаного многочлена зменшується на 1. Отже, через декілька ходів ця сума стане рівною 0, а одержаний многочлен з такою сумою коефіцієнтів матиме корінь $x=1$. Це означає, що не пізніше цього ходу гра закінчиться перемогою першого гравця.

9 клас

1. Оскільки маємо $g(x) = 2x + 1 \geq 2 \cdot 1 + 1 = 3$ для $x \geq 1$ та $g(x) = -x + 2 > -1 + 2 = 1$ для $x < 1$, то $g(x) > 1$ для всіх дійсних x .

$$\text{Отже, } f(g(x)) = 2 - g(x) = \begin{cases} 1 - 2x, & x \geq 1, \\ x, & x < 1. \end{cases}$$

2. Нехай біля вершин правильного восьмикутника за рухом годинникової стрілки записані числа: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$.

а). У цьому пункті умова задачі виконується, наприклад, якщо, $a_1 = 1, a_2 = 5, a_3 = 6, a_4 = 2, a_5 = 4, a_6 = 7, a_7 = 3, a_8 = 8$.

б). Припустимо, що потрібне розміщення заданих чисел існує. Числа 2 і 3 не можуть бути записаними на сусідніх вершинах, інакше і зліва, і справа від них повинно бути записаним лише число 8, що неможливо. Між числами 1 і 2 та 1 і 3 знаходиться не менше двох вершин, бо інакше навіть 8 буде недостатньо для отримання потрібних сум. Тому, не порушуючи загальності, можна вважати, що $a_1 = 1, a_4 = 2, a_6 = 3$ (або $a_1 = 1, a_4 = 3, a_6 = 2$). Для обох цих випадків однозначно $a_5 = 8$. Тоді для довільного розміщення числа 4, яке завжди попадатиме в одну трійку з числом 1, третім числом цієї трійки знову має бути тільки 8, що дає суперечність.

3. Див. розв'язання задачі 3, 8 клас.

4. Див. розв'язання задачі 4, 8 клас.

10 клас

1. Зрозуміло, що $x \in [0;1)$. Оскільки для будь-якого дійсного числа a і натурального числа n виконується рівність

$$\begin{aligned} \{n\{a\}\} &= n\{a\} - [n\{a\}] = n(a - [a]) - [n(a - [a])] = \\ &= na - n[a] - [na - n[a]] = na - n[a] - [na] + n[a] = na - [na] = \{na\}, \end{aligned}$$

то вихідне рівняння еквівалентне такому

$$\{3^5 x\} = x \Leftrightarrow 243x - [243x] = x \Leftrightarrow 242x = [243x].$$

Оскільки ж $x \in [0;1)$, то $242x$ буде цілим тоді й тільки тоді, коли

$x = \frac{k}{242}$, $k = 0, 1, 2, \dots, 241$. З іншого боку, якщо x має такий вигляд,

то $[243x] = \left[\frac{243k}{242} \right] = \left[k + \frac{k}{242} \right] = k = 242x$. Тому всі такі x і тільки

вони є розв'язками заданого рівняння.

2. Нехай $n = \overline{a_1 a_2 \dots a_k}$, де $a_1 \neq 0$, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k – цифри десяткової системи числення. Помічаємо, що $2012n$ є сумою двох чисел $1000n$, одного числа $10n$ і двох чисел n . Якщо додавати ці числа порозрядно у стовпчик:

$$\begin{array}{r} \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_{k-1} a_k} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_{k-1} a_k} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ + \quad \overline{a_1 a_2 \dots a_{k-3} a_{k-2} a_{k-1} a_k} \quad 0 \\ \overline{a_1 \dots a_{k-4} a_{k-3} a_{k-2} a_{k-1} a_k} \\ \overline{a_1 \dots a_{k-4} a_{k-3} a_{k-2} a_{k-1} a_k} \end{array}$$

і при цьому не буде перенесень у наступні розряди, то кожна цифра числа n додається 5 разів, і сума цифр числа $2012n$ дорівнюватиме $5S(n) = 5 \cdot 404 = 2020$. При перенесенні однієї одиниці у старший розряд сума цифр зменшується на 9. Оскільки $2011 = 5 \cdot 404 - 9$, то у старший розряд було перенесено одну одиницю. Тому при додаванні

двох чисел $1000n$, одного числа $10n$ і одного числа n (тобто при множенні n на 2011) у старші розряди або було перенесено одну одиницю, або нічого, що дає наступні можливості для значення суми цифр числа $2011n$: $1607 = 4 \cdot 404 - 9$ $1616 = 4 \cdot 404$. Обидва ці значення можуть бути реалізованими. Нехай A – чотириста цифрове число, у записі якого 100 разів підряд записано 4000. Тоді сума цифр кожного з чисел $n_0 = A + 400$, $n_1 = A + 40$ становить 404, сума цифр кожного з чисел $2012n_0$, $2012n_1$ дорівнює 2011, а суми цифр чисел $2011n_0$ та $2011n_1$ дорівнюють відповідно 1616 та 1607.

3. Продовжимо відрізок DK поза точку K до точки M такої, що $KM = KC$. Тоді $\triangle BKM = \triangle BKC$. За теоремою синусів

$$\frac{BC}{KC} = \frac{\sin \angle BKC}{\sin \angle KBC} = \frac{\sin \angle AKD}{\sin \angle KAD} = \frac{AD}{KD}, \quad \text{тому} \quad \frac{KM}{KD} = \frac{KC}{KD} = \frac{BC}{AD} = \frac{BO}{OD},$$

де O – точка перетину діагоналей трапеції $ABCD$. Звідси випливає,

$$\text{що} \quad \frac{KO}{BC} = \frac{KO}{MB} = \frac{OD}{BD} = \frac{AD}{BC + AD}, \quad \text{тобто} \quad KO = \frac{BC \cdot AD}{BC + AD}.$$

Аналогічно доводимо, що й $LO = \frac{BC \cdot AD}{BC + AD}$. Отже, $KO = LO$.

4. Розглянемо перетворення $f : (x, y) \rightarrow \left(\frac{x+1}{y}, x \right)$. П'ять його

послідовних виконань дають такі результати:

$$\begin{aligned} (x, y) &\rightarrow \left(\frac{x+1}{y}, x \right) \rightarrow \left(\frac{x+y+1}{xy}, \frac{x+1}{y} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \left(\frac{y+1}{x}, \frac{x+y+1}{xy} \right) \rightarrow \left(y, \frac{y+1}{x} \right) \rightarrow (x, y). \end{aligned}$$

а). $2012 = 5 \cdot 402 + 2$, то після 2012 операцій Андрійко одержить числа $\frac{a+b+1}{ab} = \frac{20+12+1}{20 \cdot 12} = \frac{33}{240} = \frac{11}{80}$ та $\frac{a+1}{b} = \frac{20+1}{12} = \frac{21}{12} = \frac{7}{4}$.

б). Щоб одержані після першої та четвертої таких операцій пари склалися з натуральних чисел, необхідно і достатньо, щоб $a+1 = kb$, $b+1 = na$, де k, n – натуральні числа. Звідси отримуємо

$(n-1)a + (k-1)b = 2$, що для натуральних чисел a, b, k, n можливо лише у випадках: $n=1, k=2$; $n=1, k=3$; $n=2, k=1$; $n=2, k=2$; $n=3, k=1$. Тоді з двох попередніх рівностей відповідно знаходимо такі пари натуральних чисел (a, b) : $(3, 2)$; $(2, 1)$; $(2, 3)$; $(1, 1)$; $(1, 2)$. З ланцюжка $(1, 1) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (3, 2) \rightarrow (2, 3) \rightarrow (1, 2) \rightarrow (1, 1)$ випливає, що всі знайдені пари чисел справді мають бажану властивість.

11 клас

1. Див. розв'язання задачі 1, 10 клас.

2. Оскільки $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta < 1 = \sin^2 \alpha + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, а $\sin^2 x$

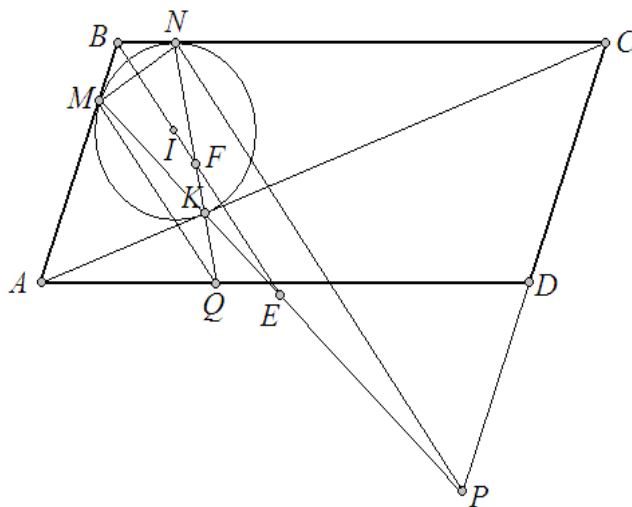
зростає для $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, то $\beta < \frac{\pi}{2} - \alpha$. Отже, отримуємо

$$\begin{aligned} \sin^2(\alpha + \beta) - (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta) &= \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta) - \cos^2(\alpha + \beta) = \\ &= \cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) - \cos^2(\alpha + \beta) = \\ &= \cos(\alpha + \beta)(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) = 2\cos(\alpha + \beta)\sin \alpha \sin \beta > 0, \end{aligned}$$

звідки і випливає потрібна нерівність.

3. Див. розв'язання задачі 2, 10 клас.

4. За властивістю дотичних до кола $AM = AK$, $BM = BN$, $CN = CK$. (див. малюнок нижче).



Отже, $\angle A Q K = \angle C N K = \angle C K N = \angle A K Q$, тому $A Q = A K = A M$.

Нехай I – центр кола, вписаного у трикутник ABC . Оскільки BI – бісектриса кута ABC , то

$$\angle AMQ = \frac{180^\circ - \angle MAQ}{2} = \frac{\angle ABC}{2} = \angle ABI,$$

тобто $MQ \parallel BI$. Аналогічно доводиться, що $NP \parallel BI$. Крім того, BI проходить через середину MN , тому за теоремою Фалеса BI проходить через середини відрізків MP та NQ , що і завершує доведення.

2013 рік

7 клас

1. З умови задачі маємо рівність $1111a + 111b + 11c + d = 2013$. Оскільки $1111 \cdot 2 = 2222 > 2013$, то $a = 1$. Тоді $111b + 11c + d = 902$. Враховуючи, що $11c + d \leq 108 < 111$, послідовно отримуємо $b = 8$, $11c + d = 14$, $c = 1$, $d = 3$. Отже, єдиним таким числом є $\overline{abcd} = 1813$.

2. Відокремимо деяку монету A , а решту монет розіб'ємо на 12 пар. Далі послідовно кладемо кожну пару монет у скриньку. Розглянемо можливі випадки:

1). Скринька один раз показала «2». Отже, обидві фальшиві монети визначені не більше, ніж за 12 операцій.

2). Скринька один раз показала «1», наприклад, у парі монет B і C . Тоді монета A фальшива. Поклавши її у скриньку разом з монетою B , визначимо, котра з монет B чи C є другою фальшивою.

3). Скринька двічі показала «1», наприклад, у парах монет B і C , D і E . Тоді перевіряємо пари монет A і B та A і D . Оскільки тепер монета A справжня, то за отриманими результатами однозначно робимо висновок, котрі з монет у парах B і C , D і E є фальшивими.

3. Якщо Оленка зайняла місце 3, то Андрійко й Сергійко отримали місця 2 і 4, Миколка – місце 1, а Даринка — місце 5. Якщо ж місце Оленки відмінне від третього, то вона не зможе однозначно визначити розподіл місць для цієї п'ятірки учнів, що суперечить умові задачі. Отже, Даринка зайняла п'яте місце.

4. Остачі від ділення числа n на 10 і 20 або співпадають, або відрізняються на 10. Перший випадок неможливий, бо за умовою задачі друга з цих остач є більшою. У другому випадку між цими остачами буде 9 інших різних остач, а це можливо лише за умови, що всі остачі є послідовними натуральними числами. Зауважимо, що потрібну умову задовольняють усі числа $n \equiv -9 \pmod{m}$, де m – найменше спільне кратне чисел 10, 11, ..., 20.

5. Периметр всього прямокутника дорівнює як сумі периметрів, записаних у чотирьох клітинках, розташованих на обох його діагоналях, так і сумі інших чотирьох записаних периметрів. З рівності $7 + 11 + 10 + x = 10 + 5 + 13 + 7$ знаходимо $x = 7$. Відзначимо, що описана ситуація цілком можлива. Наприклад, якщо розміри кімнат по горизонталі зліва направо дорівнюватимуть 1, 1.5, 4, 2.5 відповідно, а по вертикалі знизу вгору – 1, 4, 1, 2.5.

8 клас

1. Чебурашка їсть удвічі повільніше за Крокодила Гену, тому за першу хвилину він мав з'їсти стільки ж, скільки з'їв одночасно з Крокодилом Геною. Оскільки всього він з'їв половину торта, то за хвилину Чебурашкою була з'їдена четверта його частина. Отже, весь торт Чебурашка з'їв би за 4 хвилини.

2. Найбільшим числом вигляду \overline{abcd} є число 1789. Замінивши $b = 7$ на $b = 6$, отримаємо число 1689 плюс 2 менші числа 1678 та 1679. Разом – 3 числа вигляду $\overline{1bcd}$, $c \geq 7$. Замінивши $b = 6$ на $b = 5$, отримаємо 3 числа вигляду $\overline{15cd}$, $c \geq 7$, плюс 3 менші числа вигляду $\overline{156d}$. Разом – 6 чисел вигляду $\overline{15cd}$, $c \geq 6$. Замінивши $b = 5$ на $b = 4$, отримаємо 6 чисел вигляду $\overline{14cd}$, $c \geq 6$, плюс 4 менші числа вигляду $\overline{145d}$. Разом – 10 чисел вигляду $\overline{14cd}$, $c \geq 5$. Замінивши $b = 4$ на $b = 3$, отримаємо 10 чисел вигляду $\overline{13cd}$, $c \geq 5$, плюс 5 менших чисел вигляду $\overline{134d}$. Разом – 15 чисел вигляду $\overline{13cd}$, $c \geq 4$. І, нарешті, замінивши $b = 3$ на $b = 2$, отримаємо 15 чисел вигляду $\overline{12cd}$, $c \geq 4$, плюс 6 менших чисел вигляду $\overline{123d}$. Разом – 21 число вигляду

$\overline{12cd}$, $c \geq 3$. Отже, до числа 1589 включно будуть виписані $21+15+10+6=52$ числа. Тому на 53-му місці виявиться число 1678. Нескладно було й виписати перші 53 елементи такої послідовності.

3. Так, зможе. Розіб'ємо числа на 2014 пар: $(1, 2)$, $(3, 4)$, ..., $(4027, 4028)$. Якщо Миколка закреслює число однієї з пар, то Андрійко закреслює інше число у тій же парі. Після 2013-го ходу Андрійка залишаться два числа однієї пари, різниця яких дорівнює 1.

4. Нехай H – точка перетину висот трикутника ABC . Враховуючи, що кут між хордою і дотичною дорівнює вписаному куту, який спирається на дугу, що стягується цією хордою, і навколо чотирикутника $AKHL$ можна описати коло, отримуємо

$$\angle BAP + \angle CAQ = \angle CBP + \angle BCQ = \angle CBH + \angle BCH = \angle CHK = \angle BAC.$$

Оскільки точки P та Q знаходяться всередині кута BAC , то звідси випливає, що точки A, P, Q лежать на одній прямій.

5. Нехай $p^3 + q^2 = n^3$. Тоді $(n-p)(n^2 + np + p^2) = q^2$. Оскільки $n-p < n^2 + np + p^2$, а число q просте, то $n-p=1$, $n^2 + np + p^2 = q^2$. Звідси отримуємо $(p+1)^2 + (p+1)p + p^2 = q^2$, тобто $3p^2 + 3p + 1 = q^2$, $3p(p+1) = (q-1)(q+1)$. Тому $q-1$ або $q+1$ має ділитися на p . Оскільки $(p+1)^2 < 3p^2 + 3p + 1 = q^2 < (2p+1)^2$, то $p+1 < q < 2p+1$, $p < q-1 < 2p$, $p+2 < q+1 < 2p+2$. Отже, на p може ділитися лише $q+1$ за умови, що $q+1=2p$. У такому разі отримуємо рівняння $3p^2 + 3p + 1 = (2p-1)^2$, з якого знаходимо $p=7$. Тоді $q=2p-1=13$.

9 клас

1. Нехай n – менше з цих чисел, а x – закреслена цифра у більшому з них. Тоді $n + (10n + x) = 20132013$, $11n + x = 20132013$. Оскільки 20132013 ділиться на 11, то $x=0$, $n=18301830$. Отже, шуканими є числа 1830183 та 18301830.

2. Віднявши від першого рівняння друге, отримаємо рівняння $(a-b)(x^{2013} - 1) = 0$. Оскільки $a \neq b$, то спільним коренем заданих двох рівнянь може бути лише $x_0 = 1$. Отже, $a+1+b=0$, $a+b=-1$.

3. У трикутниках AEF та EDF кут F спільний. Оскільки кут між хордою BE і дотичною EF дорівнює вписаному куту BCE , отримуємо $\angle DEF = \angle BCE = \angle FAE$. Отже, ці два трикутники подібні, причому $\frac{EF}{DF} = \frac{AF}{EF}$. Тому $EF = \sqrt{DF \cdot AF} = \sqrt{a(a-b)}$.

4. Справді,

$$\begin{aligned} \frac{x(y-x)}{x+y} + \frac{y(z-y)}{y+z} &= (y-x) \left(\frac{x}{x+y} - \frac{1}{2} \right) + \frac{y-x}{2} + \\ &+ (z-y) \left(\frac{y}{y+z} - \frac{1}{2} \right) + \frac{z-y}{2} = -\frac{(x-y)^2}{2(x+y)} - \frac{(y-z)^2}{2(y+z)} + \frac{z-x}{2} \leq \frac{z-x}{2}. \end{aligned}$$

5. Доведемо, що це можливо. Серед чисел $1, 2, \dots, 900$ кожна з остач $0, 1, 2$ від ділення на 3 дають по 300 чисел. Розіб'ємо таблицю на 100 квадратиків розміру 3×3 і будемо по черзі заповнювати кожен з них. Спочатку по діагоналі запишемо довільні три числа, які при діленні на 3 дають остачу 2 , а потім у решту клітинок впишемо довільні шість чисел так, щоб у кожному рядку та кожному стовпці квадратики було по три числа з різними остачами від ділення на 3 .

10 клас

1. Можна. Наприклад, умову задачі задовольняють відрізки $[0,1], [0,2], [0,3], [2,5], [3,5], [4,5]$.

2. З умови задачі маємо $mn - 7 = \sqrt{m^2 + n^2} > 0$. Звідси отримуємо

$$(mn - 7)^2 = m^2 + n^2, \quad (m+n)^2 - (mn - 6)^2 = 13,$$

$$(m+n - mn + 6)(m+n + mn - 6) = 13.$$

Оскільки 13 – просте число, а $mn - 6 > 0$, то $m+n - mn + 6 = 1$, $m+n + mn - 6 = 13$. З отриманої системи знаходимо $m+n = 7$, $mn = 12$. Отже, $m = 4, n = 3$ або $m = 3, n = 4$ як корені квадратного рівняння $x^2 - 7x + 12 = 0$.

3. За нерівністю Коші-Буняковського

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2x} + \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot \sqrt{7y} \leq \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{7}} \cdot \sqrt{2x+7y} \leq \sqrt{\frac{9}{14}} \cdot \sqrt{14} = 3.$$

4. Маємо

$$\angle APC = \angle AQC = 90^\circ \Rightarrow MP = MQ = 0,5AC,$$

$$\angle BPH = \angle BQH = 90^\circ \Rightarrow NP = NQ = 0,5BH.$$

З рівності трикутників MPN та MQN (за трьома сторонами) випливає, що $MN \perp PQ$. Далі, враховуючи умову $KQ = HQ$, можливість описати навколо чотирикутника $CLHQ$ коло та рівність вписаних кутів, які спираються на одну дугу, отримаємо

$$\angle QKD = \angle QKH = \angle QNK = \angle QCL = \angle BCA = \angle BDA.$$

Отже, $PQ \square AD$. Тому $MN \perp AD$.

5. Розглянемо такі 672 числа $A_1 = a_1$, $A_2 = a_1 + a_2, \dots$, $A_{672} = a_1 + a_2 + \dots + a_{672} = 2013$. Оскільки цих чисел більше, ніж остач від ділення на 671, то серед них знайдуться два числа A_m та A_n , $m > n$, різниця яких $A_m - A_n = a_{n+1} + \dots + a_m$, $0 < A_m - A_n < 2013$, ділиться на 671, а отже, дорівнює 1342 або 671. Враховуючи, що $a_k \neq 1342$ для всіх k , $1 \leq k \leq 672$, у першому випадку шуканими будуть записані поспіль принаймні два числа a_{n+1}, \dots, a_m . А у другому випадку такими є решта записаних поспіль чисел.

11 клас

1. Оскільки

$$\begin{aligned} (\sin x - \sin y) + (\cos y - \cos x) &= 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} + 2 \sin \frac{x-y}{2} \sin \frac{x+y}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{x-y}{2} \left(\cos \frac{x+y}{2} - \cos \frac{\pi + x+y}{2} \right) = 4 \sin \frac{x-y}{2} \sin \left(\frac{x+y}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} \right), \end{aligned}$$

то, враховуючи умову задачі, потрібно зобразити дві сукупності паралельних прямих $y = x + 2\pi k$, $k \in Z$, та $y = -x - \frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in Z$,

$$\text{які отримуємо з рівнянь } \sin \frac{x-y}{2} = 0 \text{ та } \sin \left(\frac{x+y}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = 0.$$

2. З умови задачі випливає, що $x^{2013}(1-x) \geq 0$. Тому $0 \leq x \leq 1$. Числа $x=0$ та $x=1$ є коренями заданого рівняння. А для $x \in (0,1)$

отримуємо $[x]=0$, $\left\{\frac{2015+x}{1+[x]}\right\}=\{2015+x\}=\{x\}=x$. Оскільки при цьому $x^{2013} < x < x+x^{2014}$, то інших коренів немає.

3. Розв'яжемо поставлену задачу для довільного трикутника зі сторонами $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, $b>c$. Нехай I – центр, r – радіус кола, вписаного у трикутник ABC , K – точка дотику цього кола до сторони BC , p – півпериметр, S – площа трикутника ABC . Відкладемо на відрізку AD таку точку Q , що $AQ=IK=r$. Точки перетину прямої QI та бісектриси AI зі стороною BC позначимо через N та L відповідно. Тоді чотирикутник $AQKI$ буде паралелограмом, а з подібності трикутників QKN та ILN отримаємо $\frac{KN}{LN}=\frac{QK}{IL}=\frac{AI}{IL}=\frac{b+c}{a}$, тобто $\frac{KC-NC}{LC-NC}=\frac{b+c}{a}$. Враховуючи, що $KC=p-c$, $LC=\frac{ab}{b+c}$, звідси знаходимо $NC=\frac{a}{2}$. Таким чином, точка N співпадає з точкою M . Отже, і точка Q співпадає з точкою P . Тому

$$AP=AQ=r=\frac{S}{p}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Зокрема, для трикутника ABC зі сторонами $AB=16$ см, $BC=25$ см, $AC=39$ см знайдемо

$$AP=\sqrt{\frac{(40-25)(40-39)(40-16)}{40}}=3(\text{см}).$$

Зауважимо, що у випадку $c>b$, міркуючи аналогічно, доведемо рівність $BN=\frac{a}{2}$. Отже, також отримаємо $AP=r$. А якщо $c=b$, то прямі AD та MI не перетинаються, а співпадають.

4. З умови задачі маємо:

$$x=y=0 \Rightarrow f(0)+f(f(0))-f(0)=0 \Rightarrow f(f(0))=0;$$

$$x=y=1 \Rightarrow f(f(1))+f(1+f(1))-f(1+f(1))=1 \Rightarrow f(f(1))=1;$$

$$x = 1, y = 0 \Rightarrow f(f(0)) + f(f(1)) - f(1) = 1 \Rightarrow 0 + 1 - f(1) = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow f(0) = f(f(1)) = 1.$$

Враховуючи тепер значення $f(1) = 0$ та $f(0) = 1$, отримаємо:

$$x = 1, y = t, t \in R \Rightarrow f(f(t)) + f(t) = 1 \Rightarrow f(f(t)) \equiv 1 - f(t);$$

$$x = t, t \in R, y = 0 \Rightarrow f(t) + f(f(t)) - f(t) = t \Rightarrow f(f(t)) \equiv t.$$

Звідси випливає, що $1 - f(t) = t$ для всіх $t \in R$. Перевірка показує, що функція $f(x) = 1 - x$, $x \in R$, справді є розв'язком рівняння.

5. Доведемо, що, насправді, ірраціональних чисел не менше, ніж 1006. Якщо $x_n = 0$, то $x_{n+1} = 4 > 0$, а з ним і всі наступні елементи послідовності додатні. Тому серед чисел $x_1, x_2, \dots, x_{2013}$ не більше одного нуля. Далі, з умови задачі випливають рівності

$$(x_{n+1} - \sqrt{7}x_n)^2 = 4(x_n^2 + 4) \Leftrightarrow 2\sqrt{7}x_n x_{n+1} = 3x_n^2 + x_{n+1}^2 - 16.$$

Враховуючи, що число $\sqrt{7}$ ірраціональне, така рівність для раціональних x_n та x_{n+1} можлива лише для $x_n = 0$ або $x_{n+1} = 0$.

У першому випадку знаходимо $x_{n+1} = 4$, а у другому будемо мати $x_n = -\frac{4}{\sqrt{3}}$. Звідси випливає, що $(0, 4)$ – єдина можлива пара двох

сусідніх раціональних чисел у даній послідовності. Таким чином:

а). Якщо жодне з чисел $x_1, x_2, \dots, x_{2013}$ не дорівнює нулю або $x_{2k} = 0$, то ірраціональних чисел не менше 1006, принаймні по одному у кожній з пар $(x_1, x_2), (x_3, x_4), \dots, (x_{2011}, x_{2012})$.

б). Якщо $x_{2k-1} = 0$, то ірраціональних чисел також не менше 1006, принаймні по одному у парах $(x_2, x_3), (x_4, x_5), \dots, (x_{2012}, x_{2013})$.

2014 рік

7 клас

1. Могла. Наприклад, якщо її автомобіль півгодини рухався зі швидкістю 140 км/год, наступні півгодини – зі швидкістю 20 км/год, а потім ще півгодини – знову зі швидкістю 140 км/год. Тоді його

середня швидкість протягом будь-якої години складає 80 км/год. А середня швидкість на усьому шляху дорівнює 100 км/год.

2. Шуканим є число 333333. Воно ділиться на чотири числа з наведеної множини: 1, 3, 7 та 9. Якщо використовувати лише одну цифру 4, то отримаємо число 4, яке ділиться на 1, 2, 4. Якщо використовувати і цифри 3, і цифру 4, то таке число не може ділитись на 3, 6, 9, бо сума його цифр не ділиться на 3, та на 4, 5 та 8, бо останні дві цифри можуть бути лише 33, 34 або 43. Отже, воно може ділитись максимум на три числа: 1, 2 та 7. І, нарешті, якщо використовувати лише цифри 3, то отримані числа можуть ділитися хіба що на 1, 3, 7, 9. При цьому кількість використаних трійок має бути кратною трьом. Залишилось лише зауважити, що 333 не ділиться на 7, а 333333 – ділиться.

3. Оскільки у кожному з шести рядків має бути не більше, ніж 3 зірочки, то більше 18 зірочок поставити не вдасться. Приклад розстановки 18 зірочок наведений у таблиці справа.

*			*	*	
		*	*	*	
*	*				*
	*	*			*
		*	*	*	
*	*				*

4. Нехай $AC = x$. Тоді за нерівністю для сторін трикутника маємо $x < AB + BC = 3 + 7 = 10$ та $x + AD > CD \Leftrightarrow x + 3 > 11 \Leftrightarrow x > 8$. Єдиним цілим числом, яке задовольняє обидві нерівності є $x = 9$. Отже, $AC = 9$ см, причому сторона AC є середньою у трикутнику ACD та найбільшою у трикутнику ABC .

8 клас

1. Див. розв'язання задачі 1, 7 клас.

2. Позначимо через $S(K)$ суму цифр числа K . Нехай $N = \overline{abcd}$, $a \neq 0$, $M = N + 1 \leq 9999$. Розглянемо 4 можливі випадки:

1) якщо $d \neq 9$, то $S(M) - S(N) = 1$;

2) якщо $N = \overline{abc9}$, $c \neq 9$, то $S(N) - S(M) = 8$;

3) якщо $N = \overline{ab99}$, $b \neq 9$, то $S(N) - S(M) = 17$;

4) якщо $N = \overline{a999}$, $a \neq 9$, то $S(N) - S(M) = 26$.

Останній варіант є шуканим.

3. а). Можна. Дивись таблицю справа. Сума чисел у кожному рядку дорівнює 40, а у кожному стовпчику – 24.

1	11	5	14	9
8	3	12	4	13
15	10	7	6	2

б). Не можна. Сума всіх чисел таблиці дорівнює 120. Тому у рядках рівні суми можуть дорівнювати лише 40, а у стовпчиках – лише 24.

4. За умовою задачі $py + qx \div xy \Rightarrow py + qx \div x \Rightarrow py \div x$. Тому $y \div x$. Аналогічно доводимо, що $x \div y$. Отже, $x = y$.

5. Проведемо $MN \square CK$ – середню лінію трикутника BCK . Тоді $\angle NFM = \angle AFK = \angle AKF = \angle MNF$. Отже, $MF = MN = \frac{1}{2}BK$.

9 клас

1. Оскільки $n = \overline{ab} - \overline{ba} = (10a + b) - (10b + a) = 9(a - b) > 0$, то $n = 9k$. Очевидно, що максимальна кількість пар ненульових цифр, різниця між якими дорівнює k , буде при $k = 1$, для якого існує 8 пар шуканих цифр. Тому $n = 9$.

2. Якщо AB – діаметр кола c , то кола c_1 та c_2 дотикаються у точці $O \in AB$. В іншому разі AO та BO – діаметри кіл c_1 та c_2 відповідно. Якщо при цьому M – друга точка їх перетину, то $\angle AMO = \angle BMO = 90^\circ$, звідки випливає, що $M \in AB$.

3. а). Див. розв'язання задачі 3 а), 8 клас.

б). Не можна. Сума всіх чисел таблиці дорівнює 210 і не ділиться на 4. Тому в усіх чотирьох рядках суми рівними бути не можуть.

4. Позначимо $a^2 = 12n - 119$ та $b^2 = 75n - 539$. Виключивши n з цих рівностей, отримаємо

$$\frac{a^2 + 119}{12} = \frac{b^2 + 539}{75} \Leftrightarrow 25(a^2 + 119) = 4(b^2 + 539) \Leftrightarrow 4b^2 - 25a^2 = 819.$$

Запишемо останню рівність у вигляді $(2b - 5a)(2b + 5a) = 3^2 \cdot 7 \cdot 13$.

Оскільки $819 = 1 \cdot 819 = 3 \cdot 273 = 7 \cdot 117 = 9 \cdot 91 = 13 \cdot 63 = 21 \cdot 39$ та $0 < 2b - 5a < 2b + 5a$, то сума таких множників має ділитися на 4, а

різниця – на 10. Отже, цілі значення a та b отримаємо лише у трьох з шести можливих варіантів:

$$\begin{cases} 2b - 5a = 3, \\ 2b + 5a = 273, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 27, \\ b = 69, \end{cases} \Rightarrow n = \frac{a^2 + 119}{12} = \frac{848}{12} \notin \mathbb{Z}.$$

$$\begin{cases} 2b - 5a = 7, \\ 2b + 5a = 117, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 11, \\ b = 31, \end{cases} \Rightarrow n = \frac{a^2 + 119}{12} = 20.$$

$$\begin{cases} 2b - 5a = 13, \\ 2b + 5a = 63, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5, \\ b = 19, \end{cases} \Rightarrow n = \frac{a^2 + 119}{12} = 12.$$

5. Якщо $a^2 + b^2 = 0$, то нерівність доведена. А для $a^2 + b^2 > 0$ з врахуванням умови задачі вона впливає з очевидної нерівності

$$(a^{2014} + b^{2014})(a^2 + b^2) - 2(a^{2016} + b^{2016}) = (a^{2014} - b^{2014})(b^2 - a^2) \leq 0.$$

10 клас

1. Перепишемо нерівність у вигляді

$$(x-1) \left(\frac{(x+1)^4}{(x-1)^4} + \frac{1}{16} - \frac{(x+1)^2}{2(x-1)^2} \right) \geq 0 \Leftrightarrow (x-1) \left(\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} - \frac{1}{4} \right)^2 \geq 0.$$

Звідси випливає, що її розв'язками будуть всі значення $x > 1$ та корені

$$\text{рівняння } \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} - \frac{1}{4} = 0, \text{ з якого маємо } \frac{x+1}{x-1} = \pm \frac{1}{2} \text{ та } x = -3, x = -\frac{1}{3}$$

відповідно. Отже, $x \in (1; +\infty) \cup \left\{ -3; -\frac{1}{3} \right\}$.

2. Звівши другу умову до спільного знаменника, з врахуванням першої умови отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{cd + bd + ad}{abcd} &= \frac{bc + ac + ab}{abcd} \Rightarrow ab + bc + ca = (a + d + c)d \Rightarrow \\ \Rightarrow ab + bc + ca &= (a + b + c)^2 \Rightarrow (a + b)^2 + (b + c)^2 + (a + c)^2 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow a + b &= b + c = c + a = 0 \Rightarrow a = b = c = 0, \end{aligned}$$

що суперечить другій заданій умові.

3. З першого рівняння системи маємо, що z парне та $x > y$, $x > z$. Тоді з другого рівняння випливає, що число x непарне та $13x < 4x + 3x + 29$. Тому $x < 5$. Враховуючи сказане, отримуємо $x = 3$,

$z = 2$, а з другого рівняння системи знаходимо $y = 1$.

4. За властивістю бісектриси трикутника з умови задачі маємо

$$\frac{AL}{LC} = \frac{AB}{BC} = \frac{AK}{MC}. \quad \text{Крім того, } AK + MC = \frac{1}{2}(AB + BC) = AC, \quad \text{тому}$$

$AK = AL, CM = CL$. Отже,

$$\angle KLM = 180^\circ - \frac{180^\circ - \angle A}{2} - \frac{180^\circ - \angle C}{2} = \frac{\angle A + \angle C}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2}\beta.$$

5. Олеся перемагає. Якщо Андрій міняє деяку зірочку, окрім першої, на якусь цифру c , то Олеся міняє на таку ж цифру c будь-яку (окрім першої) зірочку, яка стоїть на місці іншої парності. Якщо ж Андрій не останнім ходом міняє першу зірочку на цифру $d \neq 0$, то Олеся міняє довільну зірочку на парній позиції на число $d - 1$, а далі дотримується описаної вище стратегії. Таким чином, перед останнім ходом Андрія різниця між сумами цифр на непарних і сумами цифр на парних позиціях або дорівнює 0, і він не має права останнім ходом записати 0 на першій позиції, або така різниця дорівнює 1, і не стане кратною 11, що б не записав Андрій на непарній позиції.

11 клас

1. Оскільки $\sin x \geq 0$ для всіх $x \in [0; \pi)$, то на цьому проміжку $2^{\sin x} \geq 2^0 = 1$, а $\sin 2^x \leq 1$. Таким чином рівність можлива лише якщо обидві функції одночасно набувають значення 1. Але $2^{\sin x} = 1$ лише при $x = 0$, а при цьому значенні $\sin 2^0 = \sin 1 < 1$. Отже, на проміжку $[0; \pi)$ задане рівняння розв'язків не має.

2. а). Якщо $d = 0$, то усі члени задовольняють умову, а при $d < 0$ серед членів прогресії не усі будуть натуральними числами. Нехай прогресія має різницю $d > 0$ і $a_l = m^k$ для деяких натуральних $m > 1$ та l . Тоді $(m + dn)^k = m^k + dN = a_l + dN = a_{N+l}$ для всіх натуральних n .

б) Існує. Наприклад, $a_n = p + p^2(n - 1)$, де p – довільне просте число. Кожний її член ділиться на p , але не ділиться на p^2 . Тому є не вище, ніж першим степенем натурального числа.

3. Позначимо α, β, γ – кути трикутника, які лежать навпроти

сторін a , b , c відповідно. Запишемо теорему косинусів для кожного доданка у лівій частині та застосуємо нерівність Коші-Буняковського:

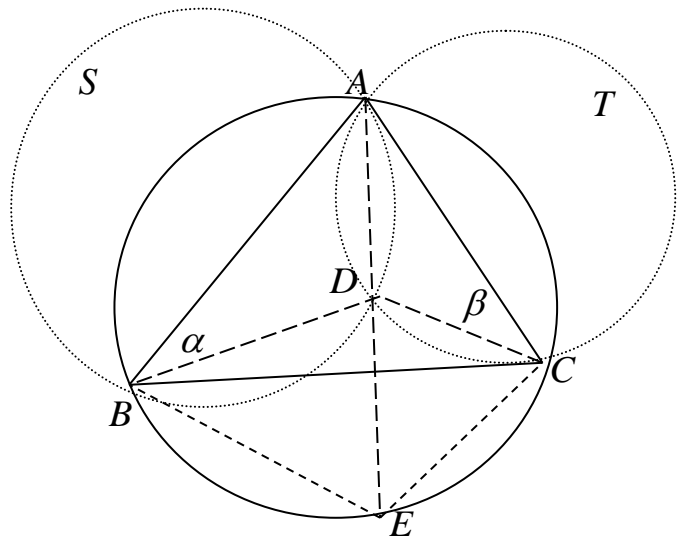
$$\begin{aligned} & \sqrt{a^2 + b^2 - c^2} + \sqrt{b^2 + c^2 - a^2} + \sqrt{c^2 + a^2 - b^2} = \\ & = \sqrt{2ab \cos \gamma} + \sqrt{2bc \cos \alpha} + \sqrt{2ca \cos \beta} = \\ & = \sqrt{ab} \cdot \sqrt{2 \cos \gamma} + \sqrt{bc} \cdot \sqrt{2 \cos \alpha} + \sqrt{ca} \cdot \sqrt{2 \cos \beta} \leq \\ & \leq \sqrt{ab + bc + ca} \cdot \sqrt{2(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)}. \end{aligned}$$

Таким чином, задана нерівність буде доведена, якщо справджується нерівність $2(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) \leq 3$. Для кутів гострокутного трикутника вона безпосередньо випливає з нерівності Єнсена:

$$\frac{\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma}{3} \leq \cos \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Її також легко отримати для кутів довільного трикутника векторним способом з нерівності $(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)^2 \geq 0$, де $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – одиничні вектори, відкладені на його сторонах.

4. Нехай $\angle ABD = \alpha$, $\angle ACD = \beta$ (див. малюнок нижче). З властивостей вписаних кутів отримуємо: $\angle CAD = \angle ABD = \alpha$, $\angle BAD = \angle ACD = \beta$, $\angle BED = \angle BEA = \angle BCA$. Крім того, $\angle BAC = \angle BDE = \alpha + \beta$. Отже, $\triangle ABD \sim \triangle CAD$ та $\triangle ABC \sim \triangle DBE$. З пропорційності відповідних сторін подібних трикутників отримуємо рівності $\frac{AB}{CA} = \frac{BD}{AD}$ та $\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{DE}$. Звідси маємо $DE = \frac{AC \cdot BD}{AB} = AD$, що й треба було довести.



5. Див. розв'язання задачі 5, 10 клас.

2015 рік

7 клас

1. Щоб з'єднати між собою нові міста, потрібно побудувати 10 доріг. Решта 2005 доріг з'єднують нові міста зі старими, яких, таким чином, було $2005 : 5 = 401$. Тому міст у царстві стало 406.

2. Водій повинен провезти чотирьох солдатів 18 км і висадити їх за 12 км від кінцевого пункту. Потім повернутися назад на 12 км, щоб підібрати наступних чотирьох солдатів із восьми, які за цей час пройдуть 6 км, та провезти їх також на 18 км, висадивши за 6 км до кінцевого пункту. Тоді ще раз повернутись назад на 12 км за останніми чотирма солдатами, які у даний час опиняться на відстані 12 км від початкового пункту, і везти їх 18 км до пункту призначення. Таким чином, усі прибудуть до місця призначення одночасно. При цьому автомобіль проїде 78 км за 2 год 36 хв. Стільки ж часу затратять і солдати на свою передислокацію.

3. Не може. Для перемоги Миколці потрібно першою покласти гирю масою 4г. Решту 6 гир розіб'ємо на пари: (1г, 7г), (2г, 6г), (3г, 5г). Кожним наступним ходом Миколка відповідає вибором гирі з тієї ж пари, з якої перед цим взяв гирю Петрусь. При цьому після третього ходу Миколки стрілка покаже масу 20г. Тому, зробивши свій третій хід, Петрусь програє.

Є й інші стратегії для перемоги Миколки. Наприклад, він може кожного разу ставити гирю найменшої маси, яка ще не була поставлена. Тоді після його третього ходу на терезах опиняться гирки масами 1 г, 2 г, 3 г (причому не важливо, ким вони були поставлені) та ще дві гирки з решти чотирьох. Навіть коли це будуть дві найважчі, стрілка покаже щонайбільше 19 г. Після наступного ходу суперника непоставленою залишиться одна гирка. Навіть коли її маса дорівнюватиме 7 г, стрілка покаже щонайменше 21 г, бо загальна маса всіх гирок становить 28 г.

Переможе Миколка і з наступною стратегією. Першим ходом він ставить гирку масою 1 г. Решту гирок розіб'ємо на пари: (2 г, 7 г),

(3 г, 6 г), (4 г, 5 г). Кожним наступним ходом Миколка відповідає вибором гирі з тієї ж пари, з якої перед цим взяв гирю Петрусь. При цьому після третього ходу Миколки стрілка покаже масу 19 г. А оскільки гирка 1 г уже поставлена, то наступний хід Петруся приведе його до поразки.

4. Оскільки $13 \cdot 13 = 169 = 33 \cdot 5 + 4$, то більше 33 таких прямокутників отримати не вдасться. Щоб отримати 33 прямокутники, відріжемо від квадрата смугу розмірами 13×5 , яку можна розрізати на 13 потрібних фігурок. Від решти відріжемо смугу розмірами 8×5 , з якої отримаємо 8 прямокутників розмірами 1×5 . І, нарешті, квадрат розміром 8×8 , який залишився, розріжемо на 4 прямокутники розмірами 3×5 та один квадратик у його центрі розміром 2×2 . З останніх чотирьох прямокутників у сукупності отримаємо ще 12 фігурок потрібної форми і розмірів.

8 клас

1. Нехай два коні, дві корови та дві кози, розбившись на пари, як в умові задачі, з'їдають по декілька аналогічних стіжків протягом 36 днів. Перша пара за цей час з'їсть 4 стіжки, друга – 3, третя – 2. Разом – 9 стіжків. Таким чином, об'єм сіна в один стіжок вони разом з'їдають за 4 дні. Відповідно, один кінь, одна корова та одна коза разом з'їли би такий стіжок за 8 днів.

2. Оскільки

$$\overline{aba} - \overline{bab} = (100a + 10b + a) - (100b + 10a + b) = 91(a - b)$$

ділиться на 7, то й \overline{bab} ділиться на 7. Крім того,

$$\overline{aba} = 100a + 10b + a = 7(14a + b) + 3(a + b).$$

Тому обидва ці числа діляться на 7 тоді і тільки тоді, коли $a + b$ ділиться на 7. Для $a + b = 7$ таких пар отримаємо три, а для $a + b = 14$ їх є дві. Разом маємо 5 пар, а саме: (434, 343), (525, 252), (616, 161), (959, 595), (868, 686). Усі вони задовольняють умову задачі.

3. Оскільки $x^2 + 4 \geq 4x$, $y^2 + 4 \geq 4y$, $z^2 + 4 \geq 4z$, то

$$xyz^2 + xy^2 + x^2 + 4 \geq xyz^2 + xy^2 + 4x = x(yz^2 + y^2 + 4) \geq$$

$$\geq x(yz^2 + 4y) = xy(z^2 + 4) \geq xy \cdot 4z = 4xyz.$$

4. Може. Нехай висота CH ділить гіпотенузу на відрізки з довжинами 9 см та 4 см. Тоді з подібності трикутників ACH та CBH знайдемо $CH = 6$ см. Розрізавши трикутник ABC вздовж CH , отримаємо два прямокутні трикутники. Сторони більшого з них поділимо на 3 рівні частини, а меншого – пополам. Далі, розрізуючи кожен з цих трикутників по прямих, які проходять через точки поділу паралельно до їхніх сторін, отримаємо з більшого 9, а з меншого 4 однакові прямокутні трикутники з катетами 3 см та 2 см. Разом – 13 однакових трикутників.

5. Виграє Миколка. Першим ходом він докладає до купи 1 монету. Їх у купі стане 2016. Далі, якщо Петрусь бере 4 монети, то Миколка докладає одну, і навпаки, якщо Петрусь докладає одну монету, то Миколка забирає 4. Таким чином, після кожного ходу Миколки кількість монет у порівнянні з його попереднім ходом зменшується на 3 і ділиться на 3. Звідси випливає, що саме він забере останню монету.

9 клас

1. Піднімаючись на 2 м по стовбуру дерева, білка долає шлях довжиною 2,5 м, що легко отримати за теоремою Піфагора, розглянувши розгортку стовбура. Тому, піднявшись на висоту 8 м, вона подолає шлях довжиною 10 м.

2. Найменшим натуральним значенням такого виразу є 2. Справді, $3m^2 - mn^2 - 2n - 4 = 2$ для $m = 4$, $n = 3$. А рівність $3m^2 - mn^2 - 2n - 4 = 1$ неможлива, бо її ліва частина є непарним числом лише для непарних m та парних n . Але тоді її остача при діленні на 4 дорівнює 3.

3. Додавши рівняння системи, отримаємо

$$(a + 2016)(x^2 + x + 1) = 0.$$

Оскільки другий множник у лівій частині отриманого рівняння дійсних коренів не має, то підходить тільки $a = -2016$. При цьому всі три рівняння матимуть спільний дійсний корінь $x = 1$.

4. Нехай $\angle ABD = \varphi$, $\angle CAB = \angle CBA = \alpha$. Тоді з умови задачі та властивості зовнішнього кута трикутника ABK маємо

$$\angle ADB = \angle ADK = \angle AKD = \angle KAB + \angle KBA = (90^\circ - \alpha) + \varphi.$$

З іншого боку, $\angle ADB = 180^\circ - \angle DAB - \angle DBA = 180^\circ - \alpha - \varphi$. З цих двох рівностей знаходимо $\varphi = 45^\circ$.

5. Позначимо трьох місіонерів через M м м, а трьох канібалів через K к к; великими буквами позначені місіонер і канібал, які уміють гребти. Умову задачі задовольняє, наприклад, така схема переправи: 1) переправляються K к; 2) K повертається на човні назад; 3) переправляються K к; 4) K повертається; 5) переправляються M м; 6) повертаються M к; 7) переправляються M K ; 8) повертаються M к; 9) переправляються M м; 10) K повертається; 11) переправляються K к; 12) K повертається; 13) переправляються K к.

10 клас

1. Оскільки

$$2015 = S = 9 \left[11(a_1 + a_4 + a_7) + (a_2 + a_5 + a_8) \right] + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9),$$

то число A при діленні на 9 дає остачу 8. Враховуючи, що сума всіх десяти цифр від 0 до 9 дорівнює 45, робимо висновок, що у записі числа A відсутня цифра 1. Умову задачі задовольняє, наприклад, число 907863245. Зрозуміло, що воно не єдине. Зокрема, перестановками трійок цифр з нього отримуємо ще 5 таких чисел: 907245863, 863907245, 863245907, 245907863, 245863907.

2. Віднявши від другого рівняння системи перше, отримаємо $y - x + x^2 - y^2 = x^3 - y^3$. Розклавши на множники різниці квадратів та кубів, запишемо цю рівність у вигляді

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2 - x - y + 1) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x - y) \left[(x + y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \right] = 0.$$

Оскільки доданки у квадратних дужках не можуть одночасно дорівнювати нулю, то $x = y$. Тоді з рівняння $x^3 - x^2 - x = 0$ знаходимо

$x_1 = 0$, $x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Тому система має 3 розв'язки (x, y) : $(0; 0)$, $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

3. Продовжимо сторони AB та CD до перетину у точці P . Утворився рівносторонній трикутник ADP , тому $\triangle PBD = \triangle DCA$ за рівними сторонами $PD = DA$ та відповідними рівними кутами: $\angle PDB = \angle DAC$ й $\angle BPD = \angle CDA = 60^\circ$. Отже, $BP = CD$, звідки $AB + CD = AB + BP = AP = AD$.

4. Позначимо суму у лівій частині нерівності через S . Маємо

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left[\frac{3-1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{4-2}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{(n+2)-n}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} \right) + \left(\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n \cdot (n+1)} - \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} \right) < \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

5. Могло. Розташуємо команди по колу. Нехай кожна команда виграє у п'яти команд, які йдуть по колу після неї, і програє п'ятьом командам, які йдуть по колу перед нею, а решту 5 ігор завершує внічию. Тоді у кожній команді виявиться по 5 перемог та нічий.

II клас

1. Нехай задумане число $a = 3m + x = 5n + y = 7k + z$. Тоді сума

$$\begin{aligned} 70x + 21y + 15z &= 70(a - 3m) + 21(a - 5n) + 15(a - 7k) = \\ &= a + 105(a - 2m - n - k) \end{aligned}$$

або співпадає із задуманим числом, або відрізняється від нього на величину, кратну 105. Враховуючи нерівності $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 4$, $0 \leq z \leq 6$, нескладно зрозуміти, що

$$0 \leq 70x + 21y + 15z \leq 70 \cdot 2 + 21 \cdot 4 + 15 \cdot 6 = 314.$$

Тому фокусникові доведеться щонайбільше двічі віднімати 105 від обчисленої ним суми, що нескладно зробити усно.

2. Запишемо задану систему у вигляді

$$\begin{cases} (x - 0,5)^2 + y^2 \leq 0,25(1 - 0,5a), \\ x^2 + (y - 0,5)^2 \leq 0,25(1 - 0,5a). \end{cases}$$

При $a \geq 2$ нерівності системи не мають розв'язків. При $a = 2$ єдині розв'язки обох нерівностей існують, але не співпадають між собою. Якщо ж $a < 2$, то нерівності такої системи визначають круги радіуса $R = 0,5\sqrt{1 - 0,5a}$ з центрами $A(0,5;0)$ та $B(0;0,5)$ відповідно. Тому для єдиності розв'язку необхідно і достатньо, щоб ці круги дотикалися. З рівності $2R = AB \Leftrightarrow \sqrt{1 - 0,5a} = 0,5\sqrt{2}$ знайдемо $a = 1$.

3. Побудуємо паралелограм $ACEB$. Оскільки $CE = AB = CD = 1$, а $\angle DCE = \angle DPB = 60^\circ$, то трикутник CDE рівносторонній. Тому $AC + BD = BE + BD \geq DE = 1$.

4. Очевидно, що многочлен $P(x) \equiv 0$ задовольняє умову. Нехай тепер $P(x)$ не є тотожним нулем і має степінь $n, n \geq 0$. Тоді у заданій рівності многочлен зліва має степінь n^2 , а справа – степінь $n + 2$. З рівності $n^2 = n + 2$ знайдемо $n = 2$. Підставивши у задану рівність замість x довільний (дійсний чи комплексний) корінь квадратного тричлена $P(x)$, отримаємо $P(0) = 0$. Звідси випливає, що обидва його корені є дійсними і $P(x) = ax(x + q), a \neq 0$. Враховуючи умову задачі, отримуємо тотожність

$$a \cdot ax(x + q) \cdot (ax(x + q) + q) \equiv (x^2 + 2015x + 2015) \cdot ax(x + q),$$

яка рівносильна тотожності $a^2x^2 + a^2qx + aq \equiv x^2 + 2015x + 2015$. Тоді з системи рівнянь $a^2 = 1, a^2q = 2015, aq = 2015$ знайдемо $a = 1, q = 2015$. Отже, $P(x) = x(x + 2015)$.

Зауважимо, що $P(x)$ можна було також шукати у вигляді

$$P(x) = ax^2 + bx + c,$$

де a, b, c – дійсні коефіцієнти, $a \neq 0$, прирівнюючи коефіцієнти біля однакових степенів x у виразах:

$$P(P(x)) = a^3x^4 + 2a^2bx^3 + (ab^2 + 2a^2c + ab)x^2 +$$

$$+(2abc + b^2)x + (ac^2 + bc + c)$$

та

$$(x^2 + 2015x + 2015)P(x) = ax^4 + (b + 2015a)x^3 + \\ +(2015a + 2015b + c)x^2 + 2015(b + c)x + 2015c.$$

5. Могло. Припустимо, що одна команда програла всі свої матчі. Тоді у неї 0 перемог та 0 нічиїх. Решту 11 команд розташуємо по колу. Нехай кожна команда виграє у трьох команд, які йдуть по колу після неї, і програє трьом командам, які йдуть по колу перед нею, а інші 4 ігри завершує внічию. Тоді у кожній з цих одинадцяти команд виявиться по 4 перемоги та нічії.

2016 рік

7 клас

1. Позначимо через t час, затрачений онуком на дорогу від дому до крамниці. Тоді шлях в обидва боки онук подолає за час $2t$, тато – за час $2t + \frac{t}{3}$, а дідусь – за час $\frac{t}{2} + 3t$. Оскільки $2t < 2t + \frac{t}{3} < \frac{t}{2} + 3t$, то додому вони повернуться у такому порядку: онук, тато, дідусь.

2. Прості числа 13, 17, 19 можуть дати ціле число лише за умови, що вони стоять у чисельнику, а у них в знаменнику стоятиме 1. Тому принаймні один дріб не буде цілим числом, наприклад $\frac{17}{19}$. Інші 10 дробів, які є цілими числами, можна отримати, наприклад, так:

$$\frac{13}{1}, \frac{10}{2}, \frac{21}{3}, \frac{20}{4}, \frac{15}{5}, \frac{12}{6}, \frac{14}{7}, \frac{16}{8}, \frac{18}{9}, \frac{22}{11}.$$

3. Якщо зірочка розташована у клітині «б2», то у сусідніх з нею восьми клітинках інших зірочок бути не може. Тому для решти трьох зірочок залишаються лише стовпчик «г» та рядок «4». Але тоді принаймні дві зірочки опиняться в одному рядку чи в одному стовпчику, що суперечить умові задачі. Тому в клітині «б2» зірочки немає. Аналогічно доводимо, що зірочок немає в клітинках «б3», «в2», «в3». Нехай тепер зірочка знаходиться в клітині «а1». З умови задачі та доведеного вище випливає, що у квадраті з діагоналлю «а1» - «в3» інших зірочок немає. А розміщення їх трьох у стовпчику «г» та

рядку «4» знову приводить до протиріччя. Тому в клітині «a1» зірочки немає. Аналогічно доводимо відсутність зірочок в інших кутових клітинках: «a4», «г1», «г4». Таким чином, для розміщення зірочок залишаються решта 8 клітинок таблиці. Нескладно перекоонатися, що при цьому умову задачі задовольняють лише такі два варіанти їх розміщення: («a2», «б4», «в1», «г3») або («a3», «б1», «в4», «г2»).

4. Оскільки діагональ прямокутника розбиває його на два трикутники однакової площі, то площа прямокутного трикутника дорівнює половині добутку його катетів. Поза чотирикутником $ABCD$ у намальованому прямокутнику знаходяться 4 прямокутні трикутники з гіпотенузами AB , BC , CD та DA відповідно, сума площ яких дорівнює $0,5 \cdot 4 \cdot 6 + 0,5 \cdot 5 \cdot 2 + 0,5 \cdot 5 \cdot 3 + 0,5 \cdot 8 \cdot 3 = 36,5$. Віднімаючи цю суму від площі $S = 11 \cdot 7 = 77$ всього прямокутника, отримаємо $S_{ABCD} = 77 - 36,5 = 40,5$.

8 клас

1. Очевидно, що всі цифри числа – парні, бо на останній позиції може стояти лише парна цифра. Якщо серед чисел є одна із цифр 2 або 6, то таке число умову не задовольняє, бо на 4 діляться лише числа із закінченням 12, 32, ..., 92 та 16, 36, ..., 96. Тому число має складатися лише з цифр 4 або 8. Всі 8 таких чисел: 444, 448, 484, 488, 844, 848, 884, 888 – умову задачі задовольняють.

2. Перепишемо умову задачі таким чином:

$$x^2 - y^3 = 2 \cdot 2016 = 64 \cdot 63 = 64 \cdot (64 - 1) = 64^2 - 4^3.$$

Звідси випливає, що рівність задовольняють числа $x = 64$ та $y = 4$. Ця пара не єдина. Підходить, наприклад, ще й пара чисел $x = 69$ та $y = 9$.

3. Нехай шукана відстань дорівнює S км. Тоді

$$S = a(2 - b), S = b(2 - c), S = c(2 - a).$$

Отже, $S^3 = abc(2 - a)(2 - b)(2 - c) = a(2 - a) \cdot b(2 - b) \cdot c(2 - c)$. З нерівності $x(2 - x) \leq 1 \Leftrightarrow (x - 1)^2 \geq 0$ для $a, b, c \in (0; 2)$ отримуємо, що $S^3 \leq 1$. А оскільки число S є натуральним, то $S = 1$, і відстань до школи становить 1 км.

4. Доведемо, що в обох випадках відповідь «так». Нехай ABC – рівносторонній трикутник, M , N , K – середини його сторін. Відрізки AN , BK та CM перетинаються в точці O .

а). Для розбиття на однакові чотирикутники достатньо розглянути, наприклад, чотирикутники $AMOK$, $BNOM$ та $CKON$.

б). Позначимо тепер середини відрізків OM , ON та OK через P , R та Q відповідно. Шуканими п'ятикутниками є $ABROP$, $BCQOR$ та $CAPOQ$.

5. Нехай K – середина сторони CD . Тоді $CK = DK = AB$, та оскільки $\angle ABC = \angle BCD$, то $ABCK$ – рівнобічна трапеція. Отже, $AK \parallel BC$ та $\angle AKD = \angle BCD$. Далі, $\triangle ABX = \triangle DKA$ (за стороною $AB = DK$ та прилеглими до неї кутами), тому й $AX = AD$.

9 клас

1. Очевидно, що всі цифри числа – парні, бо на останній позиції може стояти лише парна цифра. Якщо серед чисел є одна із цифр 2 або 6, то таке число умову не задовольняє, бо на 4 діляться лише числа із закінченням 12, 32, ..., 92 та 16, 36, ..., 96. Тому число має складатися лише з цифр 4 або 8. Всі 8 таких чисел: 444, 448, 484, 488, 844, 848, 884, 888 – умову задачі задовольняють.

2. Запишемо задану систему рівнянь у вигляді:

$$\begin{cases} x(x+y+z) = y, \\ y(x+y+z) = z, \\ z(x+y+z) = x. \end{cases}$$

Якщо $x+y+z=0$, то звідси зразу отримуємо $x=y=z=0$. Якщо ж $x+y+z \neq 0$, то додамо ці рівняння. Тоді $(x+y+z)^2 = x+y+z$, звідки маємо $x+y+z=1$. З врахуванням рівнянь системи отримуємо рівності $x=y$, $y=z$, $z=x$. Отже, знаходимо ще один розв'язок

$$x = y = z = \frac{1}{3}.$$

3. Таких натуральних n не існує. Справді, для кожного n натуральному $10^n - 1$ ділиться на 3, тому й $11^n - 1$ повинно ділитися

на 3, що можливо лише для парних n . Але для таких n числа $10^n - 1$ діляться на 11, а числа $11^n - 1$ не діляться на 11 при жодному n .

4. Зможе. Наявність одиниці у трьох названих множинах номерів вершин свідчить, що ці три грані сходяться в одній вершині з номером 1. Наявність пар однакових номерів у названих множинах свідчить про те, що з цієї вершини виходять ребра 1 – 2, 1 – 6 та 1 – 8, причому вершина з номером 6 є протилежною по великій діагоналі куба до четвертої вершини грані, три з вершин якої мають номери 1, 2, 8, тобто до вершини з номером 5. Тому найбільш віддаленою від вершини з номером 5 є вершина з номером 6.

5. З умов задачі випливає, що $\angle BCP = \angle CPQ$. Проведемо перпендикуляри CK та PS до сторін PQ та CB відповідно. $\triangle CPK = \triangle PCS$ (за спільною гіпотенузою CP та відповідними гострими кутами). Тому $CK = PS = AB = BC$, отже, $\triangle QBC = \triangle QKC$ (за рівними катетами і спільною гіпотенузою). Звідси, враховуючи, що чотирикутник $KCBQ$ – вписаний, отримуємо потрібну рівність $\angle BCQ = \angle KCQ = \frac{1}{2} \angle BCK = \frac{1}{2} \angle PQA$, що й завершує доведення.

10 клас

1. Позначимо точки таким чином: домівка – D , місце школи – S , точка де Петрик повертає на схід – B , точка, де повертає Остап, – N . Тоді за умовою $DB = 210$, $BS = 70$, $DN = x$, $NS = y$. За теоремою Піфагора $BN^2 + BS^2 = NS^2$ або $(210 + x)^2 + 70^2 = y^2$. Оскільки, крім того, за умовою $x + y = 280$, то $(210 + x)^2 + 70^2 = (280 - x)^2$. Звідси знаходимо $x = 30$, тобто Остап йде на північ 30 метрів.

2. Зауважимо, що існують лише два стільці (за номерами 5 та 8), стрибнути на які чи зістрибнути з яких можна єдиним способом. Тому стрибки Федора обов'язково повинні розпочинатися з одного з них та закінчуватися на іншому. При цьому однозначно отримуємо два варіанти стрибків, які задовольняють умови задачі. Це:

5 → 10 → 2 → 7 → 12 → 4 → 9 → 1 → 6 → 11 → 3 → 8

та у зворотному напрямі.

3. а). Не обов'язково. Наприклад, квадратний тричлен $f(x) = 1008x^2 + 1008x + 2016 = 1008x(x+1) + 2016$ для кожного цілого значення x ділиться націло на 2016, бо для цілих x добуток $x(x+1)$ завжди парний.

б). Обов'язково. $f(0) = c \div 2017$; $f(1) = a + b + c \div 2017 \Rightarrow a + b \div 2017$; $f(-1) = a - b + c \div 2017 \Rightarrow a - b \div 2017$. Але тоді на 2017 діляться також числа $2a = (a + b) + (a - b)$ та $2b = (a + b) - (a - b)$. Оскільки ж число 2017 непарне, то всі коефіцієнти тричлена повинні ділитися на 2017.

4. З умов задачі випливає, що $\angle BCP = \angle CPQ$. Проведемо перпендикуляри CK та PS до сторін PQ та CB відповідно. $\triangle CPK = \triangle PCS$ (за спільною гіпотенузою CP та відповідними гострими кутами). Тому $CK = PS = AB = BC$, отже, $\triangle QBC = \triangle QKC$ (за рівними катетами і спільною гіпотенузою). Звідси, враховуючи, що чотирикутник $KCBQ$ – вписаний, отримуємо потрібну рівність $\angle BCQ = \angle KCQ = \frac{1}{2} \angle BCK = \frac{1}{2} \angle PQA$, що й завершує доведення.

5. Розглянемо такі перетворення:

$$\frac{a}{a+b^2} = \frac{a}{a(a+b+c)+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2+ab+ac} \leq \frac{a}{2ab+ab+ac} = \frac{1}{3b+c}.$$

З нерівності $\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(b+b+b+c) \geq 4\sqrt[4]{\frac{1}{b^3c}} \cdot 4\sqrt[4]{b^3c} = 16$ маємо

$$\frac{1}{3b+c} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{3}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Додавши цю та дві аналогічні нерівності,

отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{a}{a+b^2} + \frac{b}{b+c^2} + \frac{c}{c+a^2} &\leq \frac{1}{3b+c} + \frac{1}{3c+a} + \frac{1}{3a+b} \leq \\ &\leq \frac{1}{16} \left(\frac{3}{b} + \frac{1}{c}\right) + \frac{1}{16} \left(\frac{3}{c} + \frac{1}{a}\right) + \frac{1}{16} \left(\frac{3}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right). \end{aligned}$$

11 клас

1. Кожен множник числа C додатний і менший за 1, тому $C < 1$. Кожен множник числа B більший за 1, тому $B > 1$. І, нарешті, скориставшись формулою $\log_a b = \frac{\log_2 b}{\log_2 a}$, отримуємо:

$$B = \log_2 3 \cdot \frac{\log_2 4}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 4} \cdot \dots \cdot \frac{\log_2 2016}{\log_2 2015} = \log_2 2016 < \log_2 2048 = 11.$$

Отже, $C < B < A$.

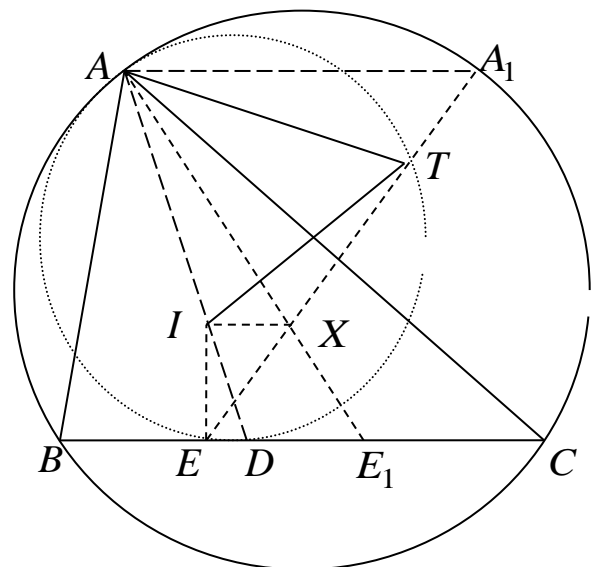
2. Див. розв'язання задачі 3 б), 10 клас.

3. Зауважимо, що у всіх трьох дужках вирази одного знака. Вони додатні, бо для додатних чисел a, b, c не можуть одночасно виконуватися нерівності: $c \geq a + b$, $a \geq b + c$, $b \geq c + a$. Припустимо,

що $a < b$. Тоді $0 < ca < bc$, $\frac{a}{b+c} < \frac{b}{a+c}$, $0 < 1 - \frac{b^2}{(c+a)^2} < 1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}$,

отже, друга з рівностей умови задачі не справджується. Аналогічно доводимо хибність припущення $a > b$. Тому $a = b$. Так само встановлюємо рівності $b = c$ та $c = a$. Остаточно отримуємо: $a = b = c = t$, де t – довільне додатне число.

4. Нехай $\angle B > \angle C$ як на рисунку справа. За властивістю вписаних кутів маємо $\angle TAI = \angle TAD = \angle TED = \angle IXE$, тому чотирикутник $IATX$ – вписаний. Проведемо пряму IX таку, що $IX \parallel BC$, $X \in EA_1$, і позначимо через E_1 точку перетину прямих A_1X та BC . Тоді $\angle ATI = \angle AXI = \angle AE_1D$. Отже, далі достатньо довести рівність $\angle XE_1E = \angle XEE_1$. Трикутники AA_1X та E_1EX , AIX та ADE_1 подібні. Тому, враховуючи властивості точки



поділу бісектрис, маємо: $\frac{AA_1}{EE_1} = \frac{AX}{XE_1} = \frac{AI}{ID} = \frac{AC + AB}{BC}$. Звідси, з

послідовним врахуванням рівнобічності трапеції BA_1C та теореми косинусів для трикутника ABC , одержимо

$$EE_1 = \frac{AA_1 \cdot BC}{AC + AB} = \frac{(BC - 2AB \cos \angle B) \cdot BC}{AC + AB} = \frac{AC^2 - AB^2}{AC + AB} = AC - AB.$$

З рівності відрізків дотичних, проведених з вершин трикутника до вписаного кола, випливає, що $AC - AB = CE - BE$. Оскільки $EE_1 = CE - CE_1$, то звідси дістаємо, що $BE = CE_1$. Отже, пари точок A, A_1 та E, E_1 симетричні відносно серединного перпендикуляра до сторони BC , тому $XE = XE_1$ та $\angle XE_1E = \angle XEE_1$. Таким чином, $\angle ATI = \angle TAI$, звідки $IT = IA$.

5. Якщо $n = 4k - 1$ чи $n = 4k$, то проробимо заміни:

$$(1; 3) \rightarrow (2; 4), (5; 7) \rightarrow (6; 8), \dots, (4k - 3; 4k - 1) \rightarrow (4k - 2; 4k).$$

Далі, вибираючи пари $(2; 2), (4; 4), \dots, (4k - 2; 4k - 2)$, зробимо всі числа набору рівними $4k$. Якщо $n = 4k + 1$, то після виконання описаних вище операцій отримаємо $4k$ чисел, які дорівнюють $4k$, та одне число $4k + 1$. Залишається, обираючи пари $(4k; 4k)$, зробити всі числа набору рівними $4k + 1$. І, нарешті, доведемо, що для $n = 4k + 2$ вирівняти всі числа не можливо. Справді, сума $1 + 2 + \dots + (4k + 2) = \frac{1}{2}(4k + 2)(4k + 3) = (2k + 1)(4k + 3)$ – непарна, а сума $4k + 2$ однакових чисел – парна. Кожного разу ми збільшуємо суму на парне число, тому отримати наприкінці з непарної суми парну не вдасться.

Список літератури

1. Вышенский В.А., Карташов Н.В., Михайловский В.И., Ядренко М.И.. Сборник задач Киевских математических олимпиад. – К.: Вища школа., 1984. – 240 с.
2. Вишенський В.А., Карташов М.В., Михайловський В.І., Ядренко М.Й.. Київські математичні олімпіади 1984–1993 рр. Збірник задач: Навчальний посібник. – К.: Либідь, 1993. – 144 с.
3. Вишенський В.А., Ганюшкін О.Г., Карташов М.В., Михайловський В.І., Призва Г.Й., Ядренко М.Й. Українські математичні олімпіади. Довідник. – К.: Вища школа., 1993 – 415 с.
4. Київські міські математичні олімпіади 2003–2011 рр. (за ред. Б. В. Рубльова). — Харків: Гімназія, 2011. — 192 с.
5. Лейфура В. М., Мітельман І. М., Радченко В. М., Ясінський В. А. Математичні олімпіади школярів України: 1991–2000 рр. – Київ: Техніка, 2003. – 541 с.
6. Лейфура В. М., Мітельман І. М., Радченко В. М., Ясінський В. А. Математичні олімпіади школярів України: 2001–2006 рр. – Львів: Каменяр, 2008. – 348 с.
7. Математичні олімпіадні змагання школярів. 2006–2007. Анікушин А. В., Арман А. Р. та ін – К.: Літера, 2008 – 224 с.
8. Математичні олімпіадні змагання школярів України. 2006–2007. Анікушин А. В., Арман А. Р. та ін – К.: Літера, 2008 – 135 с.
9. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2007–2008 та 2008–2009 рр. (за ред. Б. В. Рубльова). — Львів: Каменяр, 2010. — 549 с.
10. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2009–2010 (за ред. Б. В. Рубльова). — Харків: Гімназія, 2011. — 320 с.
11. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2010–2011 (за ред. Б. В. Рубльова). — Харків: Гімназія, 2013. — 368 с.
12. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2011–2012 (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2013. – 416 с.

13. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2012–2013 (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2014. – 401 с.
14. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2013–2014 (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2015. – 465 с.
15. Федак І.В. Готуємося до олімпіади з математики. – Кам'янець-Подільський: Абетка, 2006. – 420 с.
16. Федак І.В. Івано-Франківські математичні олімпіади 1988 – 1997 рр. – Івано-Франківськ: Плай, 1997. – 56 с.
17. Федак І.В. Обласні олімпіади з математики 1987–2005рр. – Івано-Франківськ: ОІППО, 2005. – 164 с.
18. Федак І.В. Івано-Франківські обласні олімпіади з математики 2001-2010рр. – Івано-Франківськ: Голіней, 2010. – 84 с.
19. Федак І.В. Івано-Франківські обласні олімпіади з математики 2011-2015рр. – Івано-Франківськ: Голіней, 2015. – 64 с.
20. Федак І.В. Івано-Франківська обласна олімпіада з математики 2014-2015 навчального року. – У світі математики. – 2015. – Т.21, вип. 1 – С. 64 – 70.
21. Федак І.В. Розв'язування задач підвищеної складності з математики. Спеціальний курс. – Івано-Франківськ: Голіней, 2010. – 100 с.
22. Ясінський В.А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2005. – 208 с.

Зміст

Передмова.....	3
Умови задач Івано-Франківських обласних олімпіад з математики 1987 – 2016 рр.	4
Вказівки до розв'язування задач.	98
Список літератури.....	251