І.В. Федак

Івано-Франківські обласні олімпіади з математики

2021-2025 рр.

м. Івано-Франківськ
2025

ББК: 22.1
УДК: 51(031)
Ф 55

Федак І. В. Івано-Франківські обласні олімпіади з математики 2021 – 2025 рр.: Навчальний посібник. – Івано-Франківськ: ПНУ ім. Василя Стефаника, 2025. – 132с.

Друкується за рішеннями вченої ради факультету математики та інформатики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника

Рецензенти:

доктор фіз.-мат. наук, професор кафедри математики та інформатики і методики навчання Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника ***Заторський Р. А.***,

кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри диференціальних рівнянь і прикладної математики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника ***Казмерчук А. І.***

Зібрані задачі Івано-Франківських обласних олімпіад з математики за 2021–2025 роки та резервних варіантів до них. Наведені розв’язання до всіх задач.

Для учнів 7–11 класів загальноосвітніх шкіл, гімназій та ліцеїв, професійно-технічних навчальних закладів, учителів математики, керівників математичних гуртків та всіх любителів нестандартних математичних задач.

Передмова

У пропонованому вашій увазі навчальному посібнику зібрані завдання III етапу Всеукраїнських учнівських математичних олімпіад для учнів 7 – 11 класів за період з 2021 по 2025 рік в Івано-Франківській області та наведені їх розв'язання.

Оскільки у 2021 році у зв'язку з масовим поширенням COVID-19 така олімпіада офіційно не проводилася, то наводимо вибрані матеріали Відкритої обласної учнівської олімпіади з математики для учнів 5 – 11 класів, організованої факультетом математики та інформатики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника за ініціативою та під головуванням автора цього посібника.

Щодо інших чотирьох років проведення, то завдання олімпіади були підготовлені Інститутом модернізації змісту освіти чи Малою академією наук України. У посібнику увазі читачів його автором пропонується власна версія розв'язань задач олімпіади. До частини таких задач наведені розв'язання, альтернативні до розв'язань їх авторів, до інших задач – деякі уточнення для доступнішого розуміння учнями. З авторськими розв'язаннями всіх задач читачі можуть ознайомитися на сайті математичних олімпіад у Києві https://matholymp.com.ua

Водночас, до III етапу олімпіади автором посібника були підготовлені також резервні варіанти завдань 2022 – 2025 років. Зокрема, у 2023 та 2024 роках у зв'язку із загрозами повітряних тривог вони складалися з трьох частин. Такі варіанти завдань подані у додатку до цього посібника. Оскільки завдання резервного варіанту 2023 року не були використані, то у резервному варіанті 2024 року окремі з цих задач, цікаві на думку автора посібника, повторюються.

Сподіваємося, що матеріали посібника будуть корисними для учнів та вчителів математики при підготовці до наступних олімпіад.

УМОВИ ЗАДАЧ

2021 рік

7 клас

1. Про цілі числа m та n відомо, що $m<n$ та $m^2-n^2=2021$. А чи насправді існують цілі числа з цими властивостями. Якщо так, то вкажіть хоч одну пару таких чисел.

2. За 7 годин роботи господар розрахувався з трьома своїми працівниками. Отриману суму вони поділили таким чином: перший взяв $\frac{3}{10}$ всієї суми та ще 100 гривень, другий – $\frac{4}{15}$ всієї суми та ще 200 гривень, а третьому залишилося $\frac{7}{30}$ всієї суми та ще 300 гривень. Скільки гривень отримав кожний із працівників?

3. Знайдіть передостанню цифру числа, яке дорівнює добутку $1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot2019\cdot2021$.

4. На прямій відзначили чотири точки і виміряли шість відстаней між кожними двома з цих точок. П’ять із них дорівнюють 1, 2, 3, 4 та 5 сантиметрів відповідно. Якого найбільшого значення могла набувати шоста відстань?

5. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC проведена бісектриса AD. Виявилося, що $BD=AC$. Знайдіть величину кута ABC.

8 клас

1. Про цілі числа m та n відомо, що $m<n$ та $m^2-n^2=2021$. Знайдіть усі пари таких чисел, якщо, на вашу думку, вони існують.

2. Кожна з восьми однакових на вигляд монет зафарбована у різний колір. Миколці та Марійці відомо, що маси цих монет різні і дорівнюють 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 та 8 грамів відповідно. При цьому Марійка знає масу кожної конкретної монети, а Миколка не знає маси жодної з монет. Чи може Марійка за два зважування на терезах з двома шальками без гирь допомогти Миколці визначити маси половини з цих монет?

3. Нехай $a, b, c-$ такі цілі числа, що $a^2+b^2+c^2$ та $a^3+b^3+c^3$ діляться на 3. Доведіть, що $ab+bc+ca$ також ділиться на 3.

4. Розв'яжіть рівняння $|x-4|+|x|+|x+4|=8-x^2$.

5. У трапеції $ABCD$ бісектриса кута ABC перетинає середню лінію $MN \parallel AD$ у точці O. Доведіть, що AO – бісектриса кута BAD.

9 клас

1. Доведіть, що не існує цілих чисел m та n таких, що $m^3-n^3=2021$.

2. Використовуючи по одному разові цифри від 0 до 9, запишіть найбільше натуральне число, яке ділиться на 99.

3. Учень при піднесенні до квадрату помилився і записав на дошці рівність $(a+b+2)^2=a^2+b^2+2^2$. Але для деяких цілих чисел a та b ця рівність виявилася правильною. Знайдіть усі пари (a,b) таких чисел.

4. Калькулятор Миколки має лише 4 клавіші, за допомогою яких раціональне число a можна перетворити в одне з чисел: $2a$, $\frac{a}{2}$, $3a+1$ чи $\frac{a-1}{3}$. Доведіть, що Миколка, ввівши першим число 9, після кількох натискань на клавіші зможе отримати будь-яке натуральне число від 1 до 8 включно?

5. Всередині кола довільним чином вибрали точку K, яка не лежить на діаметрі AB. Як, користуючись лише лінійкою, провести через K пряму, перпендикулярну до AB? (*Нагадуємо, що у задачах на побудову лінійкою дозволяється лише проводити прямі лінії*).

10 клас

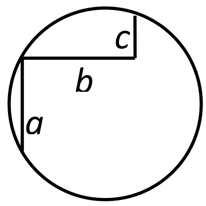
1. Розставте у квадраті 10×10 дванадцять прямокутників розмірами 1×4 так, щоб кожен з них покривав повністю 4 клітинки квадрата, і жодні два прямокутники не перетиналися між собою та не торкалися один одного навіть вершинами. Або ж доведіть, що зробити це неможливо.

2. Знайдіть усі квадратні тричлени $f(x)=ax^2+bx+c$, для яких при кожному значенні x правильною є рівність $f(x+1)=f(-x)$.

3. Серед 21 однакових на вигляд монет є 10 фальшивих. Усі справжні монети важать однаково, частина фальшивих монет на 1 грам легша, а інші фальшиві монети на 1 грам важчі за справжні. Марійка за одне зважування може покласти на кожну з двох шальок однакову кількість монет, і стрілка покаже різницю між їх масами у грамах. За яку найменшу кількість зважувань Марійка зможе дізнатися, чи вибрана нею навмання монета є справжньою?

4. Вкажіть найбільше натуральне число $k\le 2021$, для якого знайдуться натуральні числа m та n такі, що $2^{m+n}=2^m+2^n+k$.

5. Знайдіть радіус кола, зображеного на рисунку справа, якщо кути між сусідніми ланками заданої всередині нього ламаної є прямими, а їхні довжини дорівнюють a, b та c відповідно.



11 клас

1. Учитель записав на дошці n різних двоцифрових чисел і знайшов модулі всіх попарних їх різниць. При якому найменшому значенні n принаймні один з таких модулів гарантовано запишеться двома однаковими цифрами?

2. Миколка заповнив клітинки таблиці 3×3 натуральними числами, не обов'язково різними. Він стверджує, що суми чисел у кожному рядку, кожному стовпчику та на кожній з діагоналей отриманої таблиці дорівнюють 2021. Чи можуть його слова бути правдою? Якщо так, то наведіть приклад таблиці з такими властивостями.

3. Знайдіть усі значення параметрів a, b, c, при яких для всіх допустимих x правильною є рівність $a\cdot \mathrm{ctg} x+b\cdot\cos x+c\cdot\sin x=0$.

4. Вкажіть хоч одне x таке, що $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}=\left(1+\frac{1}{11}\right)^{11}$.

5. Всередині кола з центром у точці O довільним чином вибрали точки M та N, відмінні від O. Користуючись лише лінійкою, проведіть дві паралельні прямі, одна з яких проходить через точку M, а друга – через точку N. (*Нагадуємо, що у задачах на побудову лінійкою дозволяється лише проводити прямі лінії*).

2022 рік

7 клас

1. Подайте дріб $\frac{1}{2022}$ у вигляді різниці двох правильних дробів з меншими знаменниками.

2. Є $n \geq 3$ попарно різних відрізків, кожний з яких має довжину, що у сантиметрах задається натуральним числом. Відомо, що з будь-яких трьох із цих n відрізків можна утворити трикутник. Серед цих відрізків є такі, що мають довжини 5 см та 12 см. Яке найбільше значення може набувати n?

3. Сума взаємно простих натуральних чисел m та n дорівнює 90. Яке найбільше значення може набувати добуток mn цих чисел?

4. При діленні з остачею чотирьох послідовних натуральних чисел на деяке трицифрове число виявилося, що сума чотирьох остач дорівнює 983. Знайдіть остачу при діленні найменшого з цих чотирьох чисел на 109.

8 клас

1. Задані 5 попарно різних натуральних чисел. Чи може їхнє середнє арифметичне бути:

а) у 3 рази більшим за найбільший спільний дільник;

б) у 2 рази більшим за найбільший спільний дільник?

2. Задана множина з n не обов'язково різних чисел $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, тобто деякі елементи множини можуть співпадати. Розглянемо усі $2^n - 1$ непорожні підмножини цієї множини і для кожної такої підмножини обчислимо суму її елементів. Яка найбільша кількість з обчислених сум може виявитися рівною 1? Наприклад, для множини

$\{-1; 2; 2\}$ маємо такі 7 непорожніх підмножин: $\{-1\}$, $\{2\}$, $\{2\}$, $\{-1; 2\}$, $\{-1; 2\}$, $\{2; 2\}$ та $\{-1; 2; 2\}$, з яких суму елементів, що дорівнює 1, мають рівно дві.

3. Навколо тупокутного трикутника ABC з тупим кутом при вершині B описане коло. Дотичні до цього кола у точках A та B перетинаються у точці P, а перпендикуляр до прямої BC, що проведений через точку B, перетинає AC у точці K. Доведіть, що $PA = PK$.

4. Чи існує квадратний тричлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ з цілими коефіцієнтами, для якого число a не ділиться націло на 2022 та усі числа $f(1), f(2), \ldots, f(2022)$ мають різні остачі при діленні на 2022?

5. У турнірі з підводного поло взяли участь 11 команд, і кожні дві команди зіграли між собою рівно один матч. Кожній команді за перемогу, нічию та поразку нараховували відповідно 2, 1 та 0 очок. Виявилося, що жодні дві команди не набрали однакову кількість очок. У підсумковій таблиці команди розташували у порядку спадання кількості набраних очок. Під час перегляду регламенту виявилося, що кожен матч, в якому був переможець, мав закінчитися унічию, і навпаки, у кожному матчі, що закінчився унічию, мав бути переможець. При цьому виявилося, що знову жодні дві команди не набрали однакову кількість очок, і у підсумковій таблиці їх знову розташували у порядку спадання кількості набраних очок. Чи могло статися так, що новий порядок команд у підсумковій таблиці протилежний початковому?

9 клас

1. Яке найменше значення може набувати вираз

$$\frac{(x + y + |x - y|)^2}{xy}$$

для додатних x, y?

2. Для довільних чисел x, y доведіть нерівність

$$\sqrt{(x+4)^2 + (y+2)^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (y+4)^2} \leq$$

$$\leq \sqrt{(x-2)^2+(y-6)^2}+\sqrt{(x-5)^2+(y-6)^2}+20.$$

3. Нехай AL бісектриса трикутника ABC. Коло з центром у точці B та радіусом BL перетинає промінь AL у точці E, а коло з центром у точці C та радіусом CL перетинає промінь AL у точці D (точки E та D відмінні від точки L). Доведіть, що $AL^2 = AE \cdot AD$.

4. Знайдіть усі такі натуральні числа $a \leq b \leq c$, для яких вираз $2^a + 2^b + 2^c + 3$ є квадратом цілого числа.

5. Петрик та Василь грають у гру на дошці $m \times n$. Вони роблять ходи по черзі і розпочинає Петрик. Петрик на своєму ході ставить пішака в довільну вільну клітинку дошки. Василь на своєму ході має поставити пішака на вільну клітинку, яка є сусідньою по стороні з клітинкою, у яку поставив свого пішака Петрик останнім своїм ходом. Василь виграє, якщо уся дошка буде заповнена пішаками. Петрик виграє, якщо після його ходу Василь не зможе зробити хід за зазначеними правилами та на дошці ще будуть вільні клітинки. Якщо кожний прагне перемогти, то хто має виграшну стратегію в залежності від значень m, n.

10 клас

1. Чи існує квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ з цілими непарними коефіцієнтами a, b, c, який має одним із коренів число $\frac{1}{2022}$?

2. Задані $2n$ попарно різних натуральних чисел. Яку найбільшу кількість пар з цих чисел можна гарантовано вибрати так, щоб кожне число було не більше, ніж в одній парі, і у кожній парі сума чисел була складеним числом?

3. Нехай $P -$ точка перетину діагоналей вписаного чотирикутника $ABCD$. Описані кола трикутників APD та BPC перетинають пряму AB у точках E та F відповідно. Q та R – проекції точки P на прямі FC та DE. Доведіть, що $AB \parallel QR$.

4. Додатні числа a, b, c задовольняють умову $ab + bc + ca = 1$. Доведіть, що справджується нерівність

$$\left(\sqrt{bc}+\frac{1}{2a+\sqrt{bc}}\right)\left(\sqrt{ca}+\frac{1}{2b+\sqrt{ca}}\right)\left(\sqrt{ab}+\frac{1}{2c+\sqrt{ab}}\right)\geq 8abc.$$

5. У лівій-нижній кутовій клітинці 1×1 дошки 2022×2023 стоїть чорна фішка, а в лівій-верхній та правій-нижній клітинках стоять білі фішки. Петрик за один хід двічі поспіль пересуває чорну фішку у сусідню по стороні клітинку, а Василь може або одну з білих фішок двічі поспіль пересунути на сусідню по стороні клітинку, або кожну з двох білих фішок окремо пересунути на сусідню за стороною клітинку. Фішки не можна ставити на поля, в яких вже побувала фішка іншого кольору. Василь перемагає, якщо у певний момент через скінченну кількість ходів обидві білі фішки опиняться в одній клітинці. Доведіть, що при правильній грі Петрика Василь перемогти не зможе.

11 клас

1. Учитель написав на дошці 5 попарно різних чисел. Після цього Петрик порахував суми кожних двох із цих чисел і виписав їх на лівій половині дошки, Василь зробив те ж саме для сум кожної трійки чисел та записав їх на правій половині дошки (сума Петриком та Василем записується стільки разів, скільки разів вона була отримана). Чи міг вчитель записати такі числа, щоб на лівій та правій половині дошки були записані однакові набори чисел, з урахуванням кількості разів, скільки вони там записані?

2. Задача 2 за 10 клас.

3. У гострокутному трикутнику ABC точки H та O є точками перетину висот та центром описаного кола відповідно. Пряма HO перетнула сторони AB та AC у точках X та Y відповідно, причому точка H належить відрізку OX. Виявилося, що $XH = HO = OY$. Знайдіть градусну міру кута BAC.

4. Послідовність (a_n) складається з попарно різних натуральних чисел. Доведіть, що для довільного натурального числа $k > 1$ множина

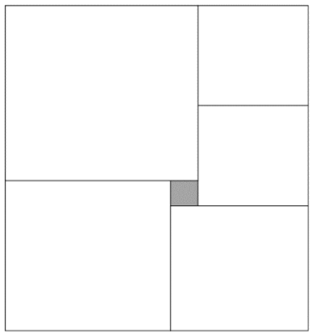
$M = \{a_1^k, a_2^k, a_3^k, \dots\}$ не містить жодної нескінченної арифметичної прогресії.

5. На прямокутну дошку $m \times n\ (m, n \geq 3)$ поклали декілька фігурок доміно (прямокутники 1×2 або 2×1) таким чином, що фігурки доміно не накладаються одна на іншу, не виходять за межі дошки $m \times n$, принаймні одне кутове поле дошки покрите доміно та більше жодної фігурки доміно не можна докласти на дошку без порушення цих правил. Доведіть, що принаймні $^2/_3$ від усіх полів дошки заповнені.

2023 рік

7 клас

1. Прямокутник розрізаний на 6 квадратів, як це показане на малюнку справа. Сірий квадрат всередині має сторону, що дорівнює 1. Чому дорівнює площа прямокутника?



2. Дано $n \geq 3$ попарно різних дійсних чисел. Доведіть, що серед них знайдеться або 3 числа з додатною сумою, або 2числа з від'ємною сумою.

3. Прості числа p, q, r, s задовольняють умову:

$$5 < p < q < r < s < p + 10.$$

Доведіть, що сума $p + q + r + s$ ділиться на 60.

4. На колі задані 11 точок. Петрик деяким чином їх занумерував числами 1, 2, … , 11. Після цього були з'єднані відрізками такі пари точок: 1 та 2, 2 та 3, …, 10 та 11, 11 та 1. Яка найбільша можлива кількість точок перетинів цих відрізків могла утворитися? Самі задані 11 точок в якості точок перетинів не рахуємо.

8 клас

1. Знайдіть ціле число, що є найближчим до значення виразу

$$\left(\left(7+\sqrt{48}\right)^2 + \left(7-\sqrt{48}\right)^2\right)^2 - \left(\left(7+\sqrt{48}\right)^2 - \left(7-\sqrt{48}\right)^2\right)^2.$$

2. Задані довільні натуральні числа k та n, що задовольняють умову: $3 \leq k \leq n$. Доведіть, що серед n попарно різних дійсних чисел знайдеться або k чисел з додатною сумою, або (k - 1) число з від'ємною сумою.

3. Їжачком будемо називати круг без межі, тобто круг без точок кола, що його обмежує. Діаметром їжачка назвемо діаметр цього круга. Будемо казати, що їжачок сидить у точці, в якій розташований центр відповідного круга. Нехай нам задано трикутник зі сторонами a, b, c, у вершинах якого сидять їжачки. Відомо, що всередині трикутника існує точка, з якої по прямій траєкторії можна дістатися до будь-якої сторони трикутника, не зачепивши жодного їжачка. Яке найбільше значення може набувати сума діаметрів цих їжачків?

4. Петрик розв'язав на тестуванні 33 задачі. За розв'язання меншої частини з них, серед яких була перша задача, він отримав a балів, за розв'язання усіх інших він отримав b балів. Відомо, що натуральні числа a та b задовольняють умову: $1 \leq b < a \leq 10$. По завершенні Петрик порахував середній бал за розв'язання усіх задач і він виявився цілим числом. За розв'язання скількох задач Петрик отримав a балів?

5. По колу стоять $n \geq 3$ дітей, кожний з яких має дві таблички, одну з цифрою 0, другу – з цифрою 1. У певний момент кожна дитина піднімає одну з табличок на свій розсуд. Далі через кожну хвилину кожна дитина, у якої число на табличці відрізняється від чисел на табличках обох її сусідів (ліворуч та праворуч), міняє свою табличку. Чи може тривати нескінченно довго ситуація, коли принаймні одна дитина міняє табличку?

9 клас

1. Знайдіть ціле число, що є найближчим до значення виразу

$$\left((3+\sqrt{1})^{2023}-\left(\frac{1}{3-\sqrt{1}}\right)^{2023}\right)\cdot\left((3+\sqrt{2})^{2023}-\left(\frac{1}{3-\sqrt{2}}\right)^{2023}\right)\cdot$$

$$\left((3+\sqrt{3})^{2023}-\left(\frac{1}{3-\sqrt{3}}\right)^{2023}\right)\cdot\ldots\cdot\left((3+\sqrt{8})^{2023}-\left(\frac{1}{3-\sqrt{8}}\right)^{2023}\right).$$

2. Ненульові числа a, b, c задовольняють рівність $ab + bc + ca = 0$. Доведіть, що числа $a + b + c$ та $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}$ одного знаку.

3. Дано прямокутний трикутник ABC з прямим кутом ACB. Нехай W_A та W_B відповідно – середини менших дуг BC та AC описаного кола трикутника ABC, а N_A та N_B відповідно – середини більших дуг BC та AC. Позначимо через P та Q відповідно точки перетину відрізка з прямими N_AW_B та N_BW_A. Доведіть, що $AP = BQ$.

4. Є 100 карток, на кожній з яких записане одне з чисел 1, 2, …, 100 так, що кожне число є рівно на одній картці. Картки складені у стопку так, що на них зверху донизу записані числа 1, 2, …, 100 у вказаному порядку. Петрик перекладає картки за такими правилами. Якщо перед його k-тим ходом числа на картках зверху донизу записані у порядку $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots, a_{100}$, то після його ходу вони розташовуються таким чином: $a_k, a_{k-1}, \dots, a_2, a_1, a_{k+1}, \dots, a_{100}$, (зокрема, при $k = 1$ порядок карток не змінюється). Петрик робить по черзі ходи 1, 2, …, 100. Після чого він знову робить ходи 1, 2, …, 100 і так далі. Чи обов'язково після скінченної кількості ходів повториться початкове розташування карток зверху донизу з числами 1, 2, …, 100?

5. Знайдіть усі пари цілих невід'ємних чисел $x \geq y$, для яких числа $x + 3^y$ та $y + 3^x$ є двома послідовними цілими числами.

10 клас

1. Знайдіть усі такі натуральні числа n, що задовольняють нерівності:

$$-46 \leq \frac{2023}{46 - n} \leq 46 - n.$$

2. Для довільних додатних чисел a, b, c розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} ax^3 + by = cz^5, \\ az^3 + bx = cy^5, \\ ay^3 + bz = cx^5. \end{cases}$$

3. Розглянемо на декартовій площині усі пари різних точок (A, B), кожна з яких має обидві цілі координати. Серед цих пар точок знайдіть усі такі, для яких знайдуться дві різні точки (X, Y) з обома цілими координатами, що чотирикутник $AXBY$ опуклий та вписаний.

Чотирикутник називається опуклим, якщо обидві його діагоналі лежать всередині чотирикутника.

4. У кімнаті є n ламп та 2024 перемикачі. Кожна лампа з'єднана рівно з 1000 перемикачами. При натисканні на перемикач кожна з'єднана з ним лампа змінює свій стан – з «ON» на «OFF» та навпаки. Відомо, що натисканням на деякі з перемикачів можна досягти того, що усі лампи перейдуть в стан «ON». Доведіть, що цього можна досягнути натисканням на перемикачі сумарно не більше ніж 1012 разів.

5. Задача 5 за 9 клас.

11 клас

1. Яке з чисел більше: $A = \frac{1}{9} : \sqrt[3]{\frac{1}{2023}}$ чи $B = log_{2023}91125$**.**

2. Дано $n \geq 4$ додатних чисел. Розглянемо всі $\frac{n(n-1)}{2}$ попарних сум цих чисел. Покажіть, що якісь дві суми відрізняються не більше, ніж в $\sqrt[n-2]{2}$ рази.

3. Точка $I -$ інцентр трикутника ABC, $AB < AC$. На бісектрисі зовнішнього кута ABC трикутника ABC обрали таку точку X, що $IC = IX$. Нехай дотична до описаного кола трикутника BXC у точці X перетинає пряму AB у точці Y. Доведіть, що $AC = AY$.

4. Знайдіть усі натуральні числа x, y, z, які задовольняють рівність $2^x + 21^y = z^2$.

5. Знайдіть усі натуральні числа $n \geq 2$, для яких справджується таке твердження: якщо сума чисел у послідовності натуральних чисел $(a_1, a_1, \dots, a_n)$ дорівнює $2n - 1$, то існує блок послідовних членів цієї послідовності, що містить щонайменше два її члени, числа якого мають середнє арифметичне, що є цілим числом.

2024 рік

7 клас

1. Квадрат $ABCD$ розрізаний відрізком EF на два прямокутники $AEFD$ та $BCFE$. Кожний з цих двох прямокутників має сторони, що задаються натуральними числами. Відомо, що прямокутник $AEFD$ має площу 30 і вона більша за площу прямокутника $BCFE$. Знайдіть площу квадрата $ABCD$.

2. Чи можна вписати числа від 1 до 100 в клітинки квадрата 10×10 так, щоб у кожну клітинку було записане рівно одне число, кожне число записане рівно один раз та щоб справджувалася умова: числа, які розташовані в клітинках, що симетричні відносно якогось із серединних перпендикулярів до сторін початкового квадрата 10×10, були однієї парності?

3. Петрик розставив по колу в деякому порядку 15 знаків «плюс» та 15 знаків «мінус». Василь хоче замінити деякі із знаків на протилежні так, щоб не було двох однакових знаків, що стоять поруч. Доведіть, що він може цього досягнути, замінивши не більше ніж 14 знаків.

4. Петрик задумав 4 цілих числа, а далі виписав усі 6 їхніх попарних сум. П'ять з них виявились рівними 70, 110, 120, 180 та 230. Чому дорівнює шоста сума?

8 клас

1. Знайдіть кількість натуральних чисел, для яких добуток цифр та сума цифр однакові і дорівнюють 8.

2. Запишіть натуральні числа від 1 до 16 в клітинки квадрата 4×4 так, щоб в кожну клітинку було записане рівно одне число, кожне число було записане рівно один раз та щоб справджувалася умова: числа, які розташовані в клітинках, що симетричні відносно якогось із серединних перпендикулярів до сторін початкового квадрата 4×4, дають в сумі просте число.

3. Коло γ, що проходить через вершину A трикутника ABC, перетинає його сторони AB та AC вдруге в точках X та Y відповідно. Також коло γ перетинає сторону BC у точках D та E так, що $AD = AE$. Доведіть, що точки B, X, Y, C лежать на одному колі.

4. Знайдіть усі пари дійсних чисел x, y, що задовольняють рівності: $(x^2 + 1)(y^2 + 1) + 4(x - 1)(y - 1) = 0$.

5. Натуральні числа a, b, c такі, що $10a^2 - 3ab + 7c^2 = 0$. Яке найменше значення може набувати вираз $(a, b) \cdot (b, c) \cdot (c, a)$?

Тут через (x, y) *позначений найбільший спільний дільник натуральних чисел* x *та* y.

9 клас

1. Різницю дробів $\frac{2024}{2023} - \frac{2023}{2024}$ подаємо у вигляді нескоротного дробу $\frac{p}{q}$. Знайдіть значення p.

2. У гострокутному трикутнику ABC проведено бісектрису BL та висоту AD, що перетинаються в точці T. Виявилося, що висота LK трикутника ALB ділиться навпіл прямою AD. Доведіть, що $KT \perp BL$.

3. Петрик та Василь грають у таку гру. Вони роблять ходи по черзі і починає Петрик. За один хід гравець вибирає одне із чисел від 1 до 2023 і записує його на дошку. Кожне число протягом гри можна вибрати не більше одного разу. Програє той, після чийого ходу добуток чисел на дошці буде ділитися на 2023. Хто виграє за умови, що кожний гравець прагне перемогти?

4. Петрик задумав 4 цілих числа, а далі виписав усі їхні попарні суми. П'ять з них виявились рівними 70, 110, 120, 180 та 230. Знайдіть усі четвірки таких чисел, які задовольняють ці умови.

5. Знайдіть усі такі натуральні числа m та n, для яких обидва дроби $\frac{2n-1}{m}$ та $\frac{2m-1}{n}$ є цілими числами.

10 клас

1. Знайдіть усі пари натуральних чисел (a, b), для яких число $4b$ - 1 ділиться націло на число $3a + 1$, а число $3a$ - 1 ділиться націло на число $2b + 1$.

2. Задача 2 за 9 клас.

3. На острові живуть 2025 людей, кожний з яких є або лицарем, тобто завжди каже правду, або брехуном, тобто завжди бреше. Деякі мешканці острова знайомі один з одним, при цьому кожний має принаймні одного знайомого, але не більше трьох. Кожний мешканець острова стверджує, що серед його знайомих рівно два брехуни.

а). Яка найменша кількість лицарів може бути серед мешканців острова?

б). Яка найбільша кількість лицарів може бути серед мешканців острова?

4. Є 315 монет, що поділені на 3 купки з 81, 115 та 119 монет. За один крок можна поєднати разом декілька існуючих купок або купку, що має парну кількість монет поділити на дві рівні купки. Чи можна за скінченну кількість кроків утворити 315 купок, в кожній з яких рівно 1 монета?

5. Петрик мав необмежену кількість жовтої та синьої фарби. У дволітрову банку він налив 1 л жовтої та 1 л синьої фарби, які рівномірно перемішалися між собою, утворивши єдину суміш. За один крок Петрик виливає 1 л суміші з банки та доливає в банку 1 л жовтої або 1 л синьої фарби. Після n таких кроків відсоток синьої фарби в отриманій суміші мав значення між 83% до 84%. Для якого найменшого значення n це могло статися? Перша дія Петрика, коли він злив вперше разом 1 л жовтої та 1 л синьої фарби не рахується.

11 клас

1. Чотири натуральні числа a, b, c, d задовольняють умову: $a < b < c < d$. Для якого найменшого можливого значення d може справджуватися така умова: середнє арифметичне чисел a, b, c буде у два рази меншим за середнє арифметичне чисел a, b, c, d?

2. У трапеції $ABCD$ основа $BC = 2AD$, на бічній стороні CD вибрана така точка M, для якої $AB = AM$. Доведіть, що $BM \perp CD$.

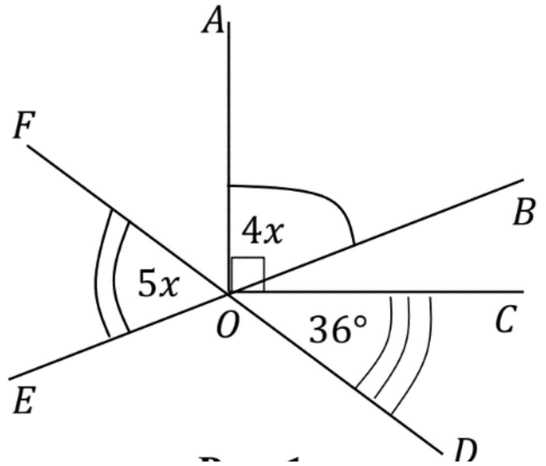
3. Задане деяке натуральне число $n > 1$. Петрик та Василь грають у таку гру. Вони роблять ходи по черзі і починає Петрик. За один хід гравець вибирає одне із чисел від 1 до n і записує його на дошку. Кожне число протягом гри можна вибрати не більше одного разу. Програє той, після чийого ходу добуток чисел на дошці буде ділитися на n. Для кожного $n > 1$ визначте, хто виграє за умови, що кожний гравець прагне перемогти.

4. Знайдіть найменше дійсне число M, для якого $\{a\} + \{b\} + \{c\} \leq M$ для будь-яких дійсних додатних чисел a, b, c, таких що $abc = 2024$. *Тут запис* $\{x\}$ *позначає дробову частину числа* x*: наприклад,* $\{3{,}14\} = 0{,}14$.

5. Функції $f\colon N \to N$ та $g\colon N \to N$ визначаються таким чином: для кожного $n \in N$ $f(n)$ – найменше натуральне число, факторіал якого ділиться націло на n, а $g(n) = f(n + 1) - f(n)$. Доведіть, що функція g необмежена.

2025 рік
I тур
7 клас

1. Прямі FD та BE перетинаються в точці O. З точки O проведені також промені OA та OC, при цьому про кути, що утворилися, відомі такі умови: $\angle DOC = 36°$, $\angle AOC = 90°$, $\angle AOB = 4x$ та $\angle FOE = 5x$, як це показане на малюнку справа. Чому дорівнює градусна міра величини x?



2. Доведіть, що число $3\underbrace{99\ldots9}_{2025}6\underbrace{00\ldots0}_{2025}1$ є квадратом натурального числа.

3. У чемпіонаті факультету кібернетики з футболу взяли участь $n \geq 3$ команд. Змагання пройшли в одне коло, тобто кожна команда зіграла проти кожної іншої рівно 1 раз. За перемогу в матчі нараховується 3 очки, за поразку очок не нараховується, за нічию команди отримують по 1 очку. Виявилося, що переможцем стала команда, яка набрала очок більше ніж будь-яка інша команда, та в якої перемог було не більше ніж поразок. При якому найменшому n таке могло відбутися?

4. Знайдіть усі натуральні числа a, b, c, що задовольняють такі умови: $a + b + c = 16$, $abc = 120$, $a < b < c$.

8 клас

1. Знайдіть усі натуральні числа a, b, c, які задовольняють рівність

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}} = 20{,}25.$$

2. Чи можна записати в кожну комірку таблиці 45×45 натуральні числа від 1 до 2025 так, щоб кожне число було використане рівно один раз, і при цьому, щоб кожне записане число було або більшим за усі числа, що розташовані у сусідніх по стороні комірках, або меншим за усі числа, що розташовані в сусідніх по стороні комірках?

3. Для якого найменшого натурального числа $n > 3$ не існує (не обов'язково опуклий) n-кутник, у якого всі діагоналі рівні?

Діагоналлю довільного многокутника називають відрізок, який з'єднує будь-які дві не сусідні вершини цього многокутника.

4. Петрик, Василь та Грицько їздили на велосипедах по одному кільцевому треку водному напрямі. Відомо, що швидкість Петрика 30 км/год, а Василя – 20 км/год. Яка швидкість Грицька, якщо відомо, що вони одночасно стартували з однієї точки і в тій самій точці одночасно фінішували, при цьому за цей час Петрик 8 разів випередив Грицька, а Василь – двічі випередив Грицька?

5. Знайдіть принаймні одну таку четвірку натуральних чисел (a, b, c, d), що задовольняє умову

$$a^{2021} + b^{2023} = 11(c^{2022} + d^{2024}).$$

9 клас

1. Скільки існує трицифрових чисел із сумою цифр 7, які не мають у записі нуля.

2. Чи можна числа від 1 до 2025 розставити по колу таким чином, щоб різниця між кожними двома сусідніми числами мала вигляд $2k$ для деяких цілих невід'ємних чисел k? Для різних сусідніх пар чисел числа k можуть бути різними.

3. Точка H - точка перетину висот гострокутного трикутника ABC, AD - його висота. До кола з центром у точці A та радіусом AD проведено дотичні з точок B і C, які не співпадають з прямою BC. Ці дотичні перетинаються в точці P. Доведіть, що радіус вписаного кола ΔBCP дорівнює HD.

4. На яке найбільше просте число ділиться натуральне число

$$\frac{2 + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + 4 \cdot 4! + \cdots + 2023 \cdot 2023!}{2022!}?$$

Символом $n!$ позначено добуток усіх натуральних чисел від 1 до n.

5. На скільки нулів закінчується найменше число, що ділиться і на 2, і на 5, та має рівно 2021 дільник?

10 клас

1. Задані 11 чисел, середнє арифметичне яких дорівнює 10. До кожного з перших чотирьох чисел додали 20, а від кожного з семи останніх відняли 24. Чому дорівнює середнє арифметичне нових 11 чисел?

2. Задача 2 за 9 клас.

3. Діаметр AD описаного кола трикутника ABC перетинає пряму BC у точці K. Точку D симетрично відобразили відносно точки K і отримали точку L. На прямій AB обрана така точка F, що $FL \perp AC$. Доведіть, що $FK \perp AD$.

4. Послідовність (a_n) будуємо таким чином: $a_1 = \frac{10}{11}$; якщо дріб $a_n = \frac{p}{q}$ нескоротний, то $a_n = \frac{p+2}{q+3}$ після того, як він стане нескоротним. Тобто ми маємо, що $a_2 = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$, $a_3 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$, … . Визначте, чи існує найбільший індекс n, для якого член послідовності a_n будується скороченням відповідного дробу $\frac{p+2}{q+3}$.

5. Додатні числа x, y, z задовольняють умову $x + 3y + 5z = 72$. Яке найменше значення може набувати вираз $\frac{1}{x} + \frac{3}{y} + \frac{5}{z}$?

11 клас

1. Знайдіть усі трицифрові числа, які у 5 разів більші за добуток своїх цифр.

2. На дошці виписані усі натуральні числа від 1 до 2025. Михайло та Олексій грають у таку гру. Вони по черзі, починає Михайло, стирають з дошки одне з записаних на ній чисел. Гра закінчується, коли на дошці залишаються рівно два числа. Якщо їх сума є точним квадратом цілого числа, виграє Михайло, інакше – виграє Олексій. Хто виграє при правильній грі обох гравців?

3. Задача 3 за 10 клас.

4. Задача 5 за 9 клас.

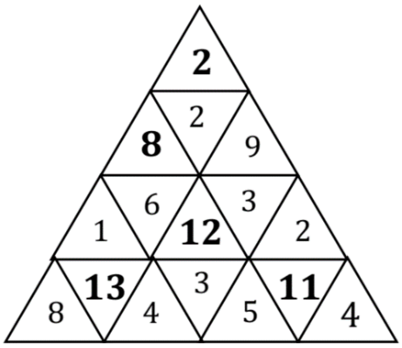
5. Знайдіть усі трійки дійсних чисел (a, b, c), які задовольняють умови:

$$(2a + 1)^2 - 4b = (2b + 1)^2 - 4c = (2c + 1)^2 - 4a = 5.$$

II тур

7 клас

1. Михайло намалював трикутну сітку завбільшки n для $n \geq 2$. Вона утворюється з рівностороннього трикутника T зі стороною n розбиттям кожної сторони на n рівних частин. Після цього проводяться відповідні відрізки, що паралельні сторонам трикутника T, які його розбивають на n^2 рівносторонніх трикутників зі стороною 1, які ми назвемо *комірками*. Далі Олексій вписує в кожну комірку деяке натуральне число. Михайло отримує 1 цукерку за кожну комірку, число в якій дорівнює сумі усіх чисел в сусідніх по сторонах комірках. Олексій хоче записати числа таким чином, щоб Михайло отримав якомога більше цукерок. Скільки цукерок за таких умов отримає Михайло?



На малюнку справа показаний приклад для $n = 4$ з 16 комірками та розставленими там числами. При такій розстановці чисел Михайло б отримав 5 цукерок за числа 2 (верхня комірка), 8, 13, 12 та 11.

2. Михайло вибрав три попарно різні додатні дійсні числа a, b, c і записав на дошку такі числа: $a + b$, $b + c$, $c + a$, ab, bc, ca. Яка найменша кількість різних чисел може бути записана на дошці?

3. Петрик намагається відкрити сейф, захищений кодовим числом $\overline{abcde}$ з п'яти ненульових цифр. Йому відоме про код те, що число $\overline{abcde}$ не ділиться на 11, а числа $\overline{ae}$, $\overline{abe}$ та $\overline{abde}$ діляться на 11. Яку найменшу кількість спроб треба здійснити Петрику, щоб напевно відкрити сейф?

4. У трикутнику ABC проведена бісектриса CD. Серединний перпендикуляр до цієї бісектриси перетинає пряму AB у точці E, при цьому на прямій AB точки A, D, B та E розташовані у вказаному порядку. Доведіть, що $\angle BAC = \angle BCE$.

8 клас

1. Михайло вибрав три попарно різні дійсні числа a, b, c і записав на дошку такі числа: $a+b$, $b + c$, $c+a$, ab, bc, ca. Яка найменша кількість різних чисел може бути записана на дошці?

2. Знайдіть всі пари натуральних чисел a, b, для яких одне з двох чисел $2(a^2+b^2)$ та $(a+b)^2+4$ ділиться на інше.

3. У Петрика є 7 чорних та 7 білих куль. Він може робити таки дві дії: або поміняти свої 3 чорні кулі (якщо вони в нього є в наявності) на 2 білі кулі, або поміняти свої 4 білі кулі (якщо вони в нього є на цей момент) на 9 чорних куль. Чи зможе Петрик за скінченну кількість дій отримати набір, що складається з:

а) 10 чорних та 10 білих куль; **б)** 13 чорних та 7 білих куль?

4. Задача 4 за 7 клас.

9 клас

1. Знайдіть найбільше можливе значення виразу $y-x$, якщо дійсні невід'ємні числа x, y задовольняють рівність

$$x^4 = y(y-2025)^3.$$

2. Натуральне число n задовольняє такі умови:

- у числа n рівно 60 дільників: $1=a_1<a_2<\cdots<a_{60}=n$;
- у числа $n+1$ також рівно 60 дільників:

$$1=b_1<b_2<\cdots<b_{60}=n+1.$$

Нехай k – кількість індексів i, для яких $a_i<b_i$. Знайдіть всі можливі значення k. Зауважимо, що такі числа існують, наприклад, числа 4388175 та 4388176 мають по 60 дільників.

3. Петрик має 10 карток, що пронумеровані числами 1, 2, …, 10. Він хоче скласти їх в рядок зліва направо, при цьому має дотримуватися таких умов: якщо картка з номером k лежить на певній позиції, то праворуч від неї може бути розташована картка з номером, що більший від k, або картка з номером $k-1$. Скільки таких різних розташувань карток існує?

4. У трикутнику ABC проведена бісектриса CD. Серединний перпендикуляр до цієї бісектриси перетинає пряму AB у точці E, при цьому на прямій AB точки A, D, B та E розташовані у вказаному порядку. Відомо, що $BE = 4$ та $AB = 5$. Доведіть, що $2AD = DE$.

10 клас

1. Задача 2 за 7 клас.

2. Задача 2 за 9 клас.

3. Розглянемо розбиття прямокутника $m \times n$ на плитки 1×2. Ці плитки можуть бути розташованими з будь-якою орієнтацією, але не можуть накладатися одна на одну та виходити за межі прямокутника. Доведіть, що для кожного розбиття таким чином прямокутника 4×2010 існує пряма лінія, що проведена всередині цього прямокутника і при цьому не розрізає жодну плитку.

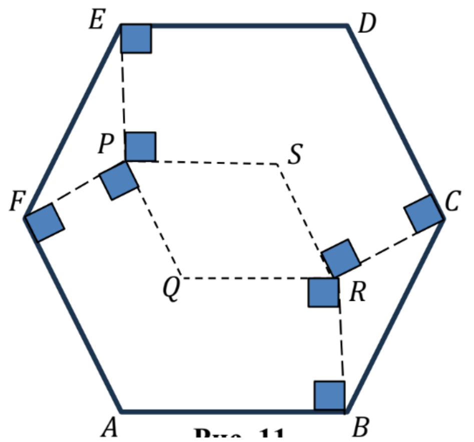
4. У вписаного в коло чотирикутника $ABCD$ сторони $AB = 7$, $BC = 18$. Бісектриса кута CDA перетинає сторону BC у точці E, точка F на відрізку DE задовольняє умову $\angle AED = \angle FCD$. Знайдіть довжину відрізка DF, якщо відомо, що $BE = 5$ та $EF = 3$.

11 клас

1. Задача 2 за 8 клас.

2. Для деякого натурального числа n Катя записала числа від 1 до 2^n у рядок у порядку зростання. Олексій переставив числа Каті та записав нову послідовність прямо під першим рядком. Далі, вони порахували суму двох чисел у кожному стовпчику. Катя порахувала число N, що дорівнює кількості степенів двійки серед отриманих результатів, а Олексій порахував число K, що дорівнює кількості різних степенів двійки серед отриманих результатів. Яке найбільше значення може мати $N + K$?

3. Всередині правильного шестикутника $ABCDEF$ з площею 6 проведені декілька відрізків, як це показане на малюнку справа. Квадратиками позначені прямі кути між відповідними відрізками. Знайдіть площу чотирикутника $PQRS$.



4. Розглянемо розбиття прямокутника $m \times n$ на плитки 1×2. Ці плитки можуть бути розташованими з будь-якою орієнтацією, але не можуть накладатися одна на одну та виходити за межі прямокутника. Доведіть, що існує таке розбиття прямокутника 5×2010, що будь-яка пряма лінія, що проведена всередині цього прямокутника, обов'язково розрізає принаймні одну плитку.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

2021 рік

7 клас

1. Оскільки $2021 = 2025 - 4 = 45^2 - 2^2 = (-45)^2 - 2^2 = (-45)^2 - (-2)^2$, то умови задачі задовольняють такі пари цілих чисел $m = -45$, $n = 2$ та $m = -45$, $n = -2$. Підійдуть також пари $m = -1011$, $n = 1010$ та $m = -1011$, $n = -1010$. Інших пар цілих чисел з такими властивостями немає (див. розв'язання задачі 1 за 8 клас).

2. Нехай вся отримана ними сума становила x гривень. Тоді

$$\frac{3}{10}x + 100 + \frac{4}{15}x + 200 + \frac{7}{30}x + 300 = x.$$

З цього рівняння знаходимо $x = 3000$ та

$$\frac{3}{10}x + 100 = \frac{4}{15}x + 200 = \frac{7}{30}x + 300 = 1000.$$

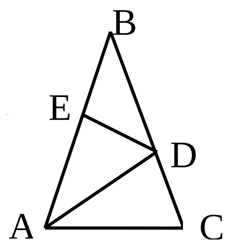
Таким чином, кожний з працівників отримав по 1000 гривень.

3. Зауважимо, що це число є непарним і ділиться на 25. Тому воно може закінчуватися лише на 25 або 75. При діленні на 4 непарні числа можуть давати лише остачі 1 або 3. Серед записаних 1011 множників чисел з остачею 1 є 506, а з остачею 3 – 505. Отже, їхній добуток при діленні на 4 дає остачу 3. Тому передостанньою цифрою поданого числа є цифра 7.

4. Нехай ці точки розташовані на прямій зліва направо у такому порядку: A, B, C, D. Покажемо, що шоста відстань може бути більшою за 5 см. Тоді також $AD > 5\ см$. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що $AC = 5\ см$. Якщо при цьому $AB = 1\ см$, то жодним вибором точки D не вдасться одночасно реалізувати виміри 2 та 3 см. Якщо $AB = 2\ см$, то умову задачі задовольняє $AD = 6\ см$. Якщо $AB = 3\ см$, то жодним вибором точки D не вдасться одночасно реалізувати виміри 1 та 4 см. А якщо $AB = 4\ см$, то $AD = 7\ см$. Отже, шоста відстань може набувати найбільшого значення 7 сантиметрів.

Відповідний приклад пропонуємо читачам навести самостійно.

5. <u>I спосіб</u>. Відкладемо на стороні AB точку E таку, що $AE = AC$ (див. рисунок справа). Трикутники ADE та ADC рівні за двома сторонами і кутом між ними. Оскільки $AB = BC$ та $BD = AC$, то $BE = DC = DE$. Якщо $\angle ABC = \beta$, то також $\angle BDE = \beta$. Тому $\angle BAC = \angle ACB = \angle AED = 2\beta$. Отже, $5\beta = 180^{\circ}$, звідки $\beta = 36^{\circ}$.



<u>II спосіб</u>. Очевидно, що $\beta = 36^{\circ}$ задовольняє умову задачі, бо при цьому матимемо два рівнобедрені трикутники ABD та ADC, для яких $BD = AD = AC$. Для доведення відсутності інших розв'язків врахуємо, що у трикутнику навпроти меншого кута лежить менша сторона. Якщо $\beta > 36^{\circ}$, то $\angle BAC = \angle ACB < 72^{\circ}$, $\angle BAD = \angle CAD < 36^{\circ}$, $\angle ADC > 72^{\circ}$. Отже, $BD < AD < AC$, що суперечить умові $BD = AC$. Якщо ж $\beta < 36^{\circ}$, то всі записані вище нерівності поміняються на протилежні.

8 клас

1. Оскільки $2021 = 2025 - 4 = 45^2 - 2^2 = (-45)^2 - 2^2 = (-45)^2 - (-2)^2$, то умови задачі задовольняють такі пари цілих чисел $m = -45$, $n = 2$ та $m = -45$, $n = -2$. Крім того, враховуючи, що $m^2 - n^2 = (m-n)(m+n)$, та розклад на множники $2021 = (-2021) \cdot (-1)$, отримаємо ще дві пари шуканих чисел $m = -1011$, $n = 1010$ із співвідношень $m - n = -2021$, $m + n = -1$ та $m = -1011$, $n = -1010$ з рівнянь $m - n = -1$, $m + n = -2021$. Наведені вище перші дві пари отримуються аналогічно із розкладу $2021 = (-47) \cdot (-43)$. Інших пар з такими властивостями немає, бо 43 та 47 – прості числа.

2. Може. У першому зважуванні, поклавши на одну шальку монети з масами 1, 2, 3, 4, 5 грамів, а на другу – монети з масами 7 та 8 грамів, вона допоможе Миколці визначити колір монети масою 6 грамів, яка не брала участь у зважуванні, та кольори двох найважчих монет. Це справді так, бо розподіл монет, при якому маси п'яти з них дорівнюють масам деяких двох інших, єдиний. Другим зважуванням монет з масами 1 та 7 грамів на одній шальці і з масою 8 грамів на іншій вона дасть змогу Миколці уточнити конкретні кольори монет з масами 7 та 8 грамів і дізнатися колір монети масою 1 грам. Таким чином Миколка знатиме кольори чотирьох монет з масами 1, 6, 7 та 8 грамів.

3. I спосіб. З рівності $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$ і того, що добуток трьох послідовних цілих чисел ділиться на 3, отримуємо, що разом з $a^3 + b^3 + c^3$ на 3 ділиться й $a+b+c$. Тому на 3 ділиться також

$$2(ab+bc+ca) = (a+b+c)^2 - \left(a^2+b^2+c^2\right).$$

Звідси випливає, що й $ab+bc+ca$ ділиться на 3.

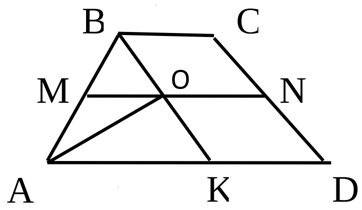
II спосіб. Оскільки при діленні на 3 квадрати цілих чисел можуть давати лише остачі 0 або 1, то з подільності $a^2+b^2+c^2$ на 3 випливає, що або на 3 ділиться кожне з чисел a, b, c, або жодне з них на 3 не ділиться. У першому випадку подільність $ab+bc+ca$ на 3 очевидна. А у другому $a^3+b^3+c^3$ може ділитися на 3 лише за умови, що кожне з чисел a, b, c при діленні на 3 дає остачу 1, або кожне – остачу 2. В обох варіантах усі доданки суми $ab+bc+ca$ при діленні на 3 дають остачу 1, тому така сума ділиться на 3.

4. I спосіб. Розкриваючи модулі, отримаємо, що:

$$|x-4|+|x|+|x+4| = \begin{cases} -x+4-x-x-4=-3x, & x \le -4, \\ -x+4-x+x+4=8-x, & -4 \le x \le 0, \\ -x+4+x+x+4=8+x, & 0 \le x \le 4, \\ x-4+x+x+4=3x, & x \ge 4. \end{cases}$$

На кожному з цих проміжків ліва частина рівняння не менша за 8. Водночас для правої частини рівняння маємо $8-x^2 \le 8$. Тому рівність можлива лише за умови, що вони обидві дорівнюють 8. Справа це значення набувається лише при $x=0$. Оскільки при цьому значенні x ліва частина рівняння також дорівнює 8, то $x=0$ – єдиний корінь поданого рівняння.

II спосіб. Враховуючи геометричний зміст модуля, ліву частину рівняння можна розглядати як суму відстаней від точки x до точок 4, 0 та -4 числової прямої. Нескладно переконатися, що за будь-якого розташування точки x на числовій прямій така сума не менша відстані між точками 4 та -4, тобто не менша за 8. А далі завершуємо розв'язання як і у першому способі.



5. I спосіб. Нехай для конкретності $AD > BC$, а точка M лежить на бічній стороні AB (див. рисунок справа). Позначимо через K точку перетину прямої BO з основою AD. Тоді MO – середня лінія трикутника ABK. Тому AO – його медіана. Вона ж є і бісектрисою кута BAD, бо трикутник ABK рівнобедрений внаслідок рівностей $\angle ABK = \angle CBK = \angle AKB$. Суть міркувань не зміниться і для випадку $BC > AD$.

II спосіб. Внаслідок $\angle MBO = \angle CBO = \angle MOB$ та $AM = MB$ маємо $AM = MO$. Тому $\angle MAO = \angle MOA = \angle DAO$, тобто AO – бісектриса кута BAD.

9 клас

1. Оскільки $(3k)^3 = 27k^3$ та $(3k \pm 1)^3 = 27k^3 \pm 27k^3 + 9k \pm 1$, то куби цілих чисел при діленні на 9 можуть давати лише остачі 0, 1 та 8. Отже, остачі їхньої різниці належать множині $\{0, 1, 2, 7, 8\}$. Але остача 5, отримана при діленні 2021 на 9, до цієї множини не належить. Тому вказаних цілих чисел m та n не існує.

2. Оскільки сума всіх цифр від 0 до 9 дорівнює 45, то за будь-якого їх порядку записане ними число буде ділитися на 9. Тому потрібно, щоб воно ділилося і на 11. Для цього на 11 повинна ділитися різниця між сумами цифр, записаних на парних та непарних позиціях відповідно. Враховуючи, що 45 – непарне число, ця різниця також має бути непарною. Дорівнювати за абсолютною величиною 33 або більше вона не може, бо сума навіть п'яти найменших цифр більша за 6, отже, вона може бути лише 11. З іншого боку, шукане число буде найбільшим, якщо його перші 5 цифр є такими: 98765. Тоді для досягнення потрібної різниці сума решти двох цифр на непарних позиціях має дорівнювати 7, а сума решти трьох цифр на парних позиціях – дорівнювати 3. Такі набори з цифр від 0 до 4 отримуються єдиним способом. Записуючи їх на відповідних позиціях за спаданням, отримаємо шукане число 9876524130.

3. Оскільки насправді $(a+b+2)^2 = a^2+b^2+2^2+2ab+4a+4b$, то для знаходження шуканих пар (a,b) запишемо рівність $ab+2a+2b=0$ у вигляді $(a+2)(b+2)=4$. Обидва множники у лівій частині останньої рівності мають бути дільниками числа 4. Враховуючи, що

$$4=1\cdot 4=2\cdot 2=4\cdot 1=(-1)\cdot(-4)=(-2)\cdot(-2)=(-4)\cdot(-1),$$

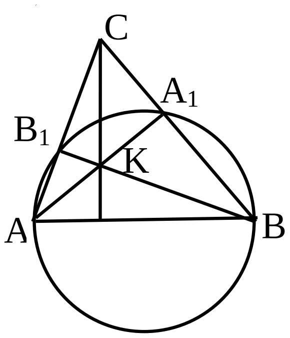
знайдемо такі 6 пар (a,b): $(-1,2)$, $(0,0)$, $(2,-1)$, $(-3,-6)$, $(-4,-4)$, $(-6,-3)$

4. Спочатку доведемо, що число 1 Миколці отримати вдасться:

$$9\xrightarrow{(3)}28\xrightarrow{(2)}14\xrightarrow{(2)}7\xrightarrow{(4)}2\xrightarrow{(2)}1.$$

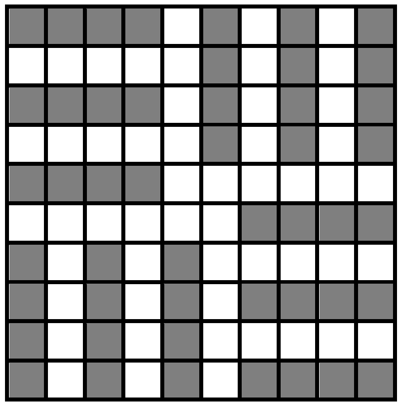
Далі наводимо спосіб збільшення кожного натурального числа на 1:

$$n\xrightarrow{(2)}\frac{n}{2}\xrightarrow{(2)}\frac{n}{4}\xrightarrow{(3)}\frac{3n}{4}+1\xrightarrow{(1)}\frac{3n}{2}+2\xrightarrow{(1)}3n+4\xrightarrow{(4)}n+1.$$



5. Проведемо прямі AK та BK до перетину з колом у точках A_1 та B_1 відповідно і позначимо точку перетину прямих AB_1 та BA_1 через C (див. рисунок справа). Оскільки кути, які спираються на діаметр, є прямими, то K – точка перетину двох висот трикутника ABC, отже, і третьої його висоти. Тому шуканою прямою, перпендикулярною до AB, є пряма CK.

10 клас



1. Це можна зробити, наприклад, так, як на малюнку справа.

2. Підставимо у подану рівність $x=0$. Тоді $f(1)=f(0)$, тобто $a+b+c=c$. Отже, усі такі тричлени задовольняють умову $b=-a$.

Доведемо, що при кожному $a \neq 0$ та довільному значенні c квадратні тричлени $f(x) = ax^2 - ax + c$ є шуканими. Справді, при цьому $f(x+1) = a(x+1)^2 - a(x+1) + c = ax^2 + ax + c = f(-x)$.

До цього ж висновку можна прийти, прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x у тотожності

$$f(x+1) = a(x+1)^2 + b(x+1) + c \equiv a(-x)^2 + b(-x) + c = f(-x).$$

3. Зрозуміло, що без зважувань зробити це не вдасться. А ось одного зважування може бути достатньо. Нехай маса справжньої монети дорівнює a грамів, n фальшивих на 1 грам легші, а решта – на 1 грам важчі за справжні. Вибравши навмання одну монету, Марійка поставить решту 20 монет по 10 на кожну із шальок.

Якщо вибрана монета справжня і на одній із шальок всі монети виявилися справжніми, а на другій – фальшивими, то стрілка покаже різницю у грамах $n(a-1) + (10-n)(a+1) - 10a = 10 - 2n$, яка є парним числом.

Якщо поміняти на шальках одну фальшиву монету місцями зі справжньою, то одна з шальок стане на 1 грам важчою, а друга на 1 грам легшою. При цьому показник стрілки зміниться на 2, але залишиться парним числом.

Такими замінами врешті решт вдасться добитися будь-якого розміщення монет на шальках, і кожного разу стрілка показуватиме парне число грамів. А у випадку випадкового вибору Марійкою фальшивої монети стрілка покаже непарне число грамів.

4. Запишемо рівність $2^{m+n} = 2^m + 2^n + k$ у вигляді

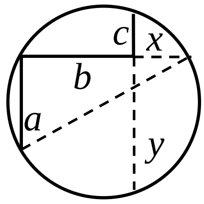
$$\left(2^m - 1\right)\left(2^n - 1\right) = k + 1.$$

Оскільки $k + 1 \leq 2022$, а $2^{11} - 1 = 2047 > 2022$, то числа m та n менші за 11. Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що $m \geq n$.

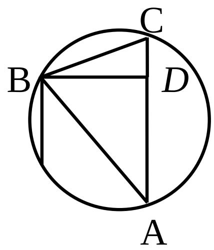
Далі, для фіксованих $m \leq 10$ знайдемо максимальні значення $n \leq m$ такі, що $\left(2^m - 1\right)\left(2^n - 1\right) \leq 2022$:

$$\left(2^{10}-1\right)\left(2^{1}-1\right)=1023,\quad \left(2^{9}-1\right)\left(2^{2}-1\right)=1533,\quad \left(2^{8}-1\right)\left(2^{3}-1\right)=1785,$$
$$\left(2^{7}-1\right)\left(2^{4}-1\right)=1905,\quad \left(2^{6}-1\right)\left(2^{5}-1\right)=1953.$$

Таким чином, найбільшим значенням такого добутку є 1953. Відповідно, шукане значення $k=1952$. Йому відповідають пари натуральних чисел $m=6, n=5$ та $m=5, n=6$.



5. I спосіб. Проведемо додатково ще три відрізки пунктирними лініями (див. рисунок справа). Оскільки $y=a+c$, $cy=bx$, то $b+x=b+\dfrac{c(a+c)}{b}$. Тоді з прямокутного трикутника з катетами a та $b+x$ за теоремою Піфагора знаходимо його гіпотенузу – діаметр заданого кола, половина якого – шуканий радіус $R=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+\left(b+\dfrac{c(a+c)}{b}\right)^2}$.



II спосіб. Розглянемо трикутник ABC, висота якого $BD=b$, та $CD=c$, $AD=a+c$ (див. малюнок справа). Записуючи його площу двома способами, отримаємо рівність $AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABC=BD\cdot AC$.

Але $AC=2R\cdot\sin\angle ABC$, тому $R=\dfrac{AB\cdot BC}{2BD}=\dfrac{1}{2b}\sqrt{\left(b^2+(a+c)^2\right)\left(b^2+c^2\right)}$.

Нескладно переконатися, що ці два вирази для R є тотожними.

11 клас

1. Щоб такий модуль був записаний двома однаковими цифрами, він повинен ділитися на 11. При діленні на 11 можливі лише 11 різних остач. Тому для $n\ge 12$ знайдуться принаймні два записані вчителем числа, модуль різниці яких ділиться на 11, отже, записується двома однаковими цифрами.

Для $n\le 11$ такого гарантувати не вдасться. Достатньо розглянути набір чисел: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20. Модуль різниці кожних двох із них не перевищує 10, отже, не може бути записаний двома однаковими цифрами. Тому найменшим шуканим значенням є $n=12$.

2. Не можуть. Розглянемо загальнішу задачу, вважаючи, що кожна з таких восьми сум дорівнює цілому числу S, а у центрі таблиці знаходиться натуральне число a. При обчисленні вказаних сум воно пораховане 4 рази, числа у кутових клітинках – тричі, а в інших чотирьох клітинках – двічі. Тому, додавши ще дві суми по рядку та стовпчику, які містять центральну клітинку таблиці, отримаємо разом 10 сум, у яких число a пораховане 6 разів, а числа в усіх інших клітинках – тричі. Таким чином, матимемо рівність $10S = 9S + 3a$, звідки $S = 3a$, тобто S ділиться на 3. Оскільки ж 2021 на 3 не ділиться, то слова Миколки не можуть бути правдою.

3. Підставивши у подану рівність $x = \frac{\pi}{2}$, знайдемо $c = 0$. Далі, підставляючи $x = \frac{\pi}{4}$ та $x = -\frac{\pi}{4}$, для визначення коефіцієнтів a та b отримаємо рівняння $a + \frac{b}{\sqrt{2}} = 0$ та $-a + \frac{b}{\sqrt{2}} = 0$ відповідно. З них знаходимо $a = b = 0$. Остаточно отримуємо $a = b = c = 0$.

Запишемо ліву частину рівняння у вигляді

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1} = \left(\frac{x}{x+1}\right)^{-(x+1)} = \left(\frac{(x+1)-1}{x+1}\right)^{-(x+1)} = \left(1+\frac{1}{-(x+1)}\right)^{-(x+1)}.$$

Покладаючи $-(x+1) = 11$, знаходимо $x = -12$.

Зрозуміло, що наведених міркувань не достатньо для того, щоб зробити висновок про єдиність знайденого x.

5. Спочатку проведемо через точку O довільний діаметр AB цього кола так, щоб він не проходив через жодну з точок M та N і не був перпендикулярний до прямої MN. Далі, використовуючи ідею розв'язання задачі 5 за 9 клас, проводимо через точки M та N прямі, перпендикулярні до AB. Зрозуміло, що такі прямі будуть паралельними.

Замість візуальної перевірки, що діаметр AB не є перпендикулярним до MN, можна провести два діаметри. Принаймні один з них гарантовано задовольнятиме цю умову.

2022 рік

7 клас

1. Це можна зробити, наприклад, так:
$$\frac{1}{2022}=\frac{3-2}{2\cdot 3\cdot 337}=\frac{1}{2\cdot 337}-\frac{1}{3\cdot 337}=\frac{1}{674}-\frac{1}{1011}.$$

2. З трьох відрізків можна скласти трикутник, якщо довжина двох найкоротших з них більша третього відрізка. Впорядкуємо довжини відрізків за зростанням: $a_1<a_2<\cdots<a_n$. Зрозуміло, що $a_2\geq 8$, бо інакше з відрізків з довжинами 5, a_2, 12 сантиметрів скласти трикутник не вдасться. Так само $a_2\leq 12$, бо відрізок з довжиною 12 см існує. Крім того, a_n не може перевищувати a_2+4, бо не вдасться скласти трикутник з відрізків з довжинами 5, a_2 та a_n сантиметрів. Тому кількість всіх відрізків не може перевищувати кількість елементів множини $\{5,a_2,a_2+1,a_2+2,a_2+3,a_2+4\}$, тобто $n\leq 6$. Приклад для $n=6$ задовольняють відрізки з довжинами 5, 8, 9, 10, 11 та 12 сантиметрів. Отже, шукане n дорівнює 6.

3. З рівності $m+n=90$ отримуємо, що
$$mn=(90-n)n=45^2-(45-n)^2\leq 45^2=2025.$$
При цьому рівність досягається, якщо $(45-n)^2=0$. Але при цьому числа $m=n=45$ не є взаємно простими. Так само при $(45-n)^2=1$ обидва ці числа парні і також не є взаємно простими. І тільки для $(45-n)^2=2$ отримаємо взаємно прості числа 43 та 47, добуток яких mn дорівнює $45^2-2^2=2025-4=2021$.

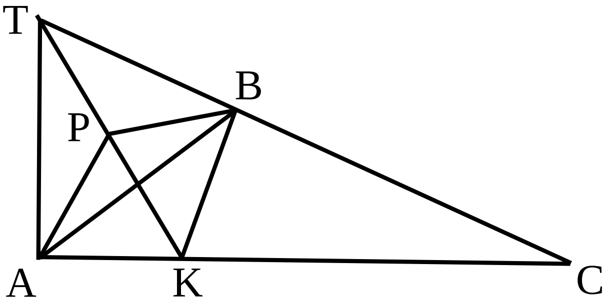
4. При діленні чотирьох послідовних натуральних чисел на трицифрове число k можуть виникнути такі 4 варіанти остач: $(r,r+1,r+2,r+3)$, $(k-3,k-2,k-1,0)$, $(k-2,k-1,0,1)$ та $(k-1,0,1,2)$. При додаванні таких остач внаслідок умови задачі отримаємо відповідно такі 4 рівняння: $4r+6=983$, $3k-6=983$, $2k-2=983$ та $k+2=983$. З них лише останнє має своїм розв'язком ціле число $k=981=109\cdot 9$. Тому остача найменшого з цих чотирьох натуральних чисел при діленні на 109 дорівнює 108.

8 клас

1. а). Може. Наприклад, для чисел 1, 2, 3, 4, 5, середнє арифметичне яких дорівнює 3, а найбільший спільний дільник 1.

б). Не може. Поділивши всі ці числа на їхній найбільший спільний дільник, отримаємо, що середнє арифметичне отриманих при цьому п'яти різних натуральних чисел мало би дорівнювати 2, а їхня сума – 10. Але така сума не може бути меншою за $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$.

2. Якщо всі елементи такої множини дорівнюватимуть нулю, то і всі суми елементів її непорожніх підмножин будуть нулями. Тому надалі, не зменшуючи загальності, будемо вважати, що $a_1 \neq 0$. Розіб'ємо усі 2^n підмножин такої множини, включаючи й порожню, на дві групи. У першу групу включимо всі підмножини, які не містять елемента a_1, а у другу – всі решта. У кожній з цих груп буде по 2^{n-1} підмножин. Тому кожній підмножині A з першої групи можна поставити у взаємно однозначну відповідність множину $B = A \cup \{a_1\}$ з другої групи. Одночасно суми елементів множин A та B дорівнювати 1 не можуть, бо вони відрізняються одна від одної на число $a_1 \neq 0$. Тому суму елементів 1 матимуть не більше 2^{n-1} підмножин. Така максимальна кількість можлива, зокрема, для множини $\{1; 0; 0; \dots; 0\}$.



3. Оскільки трикутник ABC тупокутний, то точка K лежить на стороні AC. За властивістю відрізків дотичних $PA = PB$. Також за властивістю кутів між хордою та дотичною та вписаних кутів $\angle PAB = \angle PBA = \angle ACB$. Тому $\angle APB = 180^o - 2\angle ACB$. Візьмемо на прямій BC точку T таку, що відрізок AT перпендикулярний до AC. Тоді навколо чотирикутника $ATBK$ можна буде описати коло з діаметром KT. При цьому $\angle ATB = 90^o - \angle ACB$, тому з центра цього кола відрізок AB також буде видно під кутом $180^o - 2\angle ACB$. Звідси випливає, що він збігається з точкою P. Отже, $PA = PK$ як радіуси цього кола.

4. Такий тричлен існує. Наприклад,

$$f(x) = 1011x^2 + 1012x = 1011x(x+1) + x.$$

Доданок $1011x(x+1)$ ділиться на 2022 для всіх цілих x. Тому $f(x)$ при діленні на 2022 має таку ж остачу, як і x.

5. Могло. Наприклад, як у таблицях нижче до і після перерахунку.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**О**
1	-	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	***15***
2	0	-	2	2	2	2	2	1	1	1	1	***14***
3	0	0	-	2	2	2	2	2	1	1	1	***13***
4	0	0	0	-	2	2	2	2	2	1	1	***12***
5	0	0	0	0	-	2	2	2	2	2	1	***11***
6	0	0	0	0	0	-	2	2	2	2	2	***10***
7	1	0	0	0	0	0	-	2	2	2	2	***9***
8	1	1	0	0	0	0	0	-	2	2	2	***8***
9	1	1	1	0	0	0	0	0	-	2	2	***7***
10	1	1	1	1	0	0	0	0	0	-	2	***6***
11	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	-	***5***

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**О**
1	-	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	***5***
2	1	-	1	1	1	1	1	0	0	0	0	***6***
3	1	1	-	1	1	1	1	1	0	0	0	***7***
4	1	1	1	-	1	1	1	1	1	0	0	***8***
5	1	1	1	1	-	1	1	1	1	1	0	***9***
6	1	1	1	1	1	-	1	1	1	1	1	***10***
7	2	1	1	1	1	1	-	1	1	1	1	***11***
8	2	2	1	1	1	1	1	-	1	1	1	***12***
9	2	2	2	1	1	1	1	1	-	1	1	***13***
10	2	2	2	2	1	1	1	1	1	-	1	***14***
11	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	-	***15***

9 клас

1. Можемо вважати, що $x \geq y$. Тоді

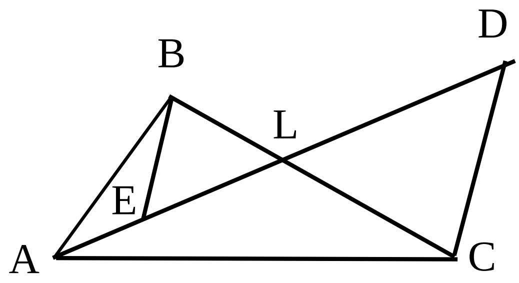
$$\frac{(x+y+|x-y|)^2}{xy} = \frac{(x+y+(x-y))^2}{xy} = \frac{(2x)^2}{xy} = \frac{4x}{y} \geq 4.$$

Мінімальне значення 4 досягається для $x = y$.

2. Розглянемо на координатній площині точки $A(-4;-2)$, $B(5;-4)$, $C(2;6)$, $D(5;6)$ та $M(x;y)$. Тоді подана нерівність набуває вигляду $AM + BM \leq CM + DM + 20$. Оскільки за нерівністю трикутника $AM - CM \leq AC = 10$, $BM - DM \leq BD = 10$, то $AM - CM + BM - DM \leq 20$, звідки і випливає потрібна нерівність.

Зауважимо, що рівність досягається лише для точки $M(5;10)$, яка лежить на перетині прямих AC та BD.

3. Оскільки $BL = BE$ та $CL = CD$ як радіуси відповідних кіл, то кути BEL, BLE, CLD та CDL також рівні. Звідси випливає й рівність кутів BEA та CLA як суміжних до рівних. Крім того, бісектриса AL також ділить кут BAC пополам. Тому з подібності трикутників BEA та CLA за двома кутами отримуємо $\frac{AL}{AE} = \frac{AC}{AB}$. А з подібності трикутників BLA та CDA (також за двома кутами) будемо мати $\frac{AL}{AD} = \frac{AB}{AC}$. Перемноживши ці рівності, знайдемо $\frac{AL}{AE} \cdot \frac{AL}{AD} = 1$, звідки і випливає потрібна рівність.



4. Оскільки квадрати натуральних чисел при діленні на 4 не можуть давати остачу 3, то $a = 1$. Якщо при цьому також $b = 1$, то вираз набуде вигляду $2^c + 7$, і з неможливості остачі 3 при діленні на 4 знайдемо, що й $c = 1$, а значення виразу дорівнює $9 = 3^2$.

Нехай тепер $b = 2$, а вираз є квадратом натурального числа n. Тоді з рівності $2^c = (n-3)(n+3)$ отримуємо, що обидва множники справа, різниця яких дорівнює 6, мають бути степенями двійки. Тому $n - 3 = 2$ та $n + 3 = 8$. Звідси знаходимо $c = 4$.

І, нарешті, для $b \geq 3$ зауважимо, що при цьому у рівності $2^b + 2^c + 4 = (n-1)(n+1)$ права частина ділиться націло на 8, а ліва – ні. Отже, інших трійок шуканих чисел, крім $a = b = c = 1$ та $a = 1$, $b = 2$, $c = 4$, немає.

5. Якщо принаймні одне з цих чисел парне, то дошку можна розбити на прямокутники 1×2 (чи 2×1). Тоді на кожен хід Петрика в одну клітинку довільного такого прямокутника у Василя завжди знайдеться відповідь у другу клітинку цього ж прямокутника. Отже, у такому разі переможе Василь.

Для дошок розмірами 1×1, 1×3 чи 3×1 перемогу Василеві забезпечить сам Петрик своїм першим чи другим ходом.

Доведемо, що у всіх інших випадках переможе Петрик.

Якщо $m = n = 3$, то він перший хід робить в центр. Василь без обмеження загальності ходить над коміркою Петрика, а далі Петрик ходить під своїм першим ходом. Тоді без обмеження загальності Василь ходить у лівий нижній кут, а Петрик відповідає йому ходом у правий стовпчик, після чого Василь змушений також зробити хід у правому стовпчику, а Петрик у цьому ж стовпчику робить останній хід і перемагає, бо вільні клітинки ще залишилися, а Василь зробити свого ходу за правилами не може.

Нехай тепер $m, n -$ непарні та принаймні одне з них не менше за 5. Будемо вважати, що це є кількість стовпчиків. Петрик, доки це можливо, буде кожним своїм ходом ставити своїх пішаків у центральний стовпчик. По завершенні таких ходів перед наступним ходом Петрика усі пішаки стоятимуть у трьох центральних стовпчиках, причому на дошці їх виставлена парна кількість. Крім того, обидва крайні стовпчики порожні. Загальна кількість полів на дошці непарна, тому або область праворуч від центрального стовпчика, або ліворуч від нього містить непарну кількість порожніх полів. Саме у цю частину дошки і ходитиме Петрик надалі. Василь змушений відповідати так само у цій частині дошки, бо центральний стовпчик вже заповнений. Оскільки у ній непарна кількість порожніх полів перед ходом Петрика, то останнього пішака поставить туди саме він. На цей хід Василь не матиме відповіді і програє, бо ще будуть вільні поля по іншу сторону від центрального стовпчика

10 клас

1. Припустимо, що такий тричлен існує. Тоді

$$\frac{a}{2022^2}+\frac{b}{2022}+c=0 \Leftrightarrow a+2022b+2022^2c=0,$$

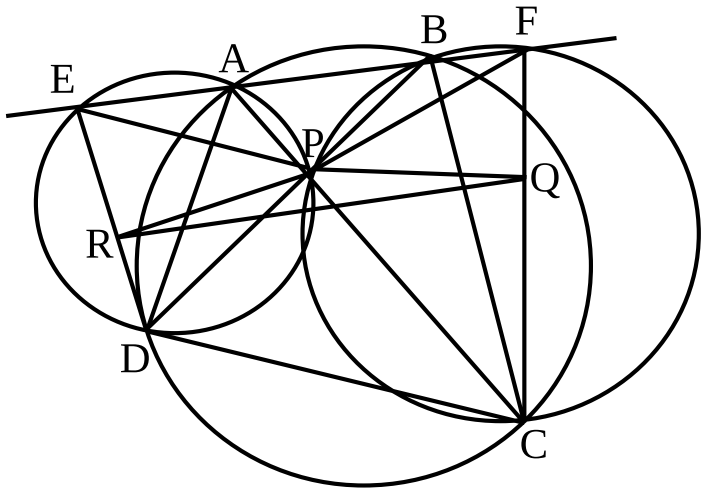
звідки випливає, що a має бути парним, що суперечить умові задачі.

2. Розглянемо перші $2n$ простих чисел і віднімемо від кожного з них число 1. З отриманого набору не вдасться отримати n таких пар, бо число 1 у сумі з довільним іншим його числом буде простим числом. Доведемо, що $n-1$ таких пар отримати завжди вдасться. Якщо серед заданих чисел парними є кількості як парних, так і непарних чисел, то, групуючи у пари парні числа з парними, а непарні з непарними, отримаємо n таких пар. Якщо ж і парних, і непарних чисел непарна кількість, то, вилучивши одне парне та одне непарне число, з інших чисел гарантовано утворимо $n-1$ таких пар.

3. Для вписаних кутів маємо такі рівності:

$\angle AEP=\angle ADP=\angle ADB=$
$=\angle ACB=\angle PCB=\angle PFB.$

Тому $EPF-$ рівнобедрений трикутник і $PE=PF.$



З аналогічних міркувань

$\angle DEP=\angle DAP=\angle DAC=$
$=\angle DBC=\angle PBC=\angle PFC.$

Отже, прямокутні трикутники PER та PFQ рівні за рівними гіпотенузами і відповідними гострими кутами. Тому $ER=FQ.$ А з рівностей кутів $\angle AEP=\angle PFB$ та $\angle DEP=\angle PFC$ випливає, що й $\angle FER=\angle EFQ$, тому $REFQ-$ рівнобічна трапеція, і $AB\parallel QR.$

4. З умови задачі випливає, що

$$\sqrt{bc}+\frac{1}{2a+\sqrt{bc}}=\sqrt{bc}+\frac{ab+bc+ca}{2a+\sqrt{bc}}=$$

$$= \sqrt{bc} + \frac{a(b+c) + bc}{2a + \sqrt{bc}} \geq \sqrt{bc} + \frac{2a\sqrt{bc} + bc}{2a + \sqrt{bc}} = 2\sqrt{bc}.$$

Аналогічно доводимо й нерівності:

$$\sqrt{ca} + \frac{1}{2b + \sqrt{ca}} \geq 2\sqrt{ca}, \quad \sqrt{ab} + \frac{1}{2c + \sqrt{ab}} \geq 2\sqrt{ab}.$$

Перемноживши всі їх три, отримуємо потрібну нерівність.

5. Позначимо білу фішку у лівій верхній клітинці буквою А, а білу фішку у правій нижній клітинці – буквою Б. Покажемо, що Петрик, якщо він розпочинає гру, має переможну стратегію. Першим ходом він пересуває чорну фішку на одну клітинку праворуч та на одну нагору. При цьому чорна фішка опиниться на один стовпчик правіше фішки А та на один рядок вище фішки Б. Далі він діє за таким алгоритмом, поки це можливо: якщо Василь ходить двічі поспіль фішкою А (Б), то Петрик рухає чорну фішку на дві клітинки праворуч (нагору); якщо Василь рухає кожну зі своїх фішок, то Петрик робить один хід праворуч і один нагору, можливо, в іншому порядку – один хід нагору і один праворуч. При цьому чорна фішка знову опиниться принаймні на один стовпчик правіше фішки А та принаймні на один рядок вище фішки Б. Тому кожен наступний свій хід Петрик зробити зможе аж до тих пір доки його фішка не опиниться на верхній або правій межі дошки. Цим він своєю траєкторією розіб'є дошку на дві частини, у кожній з яких буде по одній білій фішці. Зрозуміло, що при цьому білі фішки опинитися в одній клітинці уже не зможуть. Відповідно, Василь теж не зможе перемогти.

Доведемо, що описану стратегію Петрик зможе реалізувати. З його подвійними горизонтальними чи вертикальними ходами проблеми не виникає. А рух чорної фішки у двох різних напрямах був би неможливим лише за умови, що після ходу Василя білі фішки стоять впритул до чорної – одна зверху, а інша справа. Але такого не може статися, бо сума номерів рядка та стовпчика з чорною фішкою завжди парна, а для білих фішок такі суми мають різну парність, тому разом не можуть відрізнятися на 1+1 від суми номерів чорної фішки.

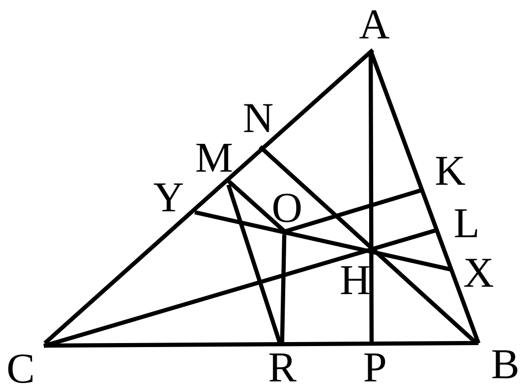
Зауважимо, що у випадку, коли гру розпочинає Василь, Петрик не зможе йому завадити. Для перемоги Василеві достатньо буде зробити 2021 хід обома фішками: фішкою А вправо, а фішкою Б нагору. Тоді Петрик ніяк не завадить Василеві наступним ходом помістити фішку А у праву-верхню клітинку, де уже стоїть фішка Б.

11 клас

1. Міг. Наприклад для чисел -2, -1, 0, 1, 2 обидва учні запишуть на своїх половинах дошки такі 10 сум: -3, -2, -1, 0, -1, 0, 1, 1, 2, 3.

2. Див. розв'язання задачі 2 за 10 клас.

3. Проведемо висоти трикутника ABC та опустимо з точки O серединні перпендикуляри до його сторін (див. мал. справа). Трикутники AHB та ROM подібні внаслідок паралельності відповідних сторін. Оскільки $RM -$ середня лінія трикутника ABC, то $\frac{BH}{MO} = \frac{AB}{MR} = 2$.



Отже, $BH = 2MO = NH$, бо й $NO -$ середня лінія трикутника YNH. Аналогічно отримаємо, що $CH = 2KO = 4HL$. Враховуючи тепер подібність прямокутних трикутників CNH та BLH за рівними вертикальними кутами при вершині H, будемо мати рівності:

$$4 \cdot \frac{NH}{CH} = 4 \cdot \frac{HL}{BH} = \frac{CH}{NH} \Rightarrow \left(\frac{NH}{CH}\right)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{NH}{CH} = \frac{1}{2}.$$

Звідси випливає, що $\angle NCH = 30^o$. Тому й $\angle ACL = 30^o$, а шуканий кут BAC дорівнює 60^o.

4. Припустимо, що така нескінченна арифметична прогресія $\{b_1^k, b_2^k, b_3^k, \ldots\}$ існує, і її різниця дорівнює d. Тоді для всіх натуральних чисел n має виконуватися рівність $b_{n+1}^k - b_n^k = d$. Але такого бути не може, бо для всіх натуральних $k > 1$ різниця

$$b_{n+1}^k - b_n^k = (b_{n+1} - b_n)\sum_{i=0}^{k-1} b_n^i\, b_{n+1}^{k-1-i} > 1 \cdot b_n^{k-1} \geq b_n \geq n$$

і вона з ростом n прямує до нескінченності.

5. Нехай у крайніх лівому та правому стовпчиках знаходиться k та l порожніх квадратів відповідно. Не зменшуючи загальності, достатньо розглянути такі два випадки: 1). $l < k$; 2). $l = k$, причому для конкретності зайнятою є нижня клітинка лівого стовпчика. Оскільки довільні дві порожні клітинки повинні бути розділені принаймні одним доміно, то до лівого краю дошки примикає не менше $k - 1 \geq l$ доміно у першому випадку та не менше $k = l$ доміно у другому випадку, бо тут ще принаймні одне доміно буде нижче від найнижчої порожньої клітинки. Тому в обох випадках знайдуться такі l доміно, що прилягають до лівого краю дошки, які можна поставити у відповідність порожнім клітинкам крайнього правого стовпчика. А кожному порожньому квадрату, що не розташований на правому краю дошки, поставимо у відповідність доміно, яке розташоване безпосередньо праворуч від цього квадрата. При цьому жодним двом порожнім квадратам не може відповідати одне і те ж доміно, бо інакше на їх місце можна було б поставити вертикально ще одне доміно, що суперечить умові задачі.

Таким чином, для кожного порожнього квадрата знайдеться окреме доміно, яке йому відповідає. Тому порожніх клітинок не більше половини клітинок, зайнятих доміно. Тому принаймні $^2/_3$ від усіх полів дошки заповнені.

Випадки $l > k$ та $l = k$ із зайнятою кутовою клітинкою крайнього правого стовпчика розглядаються аналогічно.

2023 рік

7 клас

1. Нехай сторона одного з двох рівних квадратів дорівнює x. Тоді у правого верхнього квадрата сторона дорівнює $x + 1$, у лівого верхнього – дорівнює $x+2$, лівого нижнього – дорівнює $x+3$. І ми приходимо до рівняння $x+3=2x-1$, звідки $x=4$. Отже, основа прямокутника $a=2x+3=11$, а висота $h=2x+5=13$. Тому його площа $S=11\times 13=143$.

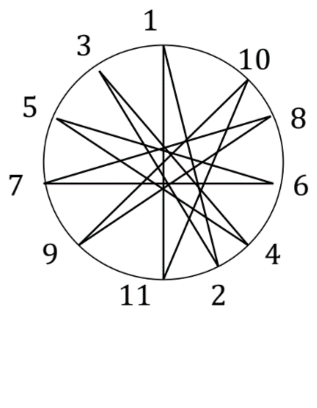
2. Розглянемо два найменші з цих чисел. Якщо їх сума від'ємна, то твердження задачі виконане. Якщо ні, то принаймні одне з цих чисел додатне. А тоді більше від нього третє за величиною число також додатне, і сума таких трьох чисел теж буде додатною.

3. Оскільки за умов задачі просте число p буде непарним, то простими мають бути чотири із таких п'яти чисел: p, $p+2$, $p+4$, $p+6$, $p+8$. Серед будь-яких трьох послідовних непарних чисел одне ділиться на 3, а серед будь-яких п'яти таких чисел одне ділиться на 5. Щоб серед цих п'яти чисел рівно одне було кратне трьом, це мусить бути число $p+4$. Воно має ділитися і на 5, інакше у такому наборі виявиться менше простих чисел, ніж 4. Позначивши таке складене число $p+4=15k$, отримаємо:

$$p + q + r + s = p + (p + 2) + (p + 6) + (p + 8) =$$
$$= (15k-4) + (15k-2) + (15k+2) + (15k+4) = 60k.$$

Вказані умови задовольняє, наприклад, набір чисел 7, 11, 13, 17.

4. Зрозуміло, що перші два з проведених таким чином відрізків не дадуть жодної точки перетину. Третій відрізок може перетинати тільки перший з них, четвертий – перші два, п'ятий – перші три, …, десятий – перші вісім. І, нарешті, одинадцятий – також лише 8 відрізків від другого до дев'ятого. Тому не вдасться отримати більше, ніж $1+2+3+4+5+6+7+8+8=44$ точки перетину. Приклад 44 таких точок наведений на малюнку справа.



8 клас

1. $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$, тому така різниця дорівнює

$$4\cdot\left(7+\sqrt{48}\right)^{2023}\cdot\left(7-\sqrt{48}\right)^{2023}=4\cdot\left(\left(7+\sqrt{48}\right)\cdot\left(7-\sqrt{48}\right)\right)^{2023}=$$
$$=4\cdot(49-48)^{2023}=4.$$

2. Розглянемо $(k-1)$ найменших з цих чисел. Якщо їх сума від'ємна, то твердження задачі виконане. Якщо ні, то принаймні одне з цих чисел додатне. А тоді більше від нього наступне за величиною число також додатне, і сума таких k чисел теж буде додатною.

3. Зрозуміло, що їжачки, які знаходяться у вершинах кожної зі сторін трикутника перетинатися між собою не можуть. Тому їх радіусів не перевищує довжини такої сторони. Додавши такого роду три нерівності для кожної зі сторін, отримаємо, що сума діаметрів їжачків не перевищує суми довжин $a+b+c$. Рівність досягається, якщо радіуси їжачків дорівнюють відстаням від вершин трикутника до точок дотику вписаного кола до сторін цього трикутника. При цьому шуканою точкою всередині трикутника буде центр такого кола. Відрізки проведені з нього до точок дотику зі сторонами виявляться дотичними до пар сусідніх їжачків.

4. Якщо Петрик на бал a розв'язав n задач, а на бал b розв'язав $33-n$ задач, то його середній бал дорівнював:

$$\frac{na+(33-n)b}{33}=b+\frac{n(a-b)}{33}.$$

Щоб це число було цілим, потрібно, щоб $n(a-b)$ ділилося націло на $33=11\times 3$. Але $a-b\leq 9<11$, тому на 11 має ділитися n. Із множини $\{0,11,22,33\}$ всі умови задачі задовольняє лише $n=11$.

5. Якщо n парне, а таблички з цифрами 1 та 0 у дітей чергуються, то такий процес може тривати нескінченно довго. При цьому щохвилини кожна дитина мінятиме табличку 0 на 1, а табличку 1 – на 0. *Та тільки, чи житимуть діти нескінченно довго*? Абсурд!

Нехай тепер n непарне. Якщо всі діти підняли таблички одного знаку, то процес зміни табличок закінчиться, так і не розпочавшись. Якщо ні, то знайдуться принаймні дві сусідні дитини, які підняли таблички з однаковими цифрами. Якщо таких сусідніх дітей з однаковими табличками і більше, то виділимо окремо всю їхню групу. Для конкретності будемо вважати, що у них таблички з цифрою 1. З обох боків вона межує з дітьми, які підняли табличку 0. У виділеній групі надалі таблички змінюватися не будуть, а сусідні діти з табличками 0 поміняють табличку лише за умови, що в іншої сусідньої з ними дитини також бути табличка 1. Таким чином, виділена група з табличками 1 лише розшириться. У результаті за скінченне число кроків або в усіх дітей будуть підняті таблички 1, або групки з не менше як по дві дитини з табличками 1 та 0 чергуватимуться, і дальших змін табличок відбуватися не буде.

9 клас

1. Оскільки $\frac{1}{3-\sqrt{8}} = \frac{3+\sqrt{8}}{(3-\sqrt{8})(3+\sqrt{8})} = 3+\sqrt{8},$ то останній множник, а з ним і весь добуток дорівнює нулю.

2. Зауважимо, що $(a+b)\,(b+c\,)(c+a) \neq 0,$ бо, наприклад, для $a+b=0,$ з поданої в умові задачі рівності $ab+(a+b)c=0$ випливає, що $ab=0$. Суперечність. Аналогічно доводимо для двох інших множників такого добутку.

Крім того, з поданої рівності діленням на abc отримаємо, що й $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0.$ Тоді також

$$0=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{c}\right)^2+2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right).$$

Звідси випливає, що $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}<0.$

Отже, ще раз враховуючи умову задачі, отримаємо:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)=-(a+b+c)\left(\frac{c}{ab}+\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}\right)=$$

$$=-\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}+\frac{a^2}{bc}\right)-\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b^2}{ca}\right)-\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c^2}{ab}\right)=$$

$$=-(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}\right)>0.$$

Тому числа $a+b+c$ та $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}$ одного знаку.

3. Прямий кут ACB спирається на діаметр AB такого кола. Тому пари точок W_A, N_A та W_B, N_B симетричні відносно середини AB – точки M. Отже, й відрізки $N_A W_B$ та $N_B W_A$, а з ними і точки P та Q, також є симетричними відносно M. З рівностей $AM = BM$ та $PM = QM$ випливає, що й $AP = BQ$.

4. Відзначимо, що за описаних умов тасування колоди кожна наступна комбінація чисел на картках може утворюватися лише з однієї передуючої їй комбінації. Оскільки максимальна можлива кількість різних комбінацій, які можуть утворитися, не більша за 100!, то на деякому скінченному кроці одна з комбінацій вперше повториться. Це і буде початкове розміщення карток у колоді, бо інакше її попередник мав би повторитися уже кроком раніше.

5. З умови задачі маємо рівність $y + 3^x = x + 3^y + 1$, з якої випливає, що $x \neq y$. Тому $x > y$. Позначимо $x - y = n$. Тоді попередню рівність можна записати у вигляді $n + 1 = 3^y(3^n - 1)$, звідки для невід'ємних y випливає, що $n + 1 \geq 3^n - 1$. Таку нерівність задовольняє $n = 1$, при якому $3^y = 1$, $y = 0$, $x = 1$.

Доведемо, що інших розв'язків немає. Достатньо буде показати, що для $n \geq 2$ виконується нерівність $3^n > n + 2$.

Для $n = 2$ це очевидно: $3^2 > 2 + 2$.

Припустимо, що для деякого $n = k \geq 2$ також $3^k > k + 2$.

Тоді й для $n = k + 1$ правильною буде нерівність

$$3^{k+1} = 3 \times 3^k > 3(k + 2) > k + 3 = (k + 1) + 2.$$

Тому внаслідок принципу математичної індукції $3^n > n + 2$ для всіх натуральних чисел $n \geq 2$.

10 клас

1. Розглянемо два можливі випадки. Якщо $n < 46$, то ліва частина нерівності правильна, а для правої частини отримуємо нерівність $(46 - n)^2 \geq 2023$, з якої знаходимо $46 - n \geq 45$, тобто $n \leq 1$. Отже, $n = 1$. Якщо ж $n > 46$, то подані нерівності можна записати у вигляді

$$46(n - 46) \geq 2023 \geq (n - 46)^2,$$

звідки знаходимо, що одночасно $n-46 \geq 44$ та $n-46 \leq 44$. Тому $n-46=44$, $n=90$. Інших розв'язків немає.

2. Оскільки подана система рівнянь є циклічною, то достатньо розглянути лише випадки $x \leq y \leq z$ та $x \leq z \leq y$.

У першому випадку, віднявши від першого рівняння третє, отримаємо рівність $a(x^3-y^3)+b(y-z)=c(z^5-x^5)$, ліва частина якої недодатна. Тому такою ж має бути і права частина, тобто $z \leq x$.

А у другому випадку, віднявши від другого рівняння третє, аналогічно отримаємо рівність $a(z^3-y^3)+b(x-z)=c(y^5-x^5)$, також з недодатною лівою частиною. Тому тут $y \leq x$.

Як бачимо, в обох випадках повинно бути $x=y=z$. Тому розв'яжемо рівняння $ax^3+bx=cx^5$, корінь $x_1=0$ якого очевидний. А з біквадратного рівняння $cx^4-ax^2-b=0$ знайдемо два інші його дійсні корені $x_{2,3}=\pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+4bc}}{2c}}$.

Таким чином, розв'язками поданої системи рівнянь є такі три трійки чисел: $(0;0;0)$, $(t;t;t)$ та $(-t;-t;-t)$, де $t=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+4bc}}{2c}}$.

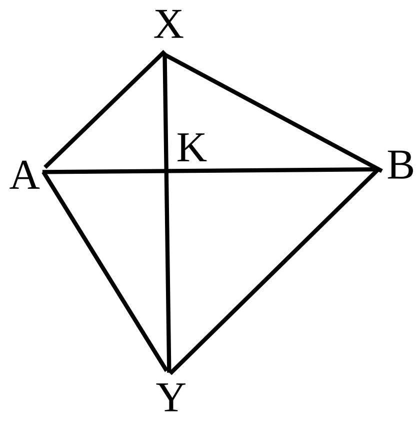
3. Зрозуміло, що відтань між точками A та B з обома цілими координатами не може бути меншою за 1.

Якщо $AB=1$ і чотирикутник $AXBY$ опуклий та вписаний, то сума його кутів AXB та AYB дорівнює 180^o. Тому принаймні один з них не менший за 90^o. Отже, його вершина має знаходитися всередині чи на межі кола з діаметром AB. Але у ньому, крім A та B, точок з обома цілими координатами не існує.

Доведемо тепер, що всі пари точок (A, B), які знаходяться на відстані, більшій за 1, задовольняють умови задачі.

Якщо ні абсциси, ні ординати цих точок не співпадають, то точки X та Y з обома цілими координатами можна вибрати на перетині прямих, які проходять через точки A та B паралельно до осей координат. При цьому прямокутник $AXBY$ буде вписаним.

Нехай тепер рівними є лише ординати точок $A(a,c)$ та $B(b,c)$, де $|a-b|>1$. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що $a<b$. Виберемо точки $X(a+1,c+1)$ та $Y(a+1,c-d)$. Оскільки відрізки AB та XY перетинаються у точці $K(a+1,c)$, то для того, щоб чотирикутник $AXBY$ був вписаним, достатньо виконання рівності $AK\times BK=XK\times YK$, звідки знаходимо $d=b-a-1$. При цьому обидві координати точок X та Y будуть цілими, а чотирикутник $AXBY$ – опуклим.



Аналогічно розглядається випадок рівності абсцис точок A та B.

4. Очевидно, що кожний перемикач не варто натискати більше одного разу. Розіб'ємо усі перемикачі на дві групи: група I – ті перемикачі, які треба натиснути, щоб перевести усі лампи в стан «ON», група II – усі інші перемикачі. Оскільки кожна лампа з'єднана з парною кількістю перемикачів, то якщо натиснути усі перемикачі групи II, то усі лампи також перейдуть в стан «ON». Дійсно виберемо лампу «A», якщо в групі I парна кількість перемикачів, що з'єднані з «A», то їх парна кількість і в групі II, при натисканні що там, що там, стан лампи «A» не зміниться. Аналогічно для непарної кількості. Як у першому, так і у другому випадку, така лампа спочатку була виключеною, а після непарної кількості натискань включилася. Сумарно в групі I та II 2024 перемикачі. Значить принаймні в одній з них не більше 1012 перемикачів, що й доводить твердження задачі.

5. Див. розв'язання задачі 5 за 9 клас.

11 клас

1. $A<B$. Справді,

$$A=\frac{\sqrt[3]{2023}}{9}<\frac{\sqrt[3]{2197}}{9}=\frac{13}{9}<\frac{3}{2},$$

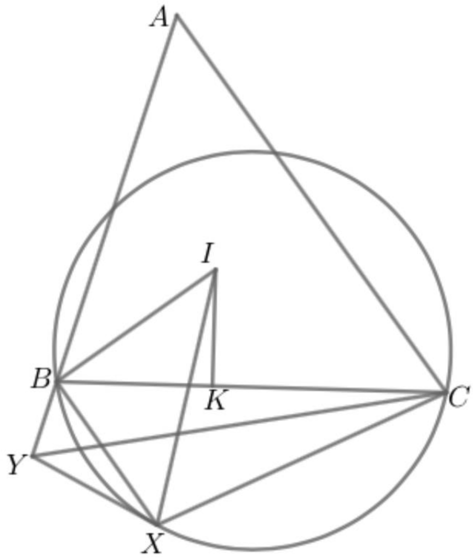
$$B > log_{2025}91125 = log_{45^2}45^3 = \frac{3}{2}.$$

2. Запишемо ці числа за спаданням: $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$. Тоді $2x_1 \geq x_1 + x_2 \geq x_1 + x_3 \geq \cdots \geq x_1 + x_n > x_1$. Тому

$$\frac{x_1 + x_2}{x_1 + x_3} \times \frac{x_1 + x_3}{x_1 + x_4} \times \ldots \times \frac{x_1 + x_{n-1}}{x_1 + x_n} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 + x_n} < \frac{2x_1}{x_1} = 2.$$

Отже, принаймні один із дробів такого добутку не перевищує $\sqrt[n-2]{2}$.

3. У трикутниках XBC та YBX кути при вершині B рівні за властивістю бісектриси, а відповідні кути при вершинах X та C – за властивістю кутів між хордою і дотичною та вписаних кутів. Тому ці два трикутники подібні. Отже, $\frac{BX}{BC} = \frac{BY}{BX}$ (див. мал. справа).



Опустимо з точки I перпендикуляр AK до сторони BC і зауважимо, що кут IBX прямий. При цьому точка K буде точкою дотику вписаного кола трикутника ABC до його сторони BC. У результаті отримаємо:

$$BY = \frac{BX^2}{BC} = \frac{IX^2 - BI^2}{BC} = \frac{CI^2 - BI^2}{BC} = \frac{(CI^2 - IK^2) - (BI^2 - IK^2)}{BC} =$$

$$= \frac{CK^2 - BK^2}{BC} = \frac{(CK - BK)(CK + BK)}{BC} = CK - BK.$$

Позначимо через p півпериметр трикутника ABC. За властивістю відрізків дотичних до вписаного кола, звідси знаходимо

$$AY = AB + BY = AB + (p - AB) - (p - AC) = AC,$$

що й треба було довести.

4. Якщо x – непарне число, то ліва частина рівності при діленні на 3 дає остачу 2, а права може давати лише остачі 0 або 1. Тому x – парне число. Покладаючи $x = 2n$, запишемо подану рівність у вигляді

$(z + 2^n)(z - 2^n) = 21^y$. Різниця першого та другого множників у лівій частині такої рівності є степенем числа 2. Тому вони не можуть мати спільним дільником ні 3, ні 7. Отже, залишається розглянути лише такі два варіанти:

а). $z + 2^n = 21^y, z - 2^n = 1$. Тоді $2^{n+1} = 21^y - 1$, що неможливо, бо права частина ділиться на 10, а ліва – ні.

б). $z + 2^n = 7^y$, $z - 2^n = 3^y$. Тоді $2^{n+1} = 7^y - 3^y$, що також неможливо для парних y, бо знову права частина ділиться на 10, а ліва – ні. Тому $y-$ непарне число. Якщо при цьому $y = 1$, то звідси знайдемо $n = 1, x = 2, z = 5$. А якщо $y > 1$, то у розкладі

$$7^y - 3^y = (7 - 3)(7^{y-1} + 7^{y-2} \times 3 + 7^{y-3} \times 3^2 + \cdots + 7 \times 3^{y-2} + 3^{y-1})$$

другий множник є непарним числом, більшим за 1. Тому рівність також буде неможливою. Отже, набір $x = 2, y = 1, z = 5$ – єдиний.

5. Для $n = 2$ та $n = 3$ контрприкладами є такі послідовності: $(1,2)$ та $(2,1,2)$. Розглянемо тепер $n \geq 4$ та множину цілих чисел $b_k = a_k - 2 \geq -1$, де $1 \leq k \leq n$. Нехай

$$S_0 = 0, S_1 = b_1, \dots, S_k = b_1 + b_2 + \cdots + b_k.$$

Оскільки $S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = -1 < 0$, то знайдеться таке найменше k, за якого сума S_k вперше стала від'ємною. Враховуючи, що всі числа $b_i \geq -1$, таке можливе лише за умов: $b_k = -1, S_{k-1} = 0$. Відповідно, і сума доданків b_i, правіших від b_k, якщо такі є, також дорівнює нулю. При $n \geq 4$ принаймні з одного боку від b_k таких доданків із сумою нуль не менше двох. Їхнє середнє арифметичне дорівнює нулю. Тоді цілим буде і середнє арифметичне відповідних доданків послідовності $(a_1, a_1, \dots, a_n)$, і воно дорівнює 2.

2024 рік

7 клас

1. Зрозуміло, що більші сторони обох менших прямокутників та сума довжин їх менших сторін дорівнюють стороні квадрата. З усіх можливих розкладів числа 30 на два натуральні множники отримуємо такі комбінації довжин більших та менших сторін прямокутників

$AEFD$ та $BCFE$ відповідно: (30, 1) та (30, 29), (15, 2) та (15, 13), (10, 3) та (10, 7), (6, 5) та (6, 1). І лише в останньому випадку площа прямокутника $AEFD$ більша за площу прямокутника $BCFE$. Тому сторона квадрата $ABCD$ дорівнює 6, а його площа дорівнює 36.

2. Не можна. Розіб'ємо поданий квадрат 10×10 на 4 менші квадрати розмірами 5×5. З умови задачі випливає, що у кожному з них повинна бути записана однакова кількість непарних чисел (у клітинках симетричних відносно того чи іншого серединного перпендикуляра до сторін квадрата). Тому кількість всіх записаних непарних чисел має ділитися на 4. Але у першій сотні їх рівно 50. Суперечність.

3. Занумеруємо по колу місця, на яких розставлені знаки, числами від 1 до 30. На п'ятнадцяти місцях з непарними номерами виявиться не більше семи позицій якогось одного з виставлених знаків. Поміняємо їх всіх на протилежні. А оскільки при цьому на місцях з парними номерами буде не більше семи позицій з іншим виставленим знаком, то, помінявши їх також протилежні, ми не більше, як за 14 таких змін доб'ємося ситуації, що усі знаки будуть чергуватися.

4. Нехай задумані числа a, b, c та d. Внаслідок рівностей

$$(a+b)+(c+d)=(a+c)+(b+d)=(a+d)+(b+c)$$

всі 6 таких сум розбиваються на 3 пари, у кожній з яких суми чисел дорівнюють $a+b+c+d$. Дві такі пари однозначно визначаються умовою задачі: $70+230=120+180=300$. Тому шоста сума дорівнює $300-110=190$. Така ситуація можлива, наприклад, для наборів задуманих чисел 0, 70, 110, 120 та 30, 40, 80, 150.

8 клас

1. Щоб добуток цифр числа дорівнював 8, таке число не повинно містити інших цифр, крім 8, 4, 2 та 1. Якщо воно містить цифру 8, то така цифра є єдиною цифрою такого числа, бо сума його цифр вже дорівнює 8. Якщо воно не містить цифри 8, але містить цифру 4, то ще однією цифрою мусить бути 2 і для суми 8 не вистачає ще двох одиниць. При цьому цифра 4 може стояти на одній з чотирьох позицій, цифра 2 – на одній з решти трьох позицій. Разом маємо $4 \cdot 3 = 12$ варіантів. І, нарешті, за відсутності цифр 8 та 4 залишаються лише варіанти з трьома цифрами 2 та двома одиницями, які у п'ятицифровому числі можна розмістити $5 \cdot 4 = 10$ способами. Тому всього шуканих чисел є $1 + 12 + 10 = 23$.

2. Нижче наведені два із багатьох можливих способів заповнення таблиці, перший з яких був запропонований автором задачі, а другий – автором посібника.

1	3	10	16
5	7	12	14
8	6	11	9
2	4	13	15

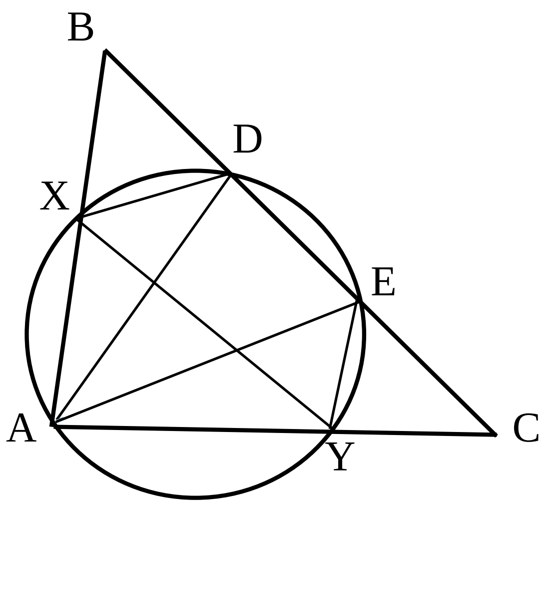
1	2	15	10
5	6	7	12
8	13	16	11
4	3	14	9

3. За властивостями вписаних кутів та вписаних чотирикутників маємо:

$$\angle BXY = \angle BXD + \angle DXY =$$
$$= \angle AED + \angle DAY \text{ та}$$

$$\angle ACB = 180^o - \angle ADE - \angle DAY.$$

А оскільки з рівності $AD = AE$ випливає рівність кутів AED та ADE, то $\angle BXY + \angle ACB = 180^o$. Тому точки B, X, Y, C лежать на одному колі.



4. Враховуючи рівності

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1) + 4(x - 1)(y - 1) =$$
$$= (x^2y^2 + 2xy + 1) + (x^2 + y^2 + 2xy - 4x - 4y + 4) =$$
$$= (xy + 1)^2 + (x + y - 2)^2,$$

отримаємо, що подана рівність можлива лише за одночасного виконання умов: $xy + 1 = 0$ та $x + y - 2 = 0$. Підставляючи з другого рівняння $y = 2 - x$ у перше з цих рівнянь, із квадратного рівняння $x(2 - x) + 1 = 0$ знайдемо $x_1 = 1 + \sqrt{2}$, $x_2 = 1 - \sqrt{2}$. Відповідно $y_1 = 1 - \sqrt{2}$, $y_2 = 1 + \sqrt{2}$.

5. З умови задачі випливає, що $a^2 + c^2 = 3(ab - 3a^2 - 2c^2)$. Тому сума $a^2 + c^2$ ділиться на 3, що можливо лише за умови подільності на 3 кожного з чисел a та c. Отже, $(a, c) \geq 3$. Вибравши $a = c = 3$, знайдемо $b = 17$. При цьому $(a, b) \cdot (b, c) \cdot (c, a) = 3$ і буде найменшим можливим значенням такого виразу.

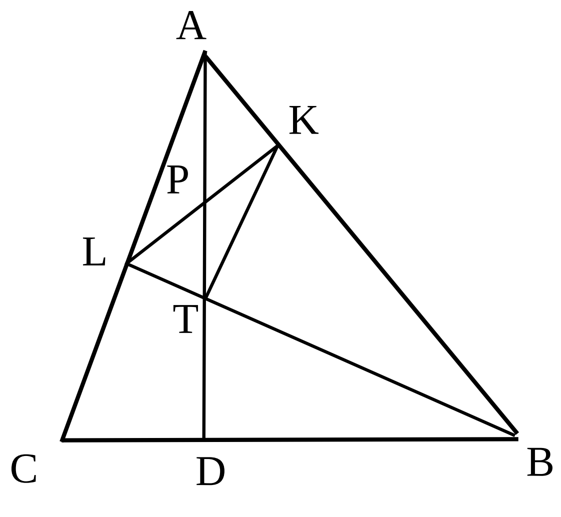
9 клас

1. Оскільки

$$\frac{2024}{2023} - \frac{2023}{2024} = \frac{2024^2 - 2023^2}{2023 \cdot 2024} = \frac{2024 + 2023}{2023 \cdot 2024} = \frac{4047}{2023 \cdot 2024}$$

і $4047 = 2 \cdot 2023 + 1$ та $4047 = 2 \cdot 2024 - 1$, то чисельник цього дробу не має спільних простих дільників ні з 2023, ні з 2024. Тому $p = 4047$.

2. Нехай $P -$ точка перетину відрізків AD та LK. З рівності кутів KBL та DBT в однойменних з ними прямокутних отримаємо, що $\angle PLT = \angle BTD = \angle PTL$.



Тому $PT = PL = PK$. Отже, точка $P -$ центр описаного кола трикутника LKT, а $LK -$ його діаметр, і кут LTK, який спирається на нього, є прямим, що й треба було довести.

3. Зауважимо, що $2023 = 17 \cdot 119 = 17 \cdot 17 \cdot 7$. Тому для перемоги Петрикові достатньо буде записати своїм першим ходом число 119, а далі записувати довільні числа, які не діляться на 17, до тих пір, поки Василь не запише число, кратне 17, і таким чином програє. Це Петрикові вдасться, бо чисел, не кратних 17, є парна кількість, а саме $.2023 - 119 = 1904$. Тому після кожного непрограшного ходу Василя у Петрика також буде можливість зробити непрограшний хід. А у Василя таких непрограшних ходів буде не більше 952.

4. У задачі 4 за 7 клас було встановлено, що шоста попарна сума дорівнює 190. Запишемо задумані Петриком числа за зростанням: $a \leq b \leq c \leq d$. Тоді зрозуміло, що повинні виконуватися рівності: $a + b = 70$, $a + c = 110$, $c + d = 230$, $b + d = 190$, а на суми $b + c$ та $a + d$ залишаються лише варіанти 120 та 180. З перших двох рівностей знайдемо, що $c - b = 40$. Якщо при цьому $b + c = 120$, то $c = 80$, і враховуючи попередні рівності, отримаємо такий набір задуманих чисел: $a = 30$, $b = 40$, $c = 80$, $d = 150$. А якщо $b + c = 180$, то $c = 110$, а шуканий набір є таким: $a = 0$, $b = 70$, $c = 110$, $d = 120$.

5. Якщо $m \geq n$, то $0 < \frac{2n-1}{m} < 2$. Тому $\frac{2n-1}{m}$ може бути цілим числом лише за умови $m = 2n - 1$. При цьому $\frac{2m-1}{n} = \frac{4n-3}{n} = 4 - \frac{3}{n}$, отже, n повинно бути дільником числа 3. Якщо $n = 1$, то також $m = 1$. А якщо $n = 3$, то $m = 5$. Аналогічно розглядаємо випадок $m < n$, для якого отримаємо необхідну умову $n = 2m - 1$. Він дасть нам ще один розв'язок: $m = 3$, $n = 5$.

10 клас

1. З умов задачі випливає, що $4b - 1 \geq 3a + 1$ та $3a - 1 \geq 2b + 1$. Якщо при цьому $4b - 1 \geq 2(3a + 1)$, тобто $4b \geq 6a + 3$, то це суперечить другій з попередніх нерівностей, з якої випливає, що $4b \leq 6a - 3$. Аналогічно нерівність $3a - 1 \geq 2(2b + 1)$ вступає у суперечність з нерівністю $4b - 1 \geq 3b + 1$. Тому обидві подільності можливі лише за одночасного виконання умов: $4b - 1 = 3a + 1$ та $3a - 1 = 2b + 1$. З системи цих рівнянь знаходимо $a = b = 2$.

2. Див. розв'язання задачі 2 за 9 клас.

3. а). Оскільки жителів острова непарне число, то принаймні в одного з них парна кількість друзів. Враховуючи умову задачі, їх у такому разі рівно 2. Якщо би всі жителі острова були брехунами, то цей брехун про своїх двох знайомих сказав би правду, чого бути не може. Тому принаймні один лицар на острові є. Він може виявитися єдиним. Наприклад, якщо 2022 брехуни розділилися на пари знайомих між собою, а ще два знайомі з єдиним лицарем острова і інших знайомств немає. Тоді всі умови задачі виконані, бо тільки лицар сказав правду. Тому щонайменше на острові може бути 1 лицар.

б). Якщо кількість лицарів на острові дорівнює n, причому кожен з них знайомий з двома брехунами, то маємо сумарно $2n$ знайомств типу «лицар-брехун». А оскільки за умовою задачі кожен брехун може мати не більше трьох знайомих, то для забезпечення такої сумарної кількості знайомств брехунів має бути не менше $2n/3$, тобто разом на острові повинно проживати не менше $5n/3$ жителів. З іншого $\frac{5n}{3}$ не повинно перевищувати 2025. Тому $n \leq 1215$. Рівність тут може досягатися, якщо всі жителі острова розділені на п'ятірки з трьох лицарів та двох брехунів і кожен лицар п'ятірки знайомий лише з цими двома брехунами, а кожен брехун – лише з цими трьома лицарями. Тому найбільше на острові може виявитися 1215 лицарів.

4. Оскільки у жодній з купок немає парної кількості монет, то на першому кроці обов'язково доведеться поєднувати якісь дві купки, після чого може виникнути одна з таких трьох ситуацій з кількістю монет у двох купках, що залишаться: 1) 81 та 234 монети, 2) 115 та 200 монет, 3) 119 та 196 монет. У кожному з цих випадків кількості монет, які залишаються, мають спільний непарний дільник – 3, 5 та 7 відповідно. І якими би не були наступні кроки, такий дільник і надалі залишатиметься спільним. Тому отримати купки з менше, ніж трьома монетами не вдасться.

5. Зауважимо, що на кожному кроці при доливанні одного літра жовтої фарби концентрація синьої фарби у розчині зменшується вдвічі, а при доливанні одного літра синьої фарби попередню концентрацію треба поділити на 2 і додати до отриманого результату ½. Це означає, що після кроку n така концентрація буде дорівнювати

$$k_n = \frac{a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 + \cdots + 2^n a_n}{2^{n+1}},$$

де $a_i = 0$ відповідає доливанню жовтої фарби, $a_i = 1$ – доливанню синьої фарби, $a_0 = 1$ – нульовому кроку, коли до одного літра жовтої фарби долили один літр синьої і все старанно перемішали. То ж залишається знайти найменше натуральне число n, для якого існує дріб вигляду $\frac{a}{2^{n+1}}$ з непарним чисельником, який знаходиться між 0,83 та 0, 84. Методом перебору встановлюємо, що таким є дріб $\frac{107}{2^7}$. Тому найменшою шуканою кількістю кроків буде $n = 6$. Оскільки $107 = 1 + 2 + 2^3 + 2^5 + 2^6$, то з єдиності представлення чисел у двійковій системі числення отримуємо, що досягнути бажаного результату можна лише, доливаючи синю фарбу на першому, третьому, п'ятому та шостому кроках, і жовту – на другому та четвертому кроках.

11 клас

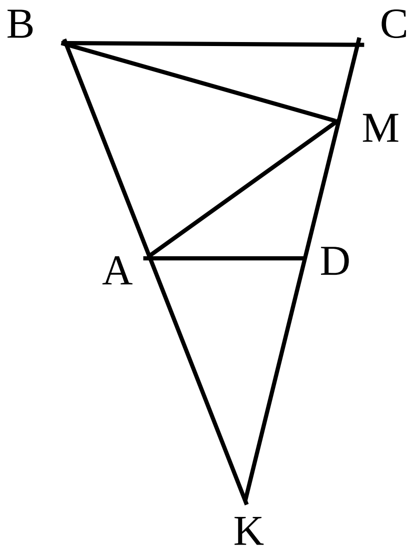
1. З рівності

$$\frac{a + b + c}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a + b + c + d}{4},$$

яка відповідає умові задачі, випливає, що

$$3d = 5(a + b + c) \geq 5(1 + 2 + 3) = 30,$$

причому d ділиться на 5. Для $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ отримуємо його найменше можливе значення 10.



2. Продовжимо бічні сторони трапеції до перетину у точці K. При цьому AD буде середньою лінією трикутника BCK, тому $AK = AB = AM$. Отже, A – центр описаного кола трикутника BMK з діаметром BK. Кут

BMK, який спирається на цей діаметр, є прямим, що й треба було довести.

3. Для парного числа $n = 2k$ перемагає Петрик. Своїм першим ходом він записує число k, залишаючи при кожному такому k парне число непарних чисел. Щоб не програти, Василь змушений записувати саме їх, на що у Петрика завжди знайдеться аналогічний хід у відповідь. Врешті решт непарні числа вичерпаються і Василь змушений буде записати парне число, таким чином програвши.

Якщо n є простим непарним числом або добутком попарно різних таких чисел, то переможе Василь. Яке б число своїм попереднім ходом не записав Петрик і при цьому ще не програв, то принаймні для одного із таких простих множників p не було виписане жодне число, кратне йому. А таких чисел є непарна кількість. Відповідно, чисел, не кратних йому, є парна кількість. Якщо виписувалися лише вони, то на кожен хід Петрика у Василя завжди знаходилася аналогічний непрограшний хід у відповідь. Врешті решт Петрик змушений буде записати перше число, кратне p, і таким чином програти.

А якщо непарне число n ділиться на квадрат простого числа p, то, Петрику для перемоги своїм першим ходом потрібно записати число $^{n}/_{p}$, після чого Василь змушений буде записувати числа, не кратні p. І оскільки таких є парна кількість, а саме $n - {}^{n}/_{p}$, то у Петрика завжди буде аналогічний непрограшний хід у відповідь. Врешті решт Василеві доведеться записати число, кратне p, та програти.

4. Нехай $a = 1 - \varepsilon,\ b = 2025 - \varepsilon,\ c = \frac{2024}{(1-\varepsilon)(2025-\varepsilon)} > \frac{2024}{2025}$, де $\varepsilon -$ достатньо мале додатне число. Добуток таких чисел дорівнює 2024, а

$$\lim_{\varepsilon \to 0}(\{a\} + \{b\} + \{c\}) = 2 + \frac{2024}{2025}.$$

Тому число M не може бути меншим за цю границю.

Доведемо, що більшого значення сума $\{a\} + \{b\} + \{c\}$ набувати не може. Припустивши протилежне, покладемо $a = m - x,\ b = n - y$,

$c = k - z$, де m, n, $k -$ натуральні числа, x, y, z належать проміжку $(0,1]$, причому $x + y + z < {}^{1}/_{2025}$. Оскільки за умовою задачі $abc = 2024$, то $mnk > 2024$. Покладаючи $mnk = 2024 + l$, з рівності

$$(m - x)(n - y)\,(k - z) = 2024$$

отримаємо, що

$$l - (mnz + nkx + mky) + (myz + nxz + kxy) - xyz = 0.$$

Але за зробленого припущення така рівність виконуватися не може, бо $myz + nxz + kxy > xyz$ та

$$mnz + nkx + mky < (2024 + l)(x + y + z) < \frac{2024 + l}{2025} \le l$$

для всіх натуральних чисел l.

Отримана суперечність доводить, що сума $\{a\} + \{b\} + \{c\}$ не може набувати значень, більших за $2 + \frac{2024}{2025}$.

Для порівняння наводимо доведення цього факту авторами задачі.

Тепер припустимо, що для деяких a, b, c з $abc = 2024$ виконується $\{a\} + \{b\} + \{c\} > 2 + \frac{2024}{2025}$. Без обмеження загальності, $a \le b \le c$.

Лема. Нехай $a \le b$ - два додатні дійсні числа. Нехай $a_1 = \frac{ab}{\lceil b \rceil}$. Тоді $\{a_1\} \ge \{a\} + \{b\} - 1$.

Доведення. Позначимо $b_1 = \lceil b \rceil$. Помітимо, що $a_1 b_1 = ab$, а також $a_1 \le a \le b \le b_1$. З методу Штурму звідси випливає, що $a_1 + b_1 \ge a + b$. Покажемо це явно:

$$a_1 + b_1 \ge a + b \Leftrightarrow \frac{ab}{b_1} + b_1 \ge a + b \Leftrightarrow ab + b_1^2 \ge ab_1 + bb_1 \Leftrightarrow (b_1 - a)(b_1 - b) \ge 0.$$

Отже, $a_1 + b_1 \ge a + b \Rightarrow b_1 - b \ge a - a_1$. Помітимо, що $b_1 - b = 1 - \{b\}$ (або 0, якщо b ціле, тоді $a_1 = a$ і лема очевидно виконується), а

$$a - a_1 = ([a] + \{a\}) - ([a_1] + \{a_1\}) \ge \{a\} - \{a_1\}.$$

Отже, маємо $1 - \{b\} \ge \{a\} - \{a_1\}$, що й вимагалось довести.
Лема доведена.

Повернемось до задачі. Нехай $b_1 = \frac{bc}{\lceil c \rceil}$, тоді $\{a\} + \{b_1\} \ge \{a\} + \{b\} + \{c\} - 1$. Тепер розглянемо число $t = \frac{ab_1}{\max(\lceil a \rceil, \lceil b_1 \rceil)}$, маємо $\{t\} \ge \{a\} + \{b_1\} - 1$. При цьому всьому, $t = \frac{2024}{n}$ для якогось натурального числа n (а саме для $n = \lceil c \rceil \max(\lceil a \rceil, \lceil b_1 \rceil)$, але нам це неважливо). Тоді $\{t\} \le \frac{2024}{2025}$: очевидно при $n \ge 2025$, а при $n \le 2024$ знаменник $\{t\}$ буде не більшим за 2024 і тоді також $\{t\} \le 1 - \frac{1}{2024} = \frac{2023}{2024} < \frac{2024}{2025}$.

Отже, $\{a\} + \{b\} + \{c\} \le \{a\} + \{b_1\} + 1 \le \{t\} + 2 \le 2 + \frac{2024}{2025} = M$.

5. Насамперед зауважимо, що для довільного натурального числа $k > 1$ числа $k! + 2, k! + 3, \ldots, k! + k$ є складеними. Тому для достатньо великих k відстань між сусідніми простими числами також може виявитися достатньо великою. Далі відзначимо, що $f(p!) = p$ для довільного простого числа p. Виберемо тепер просте число p таким, щоб наступне за ним просте число було більшим за нього не менше, ніж на довільне наперед задане число K. Оскільки $p! + 1$ не має спільних дільників з $p!$, то воно має ділитися на просте число, більше за p, отже, не менше за $p + K$. Тому $f(p! + 1) \geq p + K$. А значить

$$g(p!) = f(p! + 1) - f(p!) \geq p + K - p = K.$$

Це й означає необмеженість функції $g(n)$.

2025 рік

I тур

7 клас

1. Кут AOC прямий, а кути FOE та BOD вертикальні. Тому

$$4x + 5x = \angle AOB + \angle FOE = \angle AOB + \angle BOD =$$

$$= \angle AOC + \angle COD = 90° + 36° = 126°.$$

Отже, $x = 126°/9 = 14°$.

2. Розв'яжемо загальнішу задачу. Нехай число 399…9600…01 містить у записі n дев'яток та n нулів. Тоді його можна записати у вигляді

$$3 \cdot 10^{2n+2} + (10^n - 1) \cdot 10^{n+2} + 6 \cdot 10^{n+1} + 1 =$$

$$= 4 \cdot 10^{2n+2} - 4 \cdot 10^{n+1} + 1 = (2 \cdot 10^{n+1} - 1)^2.$$

3. $n \neq 3$, бо якщо команда-переможець двічі зіграла внічию, то принаймні ще одна з решти двох команд матиме не менше двох очок незалежно від того, як вони зіграють між собою. А якщо команда-переможець раз виграла, а раз програла, то принаймні ще одна команда матиме не менше трьох очок.

$n \neq 4$, бо якщо команда-переможець тричі зіграла внічию, то решта 3 команди у матчах між собою разом наберуть ще не менше 6 очок, отже, принаймні одна з них у сумі також матиме не менше трьох очок. А якщо переможець раз виграла, раз зіграла внічию і раз програла, то команда, якій вона програла, має програти обидва свої матчі решті двом командам. Але, як би ці команди не зіграли між собою, принаймні одна з них також матиме не менше чотирьох очок.

Зрозуміло також, що як для $n = 3$, так і для $n = 4$ у разі більшої кількості поразок, ніж перемог, то команда тим більше не зможе набрати найбільше очок.

Тому залишається довести, що для $n = 5$ всі умови задачі можуть бути виконані. Для цього достатньо навести приклад відповідної турнірної таблиці:

Команда	I	II	III	I	V	М'ячі	Очки
I	-----	0 : 2	0 : 1	2 : 0	3 : 0	5 : 3	6
II	2 : 0	-----	0 : 0	0 : 1	0 : 0	2 : 1	5
III	1 : 0	0 : 0	-----	0 : 0	0 : 1	1 : 1	5
IV	0 : 2	1 : 0	0 : 0	-----	0 : 0	1 : 2	5
V	0 : 3	0 : 0	1 : 0	0 : 0	-----	1 : 3	5

Отже, $n = 5$ і є найменшою можливою кількістю команд турніру.

4. Зрозуміло, що найменше з цих чисел $a < 5$, бо інакше $a + b + c \geq 5 + 6 + 7 > 16$.

Якщо $a = 4$, то $b + c = 12$, $bc = 30$, причому $5 \leq b < c$. Тоді перша з цих рівностей можлива лише при $b = 5$, $c = 7$, а друга – лише при $b = 5$, $c = 6$.

Якщо $a = 3$, то $b + c = 13$, $bc = 40$, причому $4 \leq b < c$. Усі ці умови задовольняють лише числа $b = 5$, $c = 8$. А пари $b = 4$, $c = 9$ та $b = 6$, $c = 7$ задовольняють першу та третю з цих умов, але не задовольняють другу.

Якщо $a = 2$, то $b + c = 14$, $bc = 60$, причому $3 \leq b < c$. Але кожен з добутків $3 \cdot 11$, $4 \cdot 10$, $5 \cdot 9$, $6 \cdot 8$ менший за 60.

Якщо $a = 1$, то $b + c = 15$, $bc = 120$, причому $2 \leq b < c$. Але кожен з добутків bc від $2 \cdot 13$, $3 \cdot 12$ до $7 \cdot 8$ менший за 120.

Таким чином, єдина шукана трійка: $a = 3$, $b = 5$, $c = 8$.

8 клас

1. Оскільки $\frac{1}{b+\frac{1}{c}} < 1$ для довільних натуральних чисел b, c, то

$$a = 20, \qquad \frac{1}{b + \frac{1}{c}} = 0{,}25 = \frac{1}{4}, \qquad b + \frac{1}{c} = 4.$$

Але $b+\frac{1}{c}$ може бути цілим числом лише при $c=1$. При цьому $b=3$. Таким чином, маємо єдиний розв'язок: $a=20$, $b=3$, $c=1$.

2. Можна. Для цього, наприклад, достатньо розфарбувати клітинки такої таблиці у шаховому порядку з чорними кутовими клітинками, і у чорні клітинки довільним чином записати числа від 1 до 1013, а у білі – також довільним чином решту чисел від 1014 до 2025. Тоді кожне число у чорній клітинці буде меншим за всіх своїх сусідів, а кожне число у білій клітинці – більшим за всіх своїх сусідів.

3. $n\neq 4$, бо діагоналі кожного прямокутника рівні. Також $n\neq 5$, бо вершини п'ятикутника можна розташувати по колу так, щоб усі 5 дуг кола між сусідніми вершинами були рівними. Діагоналі такого п'ятикутника також рівні як хорди, які стягують рівні дуги.

Нехай тепер $n=6$, і у деякому шестикутнику $ABCDEF$ усі діагоналі рівні. Тоді ABD та ABE – рівні рівнобедрені трикутники зі спільною основою AB. Тому вони або збігаються, або симетричні відносно AB. В обох цих випадках отримуємо суперечність, бо ні вершини D та E шестикутника $ABCDEF$ не можуть збігатися, ні його сторони AB та DE перетинатися. Тому $n=6$ є шуканим.

4. Нехай швидкість Грицька становила v км/год. Оскільки всі велосипедисти розпочинали і закінчували рух одночасно в одній і тій же точці, то, не зменшуючи загальності, можна вважати, що Грицько весь час залишався на місці, а Петрик та Василь рухалися стосовно нього зі швидкостями $30-v$ та $20-v$ відповідно. Петрик обігнав Грицька 8 разів, тому відносно нього він проїхав ще 9 повних кіл. Відповідно, Василь, обігнавши Грицька двічі, проїхав ще 3 такі кола. Отже, для їхніх відносних швидкостей виконується рівність $\frac{30-v}{20-v}=\frac{9}{3}$, з якої находимо $v=15$ км/год.

5. Будемо шукати ці числа такими, що задовольняють рівності:

$$a^{2021}=11c^{2022},\ b^{2023}=11d^{2024}.$$

Покладаючи $a=11c$, $b=11d$, звідси послідовно знайдемо:

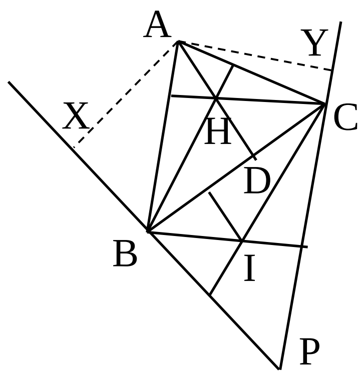
$$c = 11^{2020}, d = 11^{2022}, a = 11^{2021}, b = 11^{2023}.$$

9 клас

1. Найменша цифра такого числа не може бути більшою за 2, бо інакше сума його цифр буде більшою за 7. Якщо така цифра дорівнює 2, то маємо лише такі 3 шукані трицифрові числа: 223, 232 та 322. Якщо ж вона дорівнює 1, то отримаємо ще 12 потрібних чисел: 115, 151, 511, 124, 142, 214, 241, 412, 421, 133, 313, 331. Всього – 15 чисел.

2. Можна. Для цього, наприклад, достатньо спочатку записати по колу у порядку зростання всі непарні числа від 1 до 2025, а за ними у порядку спадання всі парні числа від 2024 до 2. При цьому різниці між кожними двома сусідніми числами дорівнюватимуть або 2^1, або 2^0.

3. Нехай дотичні, проведені з вершин B та C до кола з центром A та радіусом AD, дотикаються до цього кола у точках X та Y відповідно (див. малюнок справа). Тоді точка A лежить на перетині бісектрис кутів CBX та BCY. Отже, сума цих кутів



$$\angle CBX + \angle BCY = 2(\angle CBA + \angle BCA) =$$
$$= 2(180° - \angle ABC) > 180°.$$

Тому точки A та P знаходяться по різні сторони прямої BC, а центр I кола, вписаного у трикутник PBC, лежить на перетині бісектрис цього трикутника. Враховуючи, що кути між бісектрисами кутів трикутника PBC і бісектрисами відповідних його зовнішніх кутів є прямими, отримаємо, що BI та CI паралельні до відповідних висот трикутника ABC. Тому чотирикутник $BHCI$ є паралелограмом. Отже, трикутники BCH та CBI рівні за трьома сторонами. Тому й висоти, проведені у них до сторони BC, також рівні. А це означає, що радіус кола, вписаного у трикутник PBC, дорівнює HD, що й вимагалось довести.

4. Враховуючи для кожного натурального числа n рівність

$$n \cdot n! = \big((n+1) - 1\big)n! = (n+1)! - n!,$$

отримаємо

$$2 + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + 4 \cdot 4! + \cdots + 2023 \cdot 2023! =$$
$$= 2! + (3! - 2!) + (4! - 3!) + \cdots + (2024! - 2023!) = 2024!$$

Тому поданий дріб дорівнює

$$\frac{2024!}{2022!} = 2023 \cdot 2024 = (7 \cdot 17^2) \cdot (2^3 \cdot 11 \cdot 23).$$

Отже, найбільшим простим дільником цього числа є 23.

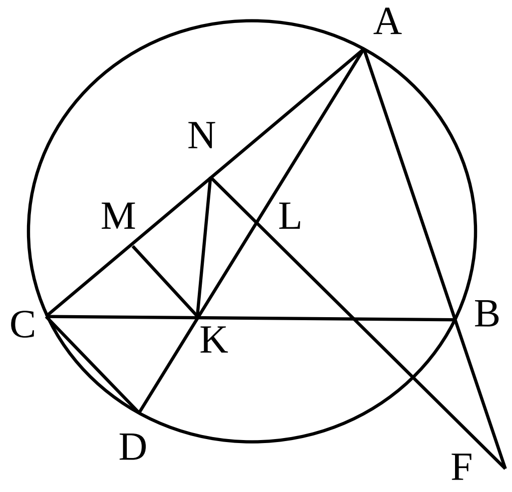
5. Щоб натуральне число мало непарну кількість різних дільників, необхідно і достатньо, щоб воно було квадратом натурального числа. Справді, дільники натурального числа A можна розбити на пари вигляду $\left(a, \frac{A}{a}\right)$. І лише для числа $A = a^2$ дільник $a = \frac{A}{a}$ не матиме пари. Тому, з врахуванням умови про його подільність на 2 і на 5, це число має вигляд $2^{2m} \cdot 5^{2n} \cdot k^2$, де m, n, k – деякі натуральні числа. Кількість таких дільників визначається за формулою $(2m + 1)$ $(2n + 1)l$, де – натуральне число, яке дорівнює кількості різних дільників числа k^2. Оскільки $2021 = 43 \cdot 47$, і числа 43 та 47 є простими, то $l = 1$. Відповідно, й k^2. Таким чином, залишається зробити вибір лише між двома числами: $2^{42} \cdot 5^{46}$ та $2^{46} \cdot 5^{42}$. Обидва вони закінчуються на 42 нулі, але, поділивши перше з них на друге, переконуємося, що меншим з них є друге число.

10 клас

1. Спочатку сума таких чисел дорівнювала $11 \cdot 10 = 110$. Після виконаних дій вона стала рівною $110 + 4 \cdot 20 - 7 \cdot 24 = 22$. Тому середнє арифметичне отриманих чисел дорівнює $\frac{22}{11} = 2$.

2. Див. розв’язання задачі 2 за 9 клас.

3. Позначимо через N точку перетину прямої FL зі стороною AC (див. малюнок справа). Оскільки кут ACD, який спирається на діаметр AD, є прямим, то $CNLD$ – прямокутна трапеція. Її середня лінія KM є одночасно медіаною та висотою трикутника CKN. Отже, цей трикутник рівнобедрений, і його кути при основі CN рівні. Тому також $\angle KNF = \angle DCB$. Але $\angle DCB = \angle DAB$ внаслідок рівності вписаних кутів, які спираються на дугу BD. Отже, $\angle KAF = \angle KAB = \angle DCB = \angle KNF$,



тобто навколо чотирикутника можна описати коло. Тоді також $\angle AKF = \angle ANF = 90°$, що й доводить перпендикулярність FK та AD.

4. Знайдемо четвертий елемент цієї послідовності $a_4 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ і доведемо, що всі наступні її елементи будуються без скорочення відповідних дробів. Для цього достатньо довести, що для кожного натурального числа k дріб $\frac{3+2k}{4+3k}$ нескоротний. А це випливає з рівності $3(3+2k) - 2(4+3k) = 1$. Таким чином, найбільшим індексом n, для якого відповідний член послідовності будується скороченнм вказаного дробу, є $n = 4$.

5. Розглянемо вектори $\vec{a} = \left(\sqrt{x}, \sqrt{3y}, \sqrt{5z}\right)$ та $\vec{b} = \left(\sqrt{\frac{1}{x}}, \sqrt{\frac{3}{y}}, \sqrt{\frac{5}{z}}\right)$.

Добуток довжин векторів не менший за модуль їх скалярного добутку, тому

$$(x + 3y + 5z)\left(\frac{1}{x} + \frac{3}{y} + \frac{5}{z}\right) \geq \left(\sqrt{x} \cdot \sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{3y} \cdot \sqrt{\frac{3}{y}} + \sqrt{5z} \cdot \sqrt{\frac{5}{z}}\right)^2 = 81.$$

З врахуванням умови задачі звідси маємо $\frac{1}{x} + \frac{3}{y} + \frac{5}{z} \geq \frac{81}{72} = \frac{9}{8}$. Далі, враховуючи рівності $8 + 3 \cdot 8 + 5 \cdot 8 = 72$ та $\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{5}{8} = \frac{9}{8}$, робимо висновок, що шуканим найменшим значенням є $\frac{9}{8}$ і воно досягається при $x = y = z = 8$.

11 клас

1. Якщо шуканим трицифровим числом є число $\overline{abc}$, то з умови задачі маємо рівність $100a + 10b + c = 5abc,$ з якої випливає, що цифра c кратна 5. При цьому $c \neq 0$, бо $100a + 10b > 0$. Отже, $c = 5$, і $100a + 10b + 5 = 25ab$, тобто $20a + 2b + 1 = 5ab$. Звідси маємо, що цифра b повинна бути непарною, а $2b + 1$ ділитися на 5. Обидві ці вимоги задовольняє лише $b = 7$. Тоді з рівняння $20a + 15 = 35a$ знаходимо $a = 1$. Тому єдиним шуканим трицифровим числом є 175.

2. Переможе Михайло, якщо, наприклад, дотримуватиметься такої стратегії. Першим своїм ходом від витре число 2025, а далі кожного разу на витирання Олексієм числа k відповідатиме витиранням числа $2025 - k$. Це йому вдасться, оскільки числа від 1 до 2024 можна розбити 1012 пар, у кожній з яких сума чисел дорівнює 2025. Коли залишаться 2 числа, це будуть числа однієї з цих пар, і їх сума дорівнюватиме квадрату числа 45.

3. Див. розв'язання задачі 3 за 9 клас.

4. Див. розв'язання задачі 5 за 9 клас.

5. Рівності з умови задачі можна записати у вигляді системи таких трьох рівнянь:

$$a(a+1)=b+1,\ b(b+1)=c+1,\ c(c+1)=a+1.$$

Якщо у ній деяке з чисел a, b, c дорівнює -1, то два інші також дорівнюватимуть -1. Якщо ж жодне з них не дорівнює -1, то перемножимо ці рівності і скоротимо обидві частини добутку на $(a+1)(b+1)(c+1)$. У результаті знайдемо $abc=1$. А додавши ці рівності, будемо мати, що $a^2+b^2+c^2=3$.

З іншого боку, при цьому за нерівністю між середнім арифметичним та середнім геометричним отримуємо, що

$$a^2+b^2+c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=3,$$

причому рівність можлива лише за умови $a^2=b^2=c^2=1$. Якщо жодне з чисел a, b, c не дорівнює -1, то всі вони дорівнюють 1.

Таким чином, умову задачі задовольняють лише такі дві трійки чисел: $a=b=c=1$ та $a=b=c=-1$.

II тур

7 клас

1. Розфарбуємо отримані трикутники зі сторонами 1 у синій та жовтий кольори у шаховому порядку так, щоб кожні два з них зі спільною стороною були різного кольору, причому всі трикутники, які прилягають сторонами до сторін великого трикутника, виявилися синього кольору. Тоді над кожним із $\frac{n(n-1)}{2}$ трикутників жовтого кольору опиниться відповідний трикутник синього кольору, який має з жовтим спільну сторону. Припустимо, що Олексій записав у жовтий трикутник число k, а синій трикутник над ним – число m. Якщо $m \geq k$, то сума чисел у сусідніх з жовтим трикутниках виявиться більшою за m, оскільки до неї, крім доданка m, входитимуть ще й два доданки із сусідніх з ним синіх трикутників зліва чта справа. Отже, вона не зможе дорівнювати k. А якщо $m < k$, то сума чисел навколо синього трикутника внаслідок доданка k перевищить m. Тому у кожній такій парі із синього та жовтого трикутників Михайло зможе отримати не більше однієї цукерки. Отже, всього він отримає щонайбільше $n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ цукерок. Саме така кількість цукерок опиниться у нього, якщо, наприклад, Олексій у всі жовті трикутники запише довільні натуральні числа, а у сині трикутники – числа, які дорівнюють сумам чисел, записаних у сусідніх з ними жовтих трикутниках.

2. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що $a < b < c$. Тоді з нерівностей $a + b < a + c < b + c$ та $ab < ac < bc$ випливає що записаних на дошці чисел було не менше трьох. Щоб їх було рівно три, повинні виконуватися рівності: $a + b = ab$, $a + c = ac$ та $b + c = bc$, які можна записати у вигляді: $(a - 1)(b - 1) = 1$, $(a - 1)(c - 1) = 1$ та $(b - 1)(c - 1) = 1$. Оскільки при цьому жоден з множників зліва не може дорівнювати нулю, то, наприклад, з першої та другої з них отримаємо $b - 1 = c - 1$, тобто $b = c$, що вже суперечить умові задачі. Залишилось довести, що всього чотири різні числа могли бути записані. Для цього виберемо числа $a < b < c$ так, щоб виконувалися рівності $a + b = ab$ та $b + c = ac$. Звідси маємо $a = b(a - 1)$ та $b = c(a - 1)$. Покладаючи $a = {}^3/_2$, послідовно знаходимо $b = 3$ та $c = 6$. За цього вибору на дошці виявляться записаними такі чотири різні числа: ${}^9/_2$, ${}^{15}/_2$, 9 та 18.

Зауважимо, що при цьому у ролі a можна було би вибрати довільне число з інтервалу $(1; 2)$ та отримати шукану трійку чисел:

$$a < b = \frac{a}{a-1} < c = \frac{b}{a-1}.$$

3. Зауважимо, що число $\overline{ae}$ ділиться на 11 лише за умови $a = e$. При цьому число $\overline{abe} = 11(9a + b) + a - b + e$ ділиться на 11 лише за умови, що $a - b + e = 2a - b$ ділиться на 11. І за виконання двох попередніх умов число $\overline{abde} = 11(91a + 9b + d) - a + b - d + e$ ділиться на 11 лише, якщо $a - b + d - e = d - b$ ділиться на 11, тобто $d = b$. Враховуючи всі три ці умови отримаємо

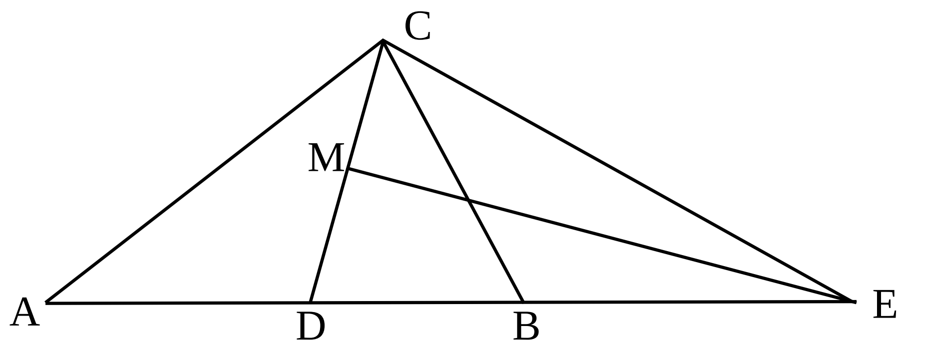
$$\overline{abcde} = \overline{abcba} = 11(909a + 92b + 9c) + 2a - 2b + c.$$

Таким чином, $2a - 2b + c$ не повинно ділитися на 11. Разом з подільністю $2a - b$ на 11 звідси випливає, що $2a - c$ не має ділитися націло на 11.

Далі зауважимо, що для всіх ненульових цифр a, крім $a = 5$, існує єдина цифра b така, що $2a - b$ ділиться на 11. Відповідно, для кожного такого a існує лише єдина ненульова цифра c така, що $2a - c$ ділиться на 11. Отже, кожному з восьми можливих виборів a відповідають єдині вибори цифр b, d, e та 8 варіантів вибору цифри c, необхідних для відкриття замка сейфу. Тому щонайбільше за $8 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 1 = 64$ спроби Петрик гарантовано відкриє замок.

До цього ж результату можна було прийти, виписуючи послідовно всі можливі варіанти для чисел $\overline{ae}$, $\overline{abe}$, $\overline{abde}$, як це було зроблено у наданих укладачами вказівках до розв'язування задач.

4. Нехай точка M – середина бісектриси CD (див. малюнок нижче).



Оскільки EM – одночасно і висота, і медіана трикутника CDE, то цей трикутник рівнобедрений з основою CD, і його кути при ній рівні. Враховуючи також, що бісектриса CD ділить кут ACB пополам, отримаємо $\angle BAC = \angle EDC - \angle ACD = \angle ECD - \angle BCD = \angle BCE$.

8 клас

1. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що $a < b < c$. Тоді з нерівностей $a + b < a + c < b + c$ випливає що різних записаних на дошці чисел було не менше трьох. Їх могло виявитися рівно три, а саме 1,–1 та 0, якщо, наприклад, $a = -1$, $b = 0$, $c = 1$.

2. Враховуючи для натуральних чисел a та b нерівності $2(a^2 + b^2) < 2 \cdot ((a + b)^2 + 4)$ та $(a + b)^2 + 4 < 3 \cdot 2(a^2 + b^2)$, шукані пари чисел a та b знайдемо з такої сукупності рівностей:

$$2(a^2 + b^2) = (a + b)^2 + 4 \text{ та } (a + b)^2 + 4 = 2 \cdot 2(a^2 + b^2).$$

Перша з них рівносильна умові $(a - b)^2 = 4$, тобто $|a - b| = 2$, а другу можна записати у вигляді $2(a^2 + b^2) + (a - b)^2 = 4$. Для натуральних чисел a та b вона правильна лише за умови $a = b = 1$, а для всіх інших пар натуральних чисел її ліва частина більша за 4.

3. а). Не зможе, бо після кожної такої операції кількість білих куль залишатиметься непарною.

б). Зможе. Щоб вкінці кількість білих куль знову дорівнювала 7, Петрику достатньо у кожному з двох кіл спочатку двічі застосовувати перший варіант обміну, а за ним один раз другий варіант:

$$(7; 7) \to (9; 4) \to (11; 1) \to (7; 10) \to (9; 7) \to (11; 4) \to (7; 13).$$

4. Див. розв'язання задачі 4 за 7 клас.

9 клас

1. Якщо $x = 0$, $y = 2025$, то $y - x = 2025$. Більшою така різниця бути не може, бо з нерівностей $y - 2025 > x \geq 0$ та $y > x \geq 0$ випливає, що $y(y - 2025)^3 > x^4$. А це суперечить умові задачі.

2. Числа n та $n + 1$ взаємно прості, тому вони мають лише один спільний дільник $a_1 = b_1 = 1$. Також $a_{60} = n < b_{60} = n + 1$. Решту 58 дільників кожного з цих чисел можна розбити на 29 пар вигляду $(a_i; a_{61-i})$ та $(b_i; b_{61-i})$, де $2 \leq i \leq 30$. Оскільки $a_i a_{61-i} = n$ та $b_i b_{61-i} = n + 1 > n$, то одночасно не можуть виконуватися нерівності

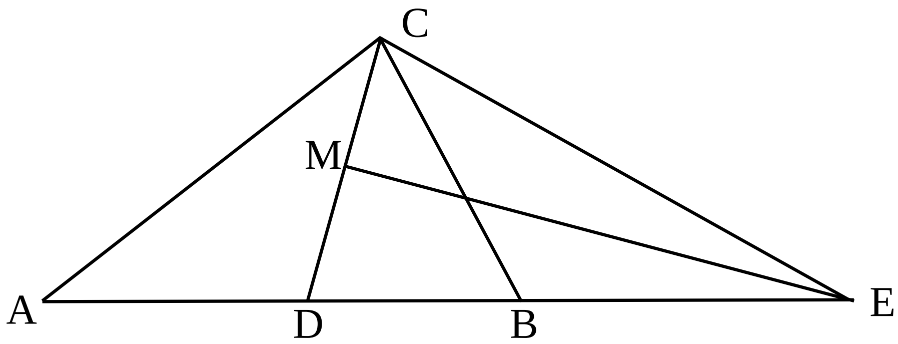
$a_i > b_i$ та $a_{61-i} > b_{61-i}$. Так само неможливе і одночасне виконання нерівностей $a_i < b_i$ та $a_{61-i} < b_{61-i}$, бо матимемо суперечність

$$b_i b_{61-i} \geq (a_i + 1)(a_{61-i} + 1) = n + 1 + a_i + a_{61-i} > n + 1.$$

Тому $a_i < b_i$ рівно у половині випадків, тобто $k = 30$.

3. Доведемо, що для довільного натурального числа $n \geq 2$ таких карток, занумерованих від 1 до n, потрібних їх різних розташувань буде 2^{n-1}. Для $n = 2$ маємо $2 = 2^1$ такі розташування: $(1; 2)$ та $(2; 1)$. Припустимо, що для деякого $n = k \geq 2$ їх буде 2^{k-1}. Тоді, дотримуючись умов задачі, для кожного з них картку з номером $k + 1$ можна буде розташувати рівно двома способами: або перед карткою з номером k, або лише у самому кінці. Тому для $n = k + 1$ отримаємо 2^k розташувань, звідки внаслідок принципу математичної індукції випливає справедливість висунутої гіпотези для всіх натуральних чисел $n \geq 2$. У випадку $n = 10$ отримаємо 512 розташувань.

4. Міркуючи аналогічно розв’язуванню задачі 4 за 7 клас,



доведемо, що $\angle BAC = \angle EDC - \angle ACD = \angle ECD - \angle BCD = \angle BCE$.

Оскільки, крім того, у трикутниках ACE та CBE кут при вершині E спільний, то ці два трикутники подібні, а їх відповідні сторони пропорційні. З рівності $\frac{BE}{CE} = \frac{CE}{AE}$ маємо $CE = \sqrt{BE \cdot AE} = \sqrt{4 \cdot 9} = 6$. А оскільки EM є одночасно і висотою, і медіаною трикутника DCE, то

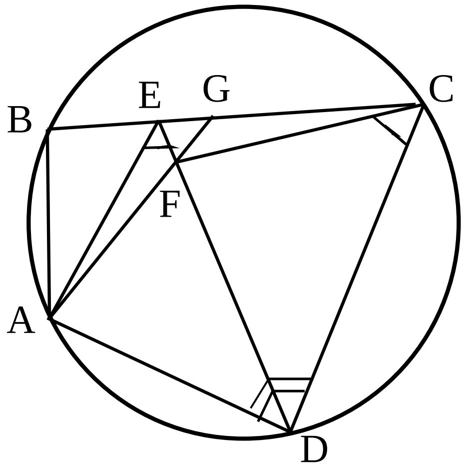
$$DE = CE = 6 = 2 \cdot 3 = 2(9 - 6) = 2(AE - DE) = 2AD.$$

10 клас

1. Див. розв’язання задачі 2 за 7 клас.

2. Див. розв’язання задачі 2 за 9 клас.

3. Припустимо, що кожна горизонтальна чи вертикальна пряма, проведена по лініях одиничної сітки такого прямокутника, перетинає принаймні одну з поставлених плиток. Тоді вона перетинатиме парну їх кількість, бо інакше, розрізавши прямокутник по цій прямій, ми отримали би у кожній з двох частинок з парною площею непарну кількість клітинок, чого не може бути. Тому кожна з таких трьох горизонтальних та 2009 вертикальних прямих перетне принаймні дві плитки, причому жодні дві такі прямі не можуть перетнути одну й ту ж плитку. Разом отримаємо не менше за $2 \cdot 2012 = 4024$ різні плитки, яких перетнули ці 2012 прямих. Проте у прямокутнику розмірами 4×2010 плиток 1×2 може поміститися лише 4020. Отримана суперечність доводить, що для довільного розташування плиток принаймні одна з таких ліній не перетне жодної з них.



4. Трикутники ADE та FDC подібні внаслідок рівностей кутів AED та FCD і кутів ADE та CDF (див. малюнок справа), Тому для їхніх сторін виконується рівність $\frac{AD}{FD} = \frac{ED}{CD}$. Записавши її у вигляді $\frac{AD}{ED} = \frac{FD}{CD}$, з врахуванням рівності кутів ADF та EDC отримаємо також подібність трикутників ADF та EDC. Отже, кути DAF та DEC також рівні. Продовжимо AF до перетину зі стороною AB у точці G. Звідси, внаслідок рівності вертикальних кутів зі спільною вершиною F, отримаємо, що трикутник GEF подібний до трикутника DAF, отже, й до трикутника DEC. Тому $\frac{ED}{EG} = \frac{EC}{EF}$. Далі врахуємо рівність кутів BGA та ADE і те, що у вписаному чотирикутнику $ABCD$ сума кутів при вершинах B та D дорівнює 180°, як і сума кутів трикутника ABG. Звідси $\angle BAG + \angle AGB = \angle ADC = 2\angle ADE = 2\angle AGB$, тобто $\angle BAG = \angle AGB$. Тому трикутник BAG рівнобедрений, і у ньому $BG = BA = 7$. Відповідно, $EG = BG - BE = 2$, $EC = BC - BE = 13$.

Отже, $ED = EG \cdot \frac{EC}{EF} = 2 \cdot \frac{13}{3} = \frac{26}{3}$ та $DF = ED - EF = \frac{26}{3} - 3 = \frac{17}{3}$.

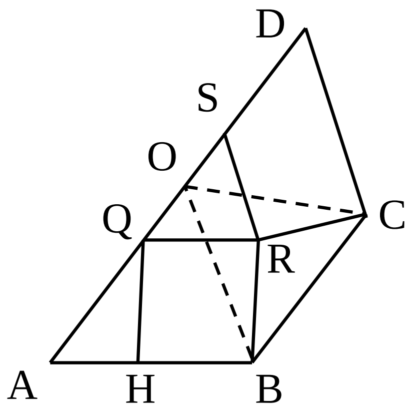
11 клас

1. Див. розв'язання задачі 2 за 8 клас.

2. Нескладно отримати суму $N + K = 2^n + 2$, якщо Олексій запише числа у такому порядку: $2^n - 1, 2^n - 2, \dots, 2, 1, 2^n$. При цьому у таких попарних сумах отримаємо 2^n степенів двійки, але лише два з них, 2^n та 2^{n+1}, будуть різними. Залишилось довести, що більшою сума $N + K$ бути не може.

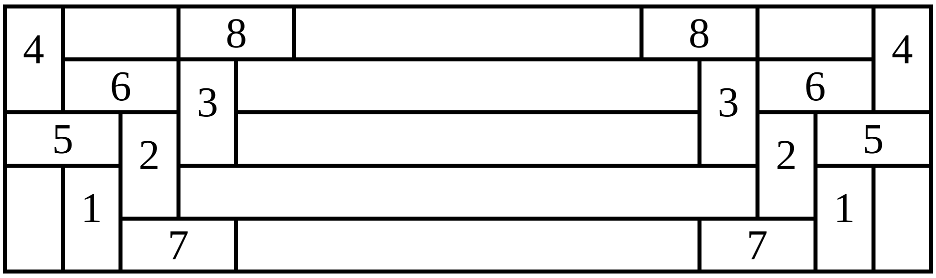
Припустимо, що під деяким числом k Олексій записав число a_k таке, що сума $k + a_k \leq 2^{n-1}$ також є степенем двійки. Зрозуміло, що $k < 2^{n-1}$ та $a_k < 2^{n-1}$. Розглянемо тепер число m, під яким Олексій записав число $a_m = 2^n - k$. Оскільки $a_m > 2^{n-1} > a_k$, то $m \neq k$. При цьому $2^{n-1} < m + a_m < 2^{n+1}$. Але $m + a_m = 2^n + m - k \neq 2^n$, тому така сума не може бути степенем двійки. Таким чином, доданок N зменшиться принаймні на 1, а доданок K збільшиться на 1, від чого сума не збільшиться.

Міркуючи аналогічно стосовно інших можливих таких k, кожного разу будемо мати, що число N зменшується принаймні на 1, а число K збільшується не більше, ніж на 1. Тому $2^n + 2$ – найбільше з можливих значень для $N + K$.



3. Діагональ AD ділить пополам як шестикутник $ABCDEF$, так і чотирикутник $PQRS$. Тому зобразимо на малюнку справа лише половину поданої в умові задачі конструкції. Оскільки $RS = RQ$ внаслідок симетрії та $\angle QRS = 60°$, то трикутник QRS рівносторонній. Довжину його сторони позначимо через x, а сторони шестикутника $ABCDEF$ – через a. Тоді $DS = AQ = \frac{2a-x}{2}$. Опустивши з точки Q перпендикуляр QH на сторону AB, з прямокутного трикутника QAH, в якому $\angle QAH = 60°$, знайдемо $AH = \frac{AQ}{2} = \frac{2a-x}{4}$. Враховуючи, що $a = BH + AH = x + \frac{2a-x}{4}$, звідси отримаємо $x = \frac{2a}{3}$. Тому $S_{\Delta SQR} : S_{\Delta ABO} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$, де $O -$ середина AD. А оскільки шестикутник $ABCDEF$ складається з шести однакових правильних трикутників зі стороною a та спільною вершиною O, то $S_{\Delta ABO} = 1$. Тоді $S_{\Delta SQR} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$, а площа чотирикутника $PQRS$ дорівнює $2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$.

4. На малюнку нижче показаний фрагмент з розташуванням таких плиток по лівому та правому краях прямокутника.



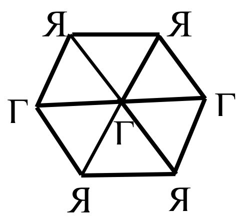
Якщо решту плиток між ними поставити горизонтально, що вдасться зробити, бо у кожному з рядків залишилася парна кількість клітинок, то кожна проведена пряма перетинатиме принаймні одну з плиток. Щодо похило проведених прямих це очевидно. Кожна горизонтальна пряма перетне принаймні одну з плиток 1, 2, 3, 4. А кожна вертикальна пряма перетне або принаймні одну з плиток 5, 6, 7, 8, або принаймні одну з горизонтальних плиток, розміщених у незаповнених прямокутниках поданої вище таблиці внаслідок зсувів на одну клітинку по горизонталі країв плиток з номерами 1, 2, 3, 8.

РЕЗЕРВНІ ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ ДЛЯ ІІІ ЕТАПУ ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ

2022 рік

7 клас

1. Внук садівника ділиться враженнями, як вони з дідусем садили яблуні та груші. За його словами, для кожної посадженої ними яблуні на відстанях 7 метрів від неї знаходяться дві груші. Чи могла за цих умов кількість посаджених яблунь виявитися більшою за кількість посаджених ними груш?



Розв'язання. Могла. Наприклад, якщо 7 дерев були посаджені у вершинах шести рівносторонніх трикутників зі сторонами 7 метрів так, як на малюнку справа, де буквами Я позначені яблуні, а буквами Г – груші.

2. За роки бездоганної роботи цар вирішив нагородити придворного математика коштовним діамантом, але перед цим ще раз випробувати його. Цар виклав у ряд 7 однакових закритих скриньок, на кожній з яких був надпис «Діамант у сусідній скриньці», і попередив, що лише на одній скриньці написана правда. Він дозволив математикові забрати собі будь-які дві з цих скриньок, але якщо у жодній з них не виявиться діаманта, то його з ганьбою виженуть з царського палацу. Математик відкрив дві скриньки і був задоволений отриманою нагородою. Як йому це вдалося? Відповідь обґрунтуйте.

Розв'язання. Якщо би діамант знаходився не у крайній скриньці, то правдивими були би надписи на обох сусідніх з нею скриньках. Тому математик успішно пройшов таке нескладне випробування, відкривши дві крайні скриньки, в одній з яких і виявився діамант.

3. Натуральні числа x, y, z такі, що $337x + 334y = 3z$. Доведіть, що число $(x+y)(y+z)(z+x)$ ділиться націло на 2022.

Розв'язання. Простим перебором парності чисел зрозуміло, що принаймні одна з сум $x+y$, $y+z$ та $z+x$ є парною. Зробимо перетворення заданої в умові задачі рівності таким чином:

$$337x + 337y = 3z + 3y \Leftrightarrow 337(x + y) = 3(z + y).$$

Числа 3 та 337 – взаємно прості, тому $x + y \,\vdots\, 3$ та $z + y \,\vdots\, 337$. Отже, заданий добуток ділиться на $2 \cdot 3 \cdot 337 = 2022$.

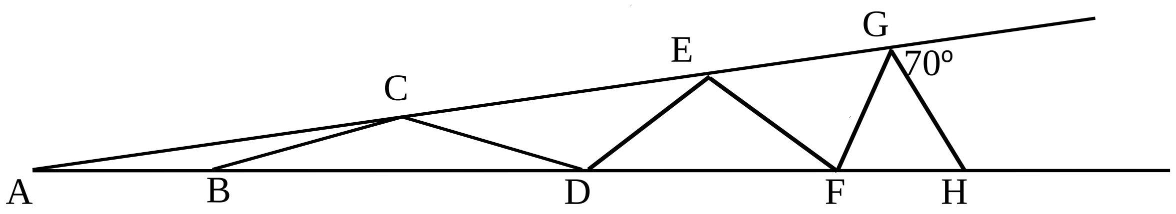
4. Смужку розмірами 2×7 потрібно викласти сімома плитками 1×2. Скількома різними способами це можна зробити? Відповідь обґрунтуйте.

Розв'язання. Будемо розв'язувати загальнішу задачу для смужки розмірами $2 \times n$. Якщо $n = 1$, то, очевидно, маємо єдиний спосіб покриття $a_1 = 1$. Для $n = 2$ також легко бачити, що таких способів є $a_2 = 2$ – або дві плитки покласти горизонтально, або обидві вертикально. А для $n > 2$ отримуємо рівність $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, яка випливає з того, що довільне покриття смужки $2 \times n$ можна отримати такими двома способами: а) покласти першу плитку вертикально, а далі покрити довільним чином її частину $2 \times (n-1)$, б) покласти дві плитки горизонтально і довільним чином покрити частину смужки $2 \times (n-2)$. Отже, послідовно знаходимо $a_3 = a_2 + a_1 = 2 + 1 = 3$, $a_4 = a_3 + a_2 = 3 + 2 = 5$, $a_5 = a_4 + a_3 = 5 + 3 = 8$, $a_6 = a_5 + a_4 = 8 + 5 = 13$, $a_7 = a_6 + a_5 = 13 + 8 = 21$. Тому смужку 2×7 сімома плитками 1×2 можна викласти 21-им різним способом. Елементи послідовності (a_n) є числами Фібоначчі.

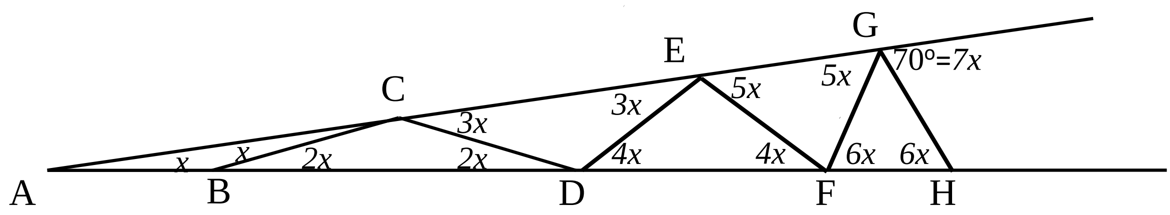
Можна було міркувати ще й так. Оскільки плитки, розташовані горизонтально, можуть знаходитися лише одна над одною, то розглянемо такі 4 варіанти: 1) пар горизонтальних плиток немає, тоді є лише 1 спосіб усі 7 плиток поставити вертикально; 2) є лише одна пара горизонтальних плиток, тоді її можна поставити з лівого краю смужки, а потім ще 5 разів зміщувати на 1 вправо, всього – 6 способів; 3) є дві пари горизонтальних плиток, тоді першу пару поставимо з лівого краю смужки, а для другої пари знайдемо 4 можливих положення. Якщо ж змістити першу пару на 1 вправо, то для другої пари матимемо 3 варіанти розміщення. Ще одне зміщення першої пари вправо залишить другій парі лише дві можливості. І, нарешті, останнє зміщення приведе до того, що друга пара може лише прилягати до правого краю смужки. Всього отримуємо ще 10 способів; 4) і останній варіант, коли пар горизонтальних плиток буде 3. Тоді єдина поставлена вертикально плитка може знаходитися лише у першому, третьому, п’ятому чи сьомому стовпчику, тобто додаються ще 4 способи викладання. Разом – 21 спосіб.

5. Знайдіть величину кута BAC, якщо:

$AB = BC = CD = DE = EF = FG = GH$ (див. малюнок).



Розв’язання. Нехай шуканий кут дорівнює x градусів. Тоді за властивостями кутів рівнобедрених трикутників та зовнішніх кутів трикутника отримаємо такі величини кутів, як на малюнку знизу:



Звідси знаходимо $\angle BAC = 10^{\circ}$.

6. Замініть у виразі $КНИГА + КНИГА + КНИГА = НАУКА$ хоч одним способом різні букви різними цифрами так, щоб отримати правильну рівність, і поясніть на основі яких логічних міркувань ви прийшли до неї.

Розв’язання. Зрозуміло, що буква $А$ може позначати лише або цифру 0, або цифру 5. Буква $К$ не може бути 0 і не перевищує 2, бо вже для $К = 3$ отримали би $Н = 9$, що неможливо внаслідок перенесення двійки з попереднього розряду. А для більших $К$ така сума також була шестицифровим числом. Якщо $К = 2$, то $6 \le Н \le 8$. Для $Н = 6$ та $Н = 7$ знову отримуємо суперечності, пов’язані з перенесенням одиниці чи двійки з попереднього розряду. Тому вибираємо $H = 8$. У такому разі $A = 0$ нам не підходить. Тому $A = 5$, і для узгодження розряду десятків повинно бути $Г = 7$. Оскільки при цьому з розряду десятків у розряд сотень перейде 2, а з розряду сотень у розряд тисяч має перейти 1, то для $И$ залишаються лише варіанти 3, 4 та 5. Покладаючи $И = 3$, отримаємо $У = 1$ та рівність $28375 + 28375 + 28375 = 85125$. Можна було б довести, що знайдене розшифрування поданого ребусу єдине, але цього умовою задачі не вимагалося.

8 клас

1. Марійка з кількома друзями ходила до лісу по гриби. Кожен повернувся не з порожнім кошиком. Якщо Марійка віддасть частину знайдених нею грибів Миколці, то у всіх дітей грибів стане порівну, а якщо вона віддасть усі свої гриби Петрусеві, то у того грибів стане стільки ж, скільки у всіх решти дітей разом. Визначте, скільки друзів Марійки йшли разом з нею до лісу?

Розв'язання. Нехай до лісу йшли $n \geq 3$ дітей, Марійка знайшла a, Миколка – b, Петрусь – c грибів. Після передачі нею x грибів Миколці з умови задачі отримуємо рівність $b + x = a - x = c$. Крім того, звідси випливає, що решта $n - 3$ дітей також знайшли по c грибів. А у разі передачі нею всіх знайдених грибів Петрусеві маємо рівняння $c + a = b + (n-3)c$. Додавши до нього $b + x = a - x$, будемо мати $(n-4)c = 2x$. Отже, c є дільником числа $2x$. Але $c = b + x > x$, тому $c = 2x$. Значить, $n - 4 = 1$. Таким чином, $n = 5$, і з Марійкою до лісу за грибами йшли четверо її друзів.

2. Числа a та b задовольняють рівності $a + b = 1$ та $a^2 + b^2 = 3$. Доведіть, що $a^{2022}(a-1) + b^{2022}(b-1) = a^{2021} + b^{2021}$.

Розв'язання. З умов задачі та рівності $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ отримуємо, що $a - 1 = -b$, $b - 1 = -a$, $ab = -1$. Тому

$$a^{2022}(a-1) + b^{2022}(b-1) = -a^{2022} \cdot b - b^{2022} \cdot a =.$$

$$= -a^{2021} \cdot ab - b^{2021} \cdot ab = a^{2021} + b^{2021}.$$

3. Знайдіть $x+y$, якщо $\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)\left(\sqrt{1+y^2}+y\right)=1$.

Розв'язання. Помножимо перший раз обидві частини поданого рівняння на вираз, спряжений до другого множника, а другий раз – на спряжений до першого множника. Отримаємо:

$$\sqrt{1+x^2}+x=\sqrt{1+y^2}-y, \quad \sqrt{1+y^2}+y=\sqrt{1+x^2}-x.$$

Додавши ці рівності, знайдемо $x+y=0$.

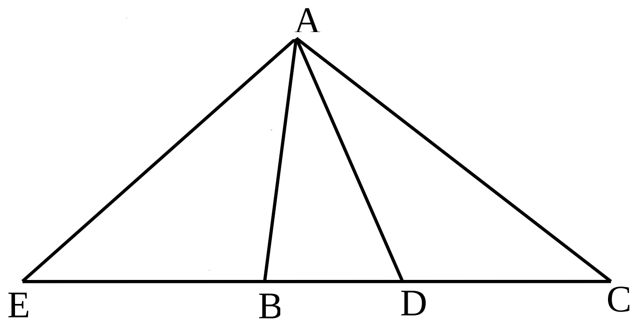
4. Чи існують цілі числа x та y такі, що $x^2+y^2=20222022$? Якщо так, то знайдіть хоч одну пару таких чисел.

Розв'язання. Оскільки 20222022 при діленні на 4 дає остачу 2, то x та y мають бути непарними. Нехай $x=n+k,\ y=n-k,\ (n,\ k\in Z)$. Підставивши їх у подану рівність, отримаємо:

$$(n+k)^2+(n-k)^2=20222022 \Leftrightarrow n^2+k^2=10111011,$$

що неможливо для цілих n та k, оскільки ліва частина останньої рівності при діленні на 4 може давати лише остачі 0, 1 або 2, а остача правої частини дорівнює 3.

5. На стороні BC трикутника ABC вибрали точку D таку, що $\angle ADB=70^\circ$. Знайдіть величину кута ACB, якщо відомо, що $\angle ABD=80^\circ$ та $AB+BD=AC$.



Розв'язання. Нехай точка E на продовженні сторони BC поза точку B така, що $BE=AB$. Тоді $\angle BAE=\angle BEA=80^\circ/2=40^\circ$. Крім того, $\angle BAD=30^\circ$. Тому $\angle EAD=\angle EDA=70^\circ$. Отже, маємо $AE=ED=AB+BD=AC$. Таким чином, $\angle ACB=\angle AEC=40^\circ$.

6. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} x+y+xy=28, \\ x+z+xz=202, \\ y+z+yz=2022. \end{cases}$$

Розв'язання. Додавши 1 до обох частин кожного рівняння, після розкладу на множники запишемо подану систему у вигляді:

$$\begin{cases}(1+x)(1+y)=29,\\ (1+x)(1+z)=7\cdot 29,\\ (1+y)(1+z)=7\cdot 17^2.\end{cases}$$

Перемноживши рівняння такої системи, отримаємо:

$$(1+x)^2(1+y)^2(1+z)^2=7^2\cdot 17^2\cdot 29^2.$$

Тому $(1+x)(1+y)(1+z)=7\cdot 17\cdot 29$ або $(1+x)(1+y)(1+z)=-7\cdot 17\cdot 29.$ Звідси маємо такі дві системи рівнянь:

$$\begin{cases}1+z=7\cdot 17,\\ 1+y=17,\\ 1+x=29/17,\end{cases}\qquad \begin{cases}1+z=-7\cdot 17,\\ 1+y=-17,\\ 1+x=-29/17.\end{cases}$$

З них знаходимо два розв'язки поданої системи:

$x=12/17,\ y=16,\ z=118$ та $x=-46/17,\ y=-18,\ z=-120$.

9 клас

1. Задача 1 за 8 клас.

2. Обчисліть суму

$$S=\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}.$$

Розв'язання. Скориставшись рівністю

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

отримаємо, що

$$S=\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{\sqrt{99}}-\frac{1}{\sqrt{100}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{100}}=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}.$$

3. Перевірте, чи є число $\sqrt[4]{\dfrac{1111111110888888889}{12345678987654321}}$ раціональним.

Розв'язання. Побачивши, що сума цифр чисельника підкореневого дробу дорівнює 81, поділимо у стовпчик цей чисельник на 9 і у результаті отримаємо знаменник цього дробу. Тому

$$\sqrt[4]{\frac{111111110888888889}{12345678987654321}} = \sqrt[4]{9} = \sqrt{3}.$$

Нехай $\sqrt{3} = \frac{m}{n}$, де $\frac{m}{n}$ – нескоротний дріб. Тоді $m^2 = 3n^2$, звідки $m = 3k,\ k \in Z$. Отже, $n^2 = 3k^2$, і n також ділиться на 3, що суперечить нескоротності дробу $\frac{m}{n}$. Тому подане число не є раціональним.

4. Для $x \ge 1,\ y \ge 1$ доведіть нерівність $x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} \le xy.$

Розв'язання. Поділимо обидві частини поданої нерівності на xy і запишемо її у вигляді суми двох аналогічних доданків:

$$\frac{\sqrt{y-1}}{y} + \frac{\sqrt{x-1}}{x} \le 1.$$

Оскільки для $x \ge 1,\ y \ge 1$

$$\frac{\sqrt{x-1}}{x} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} \le x \Leftrightarrow 4(x-1) \le x^2 \Leftrightarrow (x-2)^2 \ge 0,$$

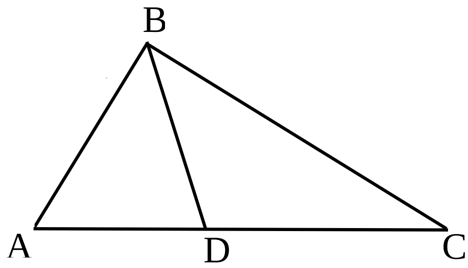
і так само $\frac{\sqrt{y-1}}{y} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow (y-2)^2 \ge 0,$ то подана нерівність правильна.

5. Знайдіть хоч одну пару цілих чисел x та y таких, що $x^3 + y^3 = 20222022$, або ж доведіть, що їх не існує.

Розв'язання. При діленні на 9 куби цілих чисел дають лише остачі 0, 1 або 8. Тому ліва частина поданої рівності при цьому може мати лише остачі 0, 1, 2, 7 або 8. Але остача числа 20222022 при діленні на 9 дорівнює 3. Тому таких цілих чисел x та y не існує.

6. На стороні AC трикутника ABC зі сторонами $AB = 8$ та $BC = 12$ вибрали точку D таку, що $AD = 7,\ DC = 9$. Знайдіть довжину відрізка BD.

Розв'язання. Трикутники ABC та BDC подібні за спільним кутом C та рівними відношеннями прилеглих до нього сторін $DC : BC = 9 : 12 = 3 : 4$ та $BC : AC = 12 : (7+9) = 3 : 4$. Тому також $BD : AB = BD : 8 = 3 : 4$. Звідси $BD = 6$.



10 клас

1. Власник п'яти підприємств подав в управління статистики звіт з десятьма числами 4, 6, 9, 12, 13, 15, 17, 19, 21, 24, кожне з яких за його версією дорівнювало сумі одиниць продукції, виготовленої на деяких двох його підприємствах. Для подачі звіту у міністерство про всю продукцію на його п'яти підприємствах молода працівниця управління запропонувала додати ці 10 чисел і поділити суму на 2. Досвідчена бухгалтерка не погодилася з нею і сказала, що у міністерство треба подавати таку суму, поділену на 4. Їм обом заперечила студентка-практикантка з факультету математики та інформатики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника, яка заявила, що жодну з їхніх пропозицій подавати у міністерство не можна. Хто з них мав рацію? Відповідь обґрунтуйте.

Розв'язання. Рацію мала студентка. Якщо би показники, подані власником підприємств, були правильними, то у сумі поданих ним чисел кількість одиниць продукції кожного з його підприємств була би порахована по 4 рази. Тому правильно зауважила бухгалтерка, що суму цих десяти чисел треба ділити на 4. У результаті отримуємо показник 35. Та подавати його у міністерство не можна, бо, віднімаючи від нього найменше та найбільше з поданих власником чисел, отримаємо, що на третьому за продуктивністю підприємстві було виготовлено 7 одиниць продукції. Але тоді число 6 мало би дорівнювати сумі одиниць продукції на ньому та на найменш продуктивному підприємстві. Це неможливо, бо -1 одиниця продукції на останньому з них виготовленою бути не могла. Тому власникові підприємств свій звіт у статуправління доведеться переробити.

2. Знайдіть усі пари дійсних чисел x та y таких, що $(1+x^2)(1+4y^2)=8xy$.

<u>*Розв'язання*</u>. Перемноживши вирази у дужках, запишемо подане рівняння у вигляді $(x^2-4xy+4y^2)+(1-4xy+4x^2y^2)=0$, що рівносильно рівнянню $(x-2y)^2+(1-2xy)^2=0$. Звідси отримуємо, що $x=2y$ та $2xy=1$. Таким чином, $y^2=\dfrac{1}{4}$, $y=\pm\dfrac{1}{2}$. Отже, маємо дві пари шуканих чисел: $x_1=1,\ y_1=\dfrac{1}{2}$ та $x_2=-1,\ y_2=-\dfrac{1}{2}$.

3. Знайдіть цілі числа n такі, що
$n^2+(n+1)^2+\ldots+(n+1011)^2=(n+1012)^2+(n+1013)^2+\ldots+(n+2022)^2$.

<u>*Розв'язання*</u>. Проведемо заміну $n+1011=k$ і запишемо подане рівняння у вигляді
$(k-1011)^2+\ldots+(k-2)^2+(k-1)^2+k^2=(k+1)^2+(k+2)^2+\ldots+(k+1011)^2$.
Після розкриття дужок його можна записати так:

$$-2k(1011+\ldots+2+1)+k^2=2k(1+2+\ldots+1011).$$

Звідси маємо $k^2=2k\cdot1011\cdot1012$. Отже, $k=0$ та $k=1011\cdot2024$, і шуканими цілими числами є лише числа $n=-1011$ та $n=1011\cdot2024-1011=1011\cdot2023=2045253$.

4. Для $0\le x\le a$, $0\le y\le b$ доведіть нерівність

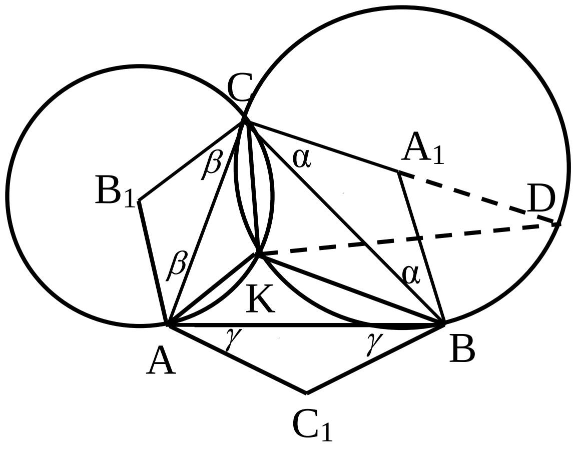
$$x^2+xy+y^2+\sqrt{a^2-x^2}\cdot\sqrt{b^2-y^2}\le a^2+ab+b^2.$$

<u>*Розв'язання*</u>. Скориставшись для добутку коренів нерівністю Коші, отримаємо:

$$x^2+xy+y^2+\sqrt{a^2-x^2}\cdot\sqrt{b^2-y^2}\le x^2+xy+y^2+\frac{a^2-x^2+b^2-y^2}{2}=$$

$$=\frac{x^2+2xy+y^2+a^2+b^2}{2}\le\frac{a^2+2ab+b^2+a^2+b^2}{2}=a^2+ab+b^2.$$

5. Зовні гострокутного трикутника ABC побудували три рівнобедрені трикутники ABC_1, BCA_1, CAB_1 такі, що сума шести кутів при основах AB, BC, CA дорівнює 180°. Доведіть, що кола з центрами у точках C_1, A_1, B_1 і радіусами, рівними бічним сторонам таких трикутників, перетинаються в одній точці всередині трикутника ABC.



Розв'язання. Нехай кути при таких основах дорівнюють γ, α, β відповідно. Оскільки $\gamma + \alpha + \beta = 90^{\circ}$, то всі три кути A_1CB_1, B_1AC_1, C_1BA_1 менші за 180°. Отже, будь-які два з таких кіл, крім вершини трикутника ABC, перетинаються ще й у точці всередині кута з цією вершиною. Точка K перетину кіл з центрами A_1 та B_1 знаходиться всередині кута ACB. За властивістю вписаних кутів маємо $\angle CKB = \angle CKD + \angle BKD = 90^{\circ} + \alpha$. Так само $\angle CKA = 90^{\circ} + \beta$. Тому

$$\angle AKC + \angle BKC = \left(90^{\circ} + \beta\right) + \left(90^{\circ} + \alpha\right) > 180^{\circ},$$

і точка K знаходиться всередині трикутника ABC, причому

$$\angle AKB = 360^{\circ} - \left(90^{\circ} + \beta\right) + \left(90^{\circ} + \alpha\right) = 90^{\circ} + \gamma.$$

Тому коло з центром C_1 також проходить через точку K, що й треба було довести. У разі $\gamma = \alpha = \beta = 30^{\circ}$ точка K буде точкою Торрічеллі, з якої всі сторони трикутника ABC видно під кутами 120°.

6. Знайдіть найбільшу можливу довжину горизонтального відрізка з кінцями на графіку функції $y = x^3 - x$.

Розв'язання. Нехай кінці такого відрізка мають абсциси a та b. Оскільки відрізок горизонтальний і його кінці лежать на лінії $y = x^3 - x$, то для ординат цих точок виконується рівність $a^3 - a = b^3 - b$, яку можна переписати як $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a-b$. Звісно, $a\neq b$, тому $a^2+ab+b^2=1$. Звідси $(a+b)^2=1+ab\Rightarrow ab\geq -1$ та

$$(a-b)^2=1-3ab\Rightarrow (a-b)^2\leq 1-3(-1)=4.$$

Отже, довжина $|a-b|$ шуканого відрізка не перевищує 2. Рівність досягається, наприклад, для відрізка з кінцями $A(-1;0)$ та $B(1;0)$.

11 клас

1. Задача 1 за 10 клас.

2. Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{\frac{x-2}{11}}+\sqrt{\frac{x-3}{10}}+\sqrt{\frac{x-4}{9}}=\sqrt{\frac{x-11}{2}}+\sqrt{\frac{x-10}{3}}+\sqrt{\frac{x-9}{4}}.$$

<u>*Розв'язання*</u>. Проведемо заміну $x=t+13$ і запишемо рівняння у вигляді

$$\sqrt{\frac{t}{11}+1}+\sqrt{\frac{t}{10}+1}+\sqrt{\frac{t}{9}+1}=\sqrt{\frac{t}{2}+1}+\sqrt{\frac{t}{3}+1}+\sqrt{\frac{t}{4}+1}.$$

Очевидно, що $t=0$ є коренем цього рівняння. Якщо ж $t>0$, то кожен доданок у лівій частині рівняння менший кожного доданка правої частини, а якщо $t<0$, то навпаки. Тому подане рівняння має єдиний корінь $x=13$.

3. Знаючи, що числа a та b задовольняють рівності $a+b=1$ та $a^2+b^2=3$, обчисліть $a^{11}+b^{11}$.

<u>*Розв'язання*</u>. З умов задачі та рівності $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$ отримуємо, що $ab=-1$. Тому внаслідок формул Вієта числа a та b є коренями рівняння $x^2-x-1=0$. Звідси для всіх натуральних чисел n випливає рівність

$$x_{n+2}=a^{n+2}+b^{n+2}=a^n\cdot a^2+b^n\cdot b^2=a^n(a+1)+b^n(b+1)=$$
$$=a^{n+1}+b^{n+1}+a^n+b^n=x_{n+1}+x_n.$$

Звідси послідовно знаходимо:

$$x_3=x_2+x_1=3+1=4,\ x_4=x_3+x_2=4+3=7,\ x_5=x_4+x_3=7+4=11,$$
$$x_6=x_5+x_4=11+7=18.$$

А далі отримуємо:

$$x_{11} = a^{11} + b^{11} = (a^5 + b^5)(a^6 + b^6) - a^5 b^5 (a+b) = x_5 x_6 + x_1 = 11 \cdot 18 + 1 = 199.$$

Зауважимо, що елементи послідовності (x_n) називаються числами Люка.

4. Для додатних чисел x, y, z, t таких, що $x \le z$, $x \le t$, $xyzt = 1$, доведіть нерівність $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{6} + \frac{t}{12} \ge \frac{x^2}{zt}$.

<u>*Розв'язання*</u>. Враховуючи умови задачі, отримуємо:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{6} + \frac{t}{12} \ge \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{x}{6} + \frac{x}{12} = \frac{3x+y}{4} = \frac{3x^2 zt + yxzt}{4xzt} \ge \frac{3x^4 + 1}{4xzt}.$$

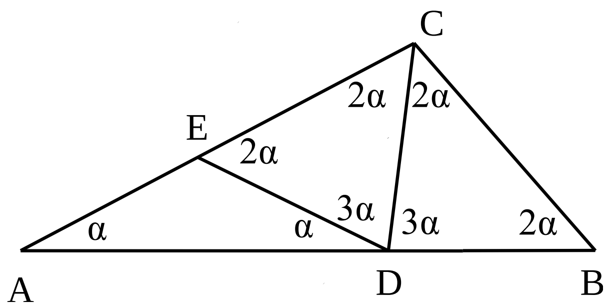
А оскільки

$$\frac{3x^4+1}{4xzt} = \frac{x^4 + x^4 + x^4 + 1}{4xzt} \ge \frac{4\sqrt[4]{x^4 \cdot x^4 \cdot x^4 \cdot 1}}{4xzt} = \frac{4x^3}{4xzt} = \frac{x^2}{zt},$$

то нерівність доведена. Зауважимо, що рівність досягається лише за умови $x = y = z = t = 1$.

5. У трикутнику ABC кут C вдвічі більший кута B та вчетверо більший кута A. Доведіть, що $BC = \frac{AB \cdot AC}{AB + AC}$.

<u>*Розв'язання*</u>.



<u>I спосіб</u>. Проведемо бісектрису CD, відкладемо на стороні AC точку E таку, що $CE = CB$, та з'єднаємо її з точкою D. Простим підрахунком кутів отримаємо, що трикутники BCD, CDE та ADE рівнобедрені, і $CD = BD = DE = AE = AC - CE = AC - BC$. Тоді з подібності трикутників ACD та ABC будемо мати

$$AC / AB = CD / BC = (AC - BC) / BC \Leftrightarrow (AB + AC) \cdot BC = AB \cdot AC,$$

звідки й випливає потрібна рівність.

II спосіб. Нехай $R-$ радіус кола, описаного навколо трикутника ABC. Тоді для $\alpha=\frac{\pi}{7}$ отримуємо рівність:

$$\frac{AB\cdot AC}{AB+AC}=\frac{2R\sin 4\alpha\cdot 2R\sin 2\alpha}{2R\sin 4\alpha+2R\sin 2\alpha}=$$

$$=\frac{2R\sin 4\alpha\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin 3\alpha\cos\alpha}=\frac{2R\sin 4\alpha\cdot\sin\alpha}{\sin 3\alpha}=2R\sin\alpha=BC.$$

6. Знайдіть усі неперервні функції $f:R\to R$ такі, що $2f(x)-f(2x)=2022$ для всіх $x\in R$.

Розв'язання. Оскільки функція $f_0(x)=2022$ задовольняє подане рівняння, то будемо шукати розв'язок у вигляді $f(x)=g(x)+2022$, де $g(x)-$ деяка неперервна функція. Підставивши таку функцію $f(x)$ у подане рівняння, отримаємо $2g(x)-g(2x)=0$ для всіх $x\in R$. Нехай $g(x)=xh(x)$. Тоді $2xh(x)-2xh(2x)=0$, тому $h(x)=h(2x)$ для всіх $x\neq 0$. Зрозуміло, що для $x=0$ остання рівність також правильна, отже, функція $h(x)$ також повинна бути неперервною. Послідовно замінюючи x на $x/2$, отримаємо такий ланцюжок рівностей:

$$h(x)=h(x/2)=h(x/4)=...=h(x/2^n)=...$$

Внаслідок неперервності функції $h(x)$ для всіх $x\in R$ маємо рівність

$$h(x)=\lim_{n\to\infty}h(x/2^n)=h(0)=const.$$

Отже, $f(x)=cx+2022$. Підстановкою такої функції у початкове рівняння переконуємося, що c може бути довільним дійсним числом.

2023 рік

7 клас

Завдання 1.

1. Розставте у виразі $\frac{1}{2}*\frac{2}{3}*\frac{3}{4}*\ldots*\frac{47}{48}*\frac{48}{49}=0$ замість знаків * знаки додавання, віднімання чи множення так, щоб отримати правильну рівність. Чи вдасться це зробити, не використовуючи знаків множення?

2. Знайдіть найменше натуральне число, яке закінчується на 23, має суму цифр 23 і ділиться націло на 23.

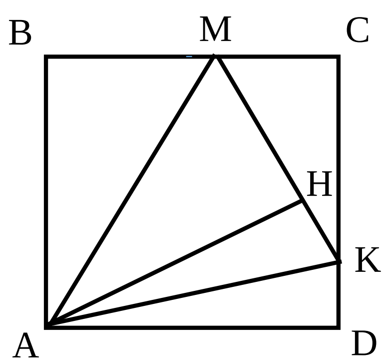
3. На сторонах BC та CD квадрата $ABCD$ відклали точки M та K відповідно такі, що кути BAM та CKM дорівнюють по 30^o. Знайдіть величини кутів трикутника AMK.

Розв'язання завдання 1.

1. Найпростіше правильну рівність можна отримати, якщо замінити знак * між дробами $\frac{6}{7}$ та $\frac{7}{8}$ знаком віднімання, а всі інші – знаком множення. Не використовуючи знаків множення, рівності добитися не вдасться. Розставивши лише знаки додавання та віднімання, зведемо отриманий вираз до найменшого спільного знаменника. Тоді у чисельнику отриманого дробу усі доданки, крім останнього, будуть ділитися на 7. Отже, такий чисельник, а з ним і значення всього виразу, не зможе дорівнювати нулю.

2. Сума цифр числа, яке передує 23, має дорівнювати 18, і воно має ділитися на 23. Тому таке число не може бути ні одноцифровим, ні двоцифровим (99 на 23 не ділиться). Отже, воно принаймні трицифрове і, крім того, ділиться націло на 9. Числа $9 \times 23 = 207$, $18 \times 23 = 414$ та $27 \times 23 = 621$ умову задачі не задовольняють. А оскільки $36 \times 23 = 828$, то найменшим шуканим числом є 82823.

3. З прямокутних трикутників BAM та CKM знайдемо, що кути BMA та CMK дорівнюють по 60^o. Тому кут AMK також дорівнює 60^o. Проведемо у трикутнику AMK висоту AH. Оскільки прямокутні трикутники ABM та AHM рівні за спільною гіпотенузою AM та рівними кутами при вершині M, то $AH = AB$. Тоді й прямокутні трикутники ADK та AHK також рівні за спільною гіпотенузою AK та рівними катетами AD та AH. Тому їхні кути при вершині K є рівними. Але кут MKD



дорівнює 150^o, тому кут AKM дорівнює 75^o. Тоді на кут MAK залишається 45^o.

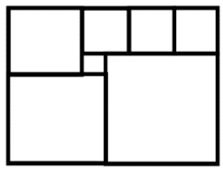
Зауважимо, що з рівності пар прямокутних трикутників ABM та AHM, ADK та AHK можна було також зробити висновок, що у них відповідні кути при вершині A рівні, і отримати, що кут MAK дорівнює половині прямого кута BAD.

<u>Завдання 2.</u>

4. У класі більше двадцяти, але менше тридцяти учнів, дні народження у всіх із них різні. Миколка сказав: «У нашому класі вдвічі більше старших за мене учнів, ніж молодших». Катруся сказала: «У нашому класі втричі більше старших за мене учнів, ніж молодших». Скільки учнів у цьому класі, якщо слова обох були правдою?

5. Зла чаклунка погрожує спопелити всю планету своїм новим грізним закляттям «ВУЛКАНИ ТА ЖАРА». Воно активується, якщо різні його букви замінити різними цифрами так, щоб отримане при цьому 13-цифрове число було простим числом. Чи треба боятися такого закляття злої чаклунки? Відповідь обґрунтуйте.

6. Знайдіть площу прямокутника, складеного із семи квадратів, зображених на малюнку справа, якщо відомо, що площа найменшого з них дорівнює 1.



<u>Розв'язання завдання 2.</u>

4. Зі слів Миколки випливає, що без нього кількість інших учнів класу ділиться на 3, а зі слів Катрусі без неї кількість інших учнів класу має ділитися на 4. Між числами 19 і 29 обидві ці умови задовольняє лише число 24. Тому у класі Миколки та Катрусі 25 учнів.

5. Зауважимо, що у закляття злої чаклунки 9 літер зустрічаються по одному разові, а буква А – чотири рази. Оскільки сума всіх цифр від 0 до 9 дорівнює 45, то при кожній зміні різних букв закляття різними цифрами будемо отримувати 13-цифрове число, кратне 3. Тому таке число не буде простим. Отже, боятися погроз злої чаклунки не треба.

6. Нехай сторони трьох рівних квадратиків дорівнюють x. Тоді сторона лівого верхнього, лівого нижнього та правого нижнього квадратів дорівнюватимуть $x+1$, $x+2$ та $x+3$ відповідно. З наведеного малюнка отримуємо, що $x+3=3x-1$. Тому $x=2$. Оскільки при цьому основа поданого прямокутника дорівнює 9, а висота – 7, то його площа дорівнює 63.

<u>Завдання 3.</u>

7. Вкажіть принаймні одне число вигляду $0,abc$, де $a, b, c -$ цифри, яке має таку властивість. Якщо це число округлити до сотих, потім помножити на 2 і отримане число округлити до цілих, то отримаємо 1. А якщо його спочатку округлити до десятих, потім помножити на 2 і, нарешті, округлити до цілих, то одержимо 0.

8. У коробці є 7 синіх та 7 жовтих кульок. Петрик навмання виймає їх з коробки, доки вперше не настане момент, що витягнута однакова кількість кульок обох кольорів. Виявилося, що для цього Петрику довелося вийняти усі кульки, причому жодного разу ним не були вийняті підряд 3 кульки одного кольору. Доведіть, що кульки, які виймалися одинадцятою та дванадцятою, були різного кольору.

9. Знайдіть усі натуральні числа, які не можна подати, як суму двох складених натуральних чисел.

<u>Розв'язання завдання 3.</u>

7. Таким числом, наприклад, є число 0,249. Якщо його округлити до сотих, то отримаємо 0,25. Після множення на 2 округлюємо 0,5 до цілих і у результаті маємо 1. Якщо ж спочатку це число округлити до десятих, то отримаємо 0,2. Після множення на 2 округлюємо 0,4 до цілих і дістаємо 0.

8. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що чотирнадцята вийнята кулька була синього кольору. Тоді тринадцята кулька також була синьою, бо в іншому разі однакова кількість кульок обох кольорів стала би уже після дванадцятого кроку. Оскільки тричі підряд кульки одного кольору не виймалися, то при цьому дванадцята кулька була жовтого кольору. Якщо б одинадцята вийнята кулька також була жовтою, то однакова кількість кульок обох кольорів появилась би уже після десятого кроку. Тому одинадцята кулька була синього кольору, що й доводить твердження задачі.

Зауважимо, що описана ситуація можлива, якщо, наприклад, кульки виймалися у такій послідовності: ЖЖСЖСЖСЖСЖСЖСС.

9. Оскільки найменшим парним складеним числом є число 4, то, починаючи з 8, усі парні числа n можна подати у вигляді суми двох складених чисел $n-4$ та 4. Так само, починаючи з 13, кожне непарне число n можна подати у вигляді суми двох складених чисел $n-9$ та 9.

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що жодне з інших натуральних чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11 у вказаному вигляді подати не можна.

8 клас

Завдання 1.

1. Доведіть, що у виразі $\frac{1}{2} * \frac{2}{3} * \frac{3}{4} * \dots * \frac{2021}{2022} * \frac{2022}{2023}$ не можна замість знаків * розставити знаки додавання та віднімання так, щоб значення отриманого при цьому виразу дорівнювало нулю.

2. У добутку $1! \times 2! \times 3! \times 4! \times 5! \times 6! \times 7! \times 8!$ вилучили один множник так, що добуток решти семи множників виявився квадратом натурального числа. Скількома способами це могли зробити? (Тут через $n!$ позначено добуток всіх натуральних чисел від 1 до n.)

3. Нехай точка $M-$ середина сторони CD прямокутника $ABCD$, а точка K лежить на його стороні AD. Знайдіть величину кута BKM, якщо кути CBM та KBM дорівнюють по 25^o.

Розв'язання завдання 1.

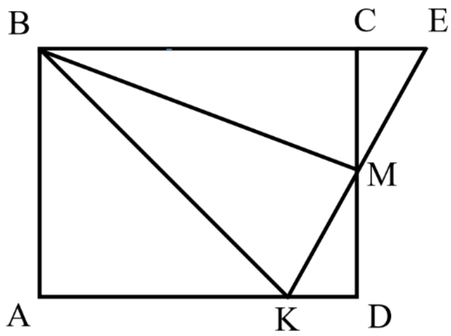
1. Припустимо, що така розстановка знаків додавання та віднімання можлива і зведемо отриманий при ній вираз до найменшого спільного знаменника. Тоді у чисельнику отриманого дробу усі доданки, крім доданка, який відповідає дробу $\frac{1023}{1024}$, будуть парними, бо $1024 = 2^{10}, 2023 < 2^{11}$. Таким чином, такий чисельник, а з ним і значення всього виразу, не зможе дорівнювати нулю.

2. Представимо такий добуток у вигляді:

$$(1!)^2 \times 2 \times (3!)^2 \times 4 \times (5!)^2 \times 6 \times (7!)^2 \times 8 =$$
$$= (1! \times 3! \times 5! \times 7!)^2 \times 2^4 \times 4!$$

Звідси зрозуміло, що, вилучивши множник 4!, ми отримаємо квадрат натурального числа. А оскільки $4! = 4 \times 3!$, то квадрат натурального числа можна дістати і при вилученні множника 3!. Доведемо, що інших варіантів не існує. Множники 1! та 2! не підходять, бо 24 та 12 не є квадратами натуральних чисел. А 5!, 6!, 7! та 8! вилучити не вдасться, бо тоді просте число 5 входитиме у поданий добуток у непарному степені. Отже, це можна було зробити двома способами.

3. Продовжимо відрізок KM до перетину з прямою BC у точці E. Оскільки точка M – середина сторони CD, то $KM = ME$. Отже, відрізок BM одночасно є бісектрисою та медіаною трикутника KBE. Тому він є і його висотою. З прямокутного трикутника KBM знаходимо, що кут BKM дорівнює 65^o.



Завдання 2.

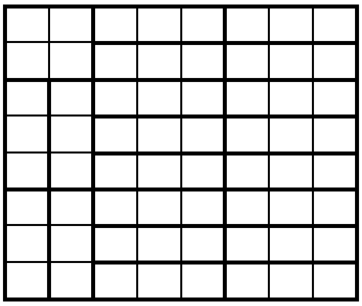
4. Марійка розрізала квадрат 8×8 вздовж ліній сітки на частини з однаковим периметром. Яку найбільшу кількість частин вона могла отримати, якщо відомо, що не всі вони були рівними?

5. На катетах AC та BC прямокутного трикутника ABC вибрали точки E та H такі, що кути CAH та CBE дорівнюють 20 та 25 градусів відповідно. З них опустили перпендикуляри EM та HK на гіпотенузу AB. Знайдіть величину кута MCK.

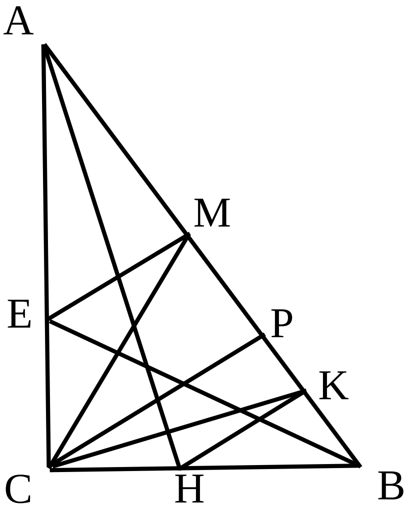
6. З'ясуйте, яких чисел серед 1, 2, 3, …, 2023 більше – таких, що кратні принаймні одному з чисел 3 або 4, чи усіх інших.

Розв'язання завдання 2.

4. Найменшою з таких частин міг би бути одиничний квадратик з периметром 4. Але у такому разі всі інші частинки також мали би бути одиничними квадратиками, що суперечить умові задачі. Наступний можливий периметр 6 мають лише прямокутники 1×2. Тому вони також не могли бути використані для розрізання. А оскільки периметр 7 неможливий, то перейдемо до частинок з периметром 8. Ними можуть бути або прямокутники 1×2, або кутики, в яких одиничні квадратики прилягають до сусідніх сторін іншого одиничного квадратика, або квадрати 2×2. Перші два з них мають площу 2, а третій – площу 4. Площі ж фігурок з більшими периметрами також не менші за 4. Оскільки $21 \times 3 < 8 \times 8 < 22 \times 3$, то при розрізанні більше як 21 частину отримати не вдасться. Приклад із отриманням двадцять однієї частини наведений на малюнку нижче.



5. Проведемо у трикутнику MCK висоту CP. Вона буде паралельною до відрізків EM та HK. Тому кути MCP та EMC і, відповідно, PCK та HKC рівні. З іншого боку, оскільки навколо кожного з чотирикутників $CEMB$ та $CAKH$ з парами протилежних прямих кутів можна описати кола, то кути CBE та EMC і, відповідно, CAH та HKC також рівні за властивістю вписаних кутів. Тому кут MCK, який дорівнює сумі кутів MCP та PCK, дорівнює також сумі кутів CBE та CAH і дорівнює 45^o.



6. Серед кожних дванадцяти послідовних чисел є порівну чисел, кратних принаймні одному з чисел 3 або 4, та усіх інших. Наприклад, серед чисел від 1 до 12 першій множині належатимуть числа 3, 4, 6, 8, 9 та 12, а другій – усі решта. Оскільки 2023 при діленні на 12 дає остачу

7, то досить порівняти кількості чисел з такими властивостями серед перших семи. З них кратних 3 або 4 є три числа, а інших – чотири. Тому серед чисел 1, 2, 3, …, 2023 на одне число більше таких, що не кратні жодному з чисел 3 або 4,

<u>Завдання 3.</u>

7. Миколка та Петрусь записали собі однакові п'ятицифрові числа. Миколка дописав перед своїм число першою цифрою 4, а останньою – 8. Петрусь дописав одну цифру перед своїм числом. Виявилося, що число Миколки у 6 разів більше за число Петруся. Яке число з самого початку було записане в обох хлопців?

8. $x, y-$ додатні числа такі, що $x^3 - y^3 = 4x$. Доведіть, що $x^2 > 2y$.

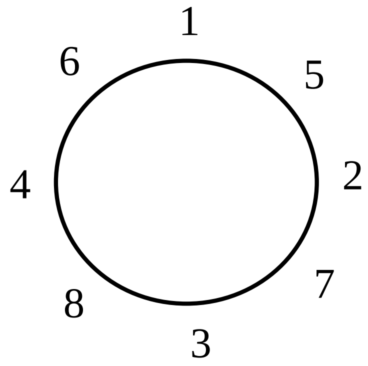
9. Юний математик, опинився на острові, всі жителі якого дуже добре знали математику, але лише деякі з них завжди говорили правду, а інші – завжди брехали. Запитавши одного із жителів острова «Чи можна записати по колу числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 так, щоб кожне записане число ділилося націло на різницю двох сусідніх з ним чисел?», він за почутою відповіддю «Ні.» зразу визначив, хто стояв перед ним: брехун чи правдолюб. А чи могли б це зробити ви?

<u>Розв'язання завдання 3.</u>

7. Нехай обома хлопцями було записане п'ятицифрове число x. Якщо Петрусь дописав перед своїм числом цифру k, то з умови задачі випливає рівність $4000000 + 10x + 8 = 6 \times (100000k + x)$, звідки випливає, що $1000002 + x = 150000k$. Оскільки при цьому для кожного можливого x виконується нерівність $150000k > 1000002$, то $k \geq 7$. Але для $k \geq 8$ отримуємо, що $x \geq 150000 \times 8 - 1000002$ і не може бути п'ятицифровим. Тому підходить лише $k = 7$, при якому знаходимо $x = 150000 \times 7 - 1000002 = 49998$.

8. З додатності x, y та рівності $x^3 - y^3 = 4x$ отримуємо, що $x > y$. Записавши цю рівність у вигляді $y^3 = x^3 - 4x = x(x+2)(x-2)$, будемо мати, що $x > 2$. Тому $x^2 - 2y = x(x-2) + 2(x-y) > 0$, або ж зразу $x^2 = x \times x > 2 \times y = 2y$, що й треба було довести.

9. Записати таким чином по колу числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 можна. Наприклад, як на малюнку справа. Оскільки за умовою задачі зустрічний дуже добре знав математику, то він легко отримав би правильну відповідь на поставлене питання. Тому відповісти «Ні.» міг тільки брехун.



9 клас

<u>Завдання 1.</u>

1. Знайдіть найбільше значення виразу $a^2 + b^2$, якщо
$$a^2 + b^2 + ab = a + b.$$

2. Вкажіть хоч одне натуральне число, яке закінчується на 2023, має суму цифр 2023 і ділиться націло на 23.

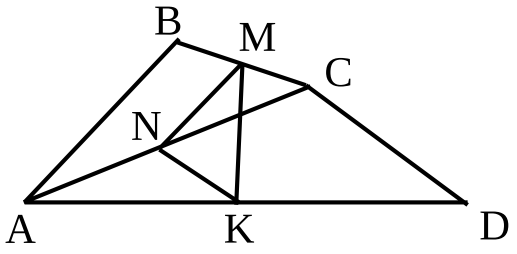
3. Знайдіть відстань між серединами сторін BC та AD опуклого чотирикутника $ABCD$, якщо його сторони AB та CD лежать на двох перпендикулярних прямих і дорівнюють 8 та 6 сантиметрів відповідно.

<u>Розв'язання завдання 1.</u>

1. Помножимо обидві частини поданої рівності на 2 і запишемо її у вигляді $a^2 + b^2 = -(a+b)^2 + 2(a+b)$. Тепер віднімемо 1 від обох частин отриманої рівності. Тоді з нерівності
$$a^2 + b^2 - 1 = -\big((a+b) - 1\big)^2 \le 0$$
будемо мати, що $a^2 + b^2 \le 1$. А оскільки рівність тут досягається, наприклад, при $a = 1$, $b = 0$, то за поданої умови найбільше значення виразу $a^2 + b^2$ дорівнює 1.

2. Оскільки числа 92, 207 та 828 діляться на 23, то прикладом шуканого числа може бути число 828…82820792023, в якому трійка цифр 828 повторюється 111 разів. Справді, сума цифр такого числа дорівнює $18 \times 111 + 25 = 2023$. Іншим прикладом може служити число 46…4611592023, в якому пара цифр 46 повторюється 200 разів. Сума його цифр $10 \times 200 + 23$ також дорівнює 2023.

3. Позначимо середини відрізків BC, AC та AD точками M, N та K відповідно. Оскільки при цьому MN – середня лінія трикутника ABC, а NK – середня лінія трикутника ADC, то MN паралельна до AB і дорівнює 4, а NK паралельна до CD і дорівнює 3. Крім того, MN та NK перпендикулярні між собою. За теоремою Піфагора шукана відстань MK дорівнює 5 см.

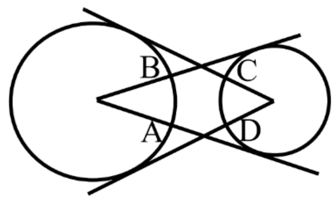


.***<u>Завдання 2.</u>***

4. Доведіть, що рівняння $k^2 + (k+1)^2 + (k+2)^2 = n^2 + n^3 + n^4$ не має розв’язків у цілих числах.

5. На дошці записані числа 2021 та 2023. Миколка і Петрусь ходять по черзі, розпочинає Петрусь. За один хід можна зменшити одне з чисел на його ненульову цифру чи на ненульову цифру іншого числа, або поділити одне з чисел на 2, якщо воно парне. Виграє той, хто першим напише одноцифрове число. У котрого з гравців є виграшна стратегія?

6. З центрів кожного з двох кіл провели дотичні до іншого з них, які перетинають ці кола у точках A, B, C, D як на малюнку справа. Доведіть, що $ABCD$ – прямокутник.



<u>Розв’язання завдання 2.</u>

4. Покладаючи $k+1=m$, отримаємо, що

$$k^2 + (k+1)^2 + (k+2)^2 = 3m^2 + 2.$$

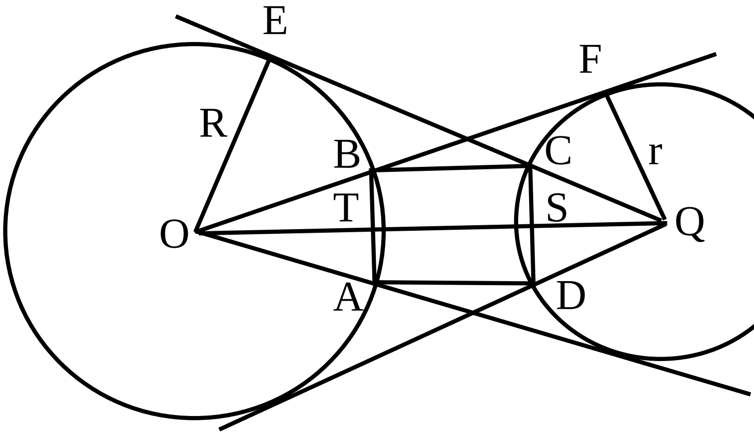
При діленні на 3 квадрати цілих чисел можуть давати лише остачі 0 або 1. Тому звідси випливає, що ліва частина поданого рівняння для всіх цілих чисел k при діленні на 9 може давати лише остачі 2 або 5. Проаналізуємо тепер остачі правої частини рівняння при діленні на 9. Якщо n ділиться націло на 3, то така остача дорівнює 0. Для інших цілих n розглянемо наступну таблицю остач при діленні на 9:

n	n^2	n^3	n^4	$n^2+n^3+n^4$
1	1	1	1	3
2	4	8	7	1
4	7	1	4	3
5	7	8	4	1
7	4	1	7	3
8	1	8	1	1

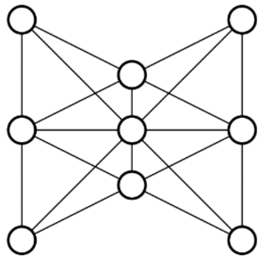
Отже, права частина рівняння при діленні на 9 може давати лише остачі 0, 1 або 3. Тому це рівняння розв'язків у цілих числах не має.

5. Виграшна стратегія є у Петруся. Першим своїм ходом він може замість числа 2023 записати число 2021. Очевидно, що після цього Миколка своїм першим ходом перемогти не зможе. Далі Петрусеві для перемоги достатньо поступати таким чином. Якщо після чергового ходу Миколки Петрусь може записати одноцифрове число, то він записує його і виграє. В іншому разі Петрусь замість більшого наявного у даний момент часу числа записує число, яке перед цим записав Миколка, зрівнюючи обидва числа на дошці. Такий хід він зможе зробити, бо тільки що саме таке число зумів записати Миколка. Оскільки перед цим Петрусь ще не міг виграти, то і Миколка після такого ходу Петруся своїм наступним ходом також не виграє. Але з кожним зробленим ходом сума записаних чисел зменшується, залишаючись натуральним числом. Тому на якомусь скінченному кроці хтось із цих гравців отримає одноцифрове число і переможе. Зі сказаного вище випливає, що ним буде Петрусь.

6. Проведемо у цих колах радіуси OE та QF відповідно і з'єднаємо центри цих кіл, як на малюнку нижче. Чотирикутник $ABCD$ симетричний відносно лінії центрів цих кіл, тому досить довести рівність BT та CS. З подібності прямокутних трикутників QOE та QCS отримуємо $CS:OE = QC:QO$, а з подібності трикутників OQF та OBT будемо мати $BT:QF = OB:OQ$. Отже, справді $BT = \frac{Rr}{OQ} = CS$.



Завдання 3.



7. На столі лежать 9 яблук, утворюючи 10 рядів по 3 яблука у кожному як на малюнку справа. Відомо, що у дев'ятьох рядах маси яблук однакові, а маса десятого ряду відрізняється. Вкажіть цей ряд і доведіть, що така ситуація насправді можлива.

8. Для сторін a, b, c довільного трикутника доведіть нерівність

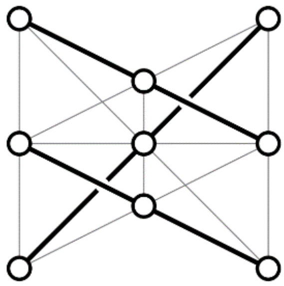
$$\frac{(a+b-c)^2+1}{c}+\frac{(b+c-a)^2+1}{a}+\frac{(c+a-b)^2+1}{b}\geq 6.$$

9. При якому найменшому натуральному a число

$$A = a \times 1! \times 2! \times 3! \times 4! \times 5! \times 6! \times 7! \times 8! \times 9!$$

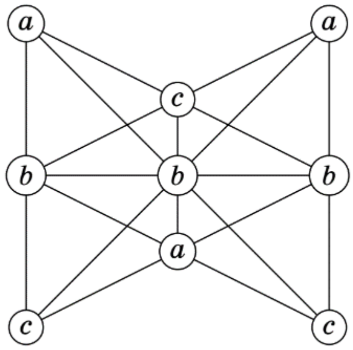
буде квадратом натурального числа? (Тут через $n!$ позначено добуток всіх натуральних чисел від 1 до n.)

Розв'язання завдання 3.



7. Нехай у трьох виділених жирним на малюнку справа похилих рядах маси трьох яблук дорівнюють m_1, m_2 та m_3, а у трьох вертикальних рядах такі маси дорівнюють k_1, k_2 та k_3. Оскільки в обох цих випадках разом враховані маси всіх дев'яти яблук, то $m_1 + m_2 + m_3 = k_1 + k_2 + k_3$.

Але за умовою задачі принаймні 5 із доданків цих сум рівні, то шостий доданок також дорівнює їм. Аналогічно доводиться рівність мас яблук у трьох інших похилих рядах. Тому відмінною може бути хіба що маса яблук горизонтального ряду. Така ситуація справді можлива, якщо маси яблук є такими, як на другому з малюнків, де $a + c \neq 2b$.



8. За нерівністю Коші ліва частина поданої нерівності не менша за

$$\frac{2(a+b-c)}{c} + \frac{2(b+c-a)}{a} + \frac{2(c+a-b)}{b} =$$

$$= 2\left(\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) - 3\right) \geq 2(3 \times 2 - 3) = 6.$$

9. При $a = 105$. Це випливає з рівностей:

$$A = a \times (2!)^2 \times 3 \times (4!)^2 \times 5 \times (6!)^2 \times 7 \times (8!)^2 \times 9 =$$

$$= a \times (2! \times 4! \times 6! \times 8!)^2 \times 3^2 \times 3 \times 5 \times 7.$$

10 клас

Завдання 1.

1. Доведіть, що існує нескінченна кількість пар натуральних чисел m та n таких, що $\sqrt{m} - \sqrt{n} = \sqrt{2023}$.

2. Розв'яжіть рівняння $x^3 - [x] = 3$, де $[x]$ означає найбільше ціле число, яке не перевищує x.

3. У трикутнику ABC з кутами A та C, рівними 15 та 30 градусів відповідно, проведена медіана BM. Знайдіть величину кута BMC.

Розв'язання завдання 1.

1. Оскільки $2023 = 7 \times 17^2$, то будемо шукати числа m та n у вигляді $m = 7a^2$, $n = 7b^2$, де a та b – деякі натуральні числа. Тоді з поданого рівняння отримаємо співвідношення $a - b = 17$. Зрозуміло, що пар натуральних чисел a та b, які його задовольняють, є нескінченна кількість, а разом з ними існує і нескінченна кількість шуканих пар натуральних чисел m та n.

2. Розглянемо всі можливі випадки для $[x]$.

а). Якщо $[x] = 1$, то знайдемо розв'язок $x = \sqrt[3]{4} \in [1; 2[$.

б). Якщо $[x] \geq 2$, то

$$x^3 - [x] \geq x^3 - x = x(x-1)(x+1) \geq 2 \times 1 \times 3 = 6 > 3.$$

в). Якщо $[x] = -1$, то $x^3 - [x] < 0 - (-1) = 1 < 3$.

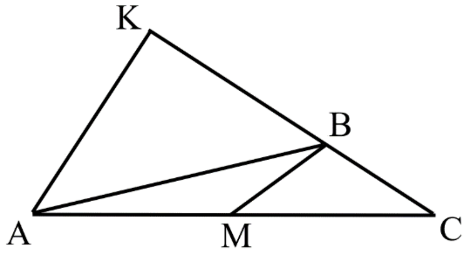
г). Якщо $[x] = 0$ чи $[x] \leq -2$, то $x^3 - [x] \leq x - [x] < 1 < 3$.

Отже, інших коренів подане рівняння не має.

3. Нехай $AKC -$ прямокутний трикутник з гіпотенузою AC, в якому точка B лежить на катеті KC (див. малюнок нижче). Його катет $AK = AM -$ половині AC. Але прямокутний трикутник AKB ще й рівнобедрений, бо його кут KBA дорівнює 45^o. Тому

$$AB^2 = 2AK^2 = AM \times AC \text{ та } AB : AM = AC : AB.$$

Отже, трикутники ABM та ACB зі спільним гострим кутом A подібні. Значить, кут ABM, як і кут ACB, також дорівнює 30^o, а кут BMC як зовнішній кут трикутника ABM дорівнює $30^o + 15^o = 45^o$.



Завдання 2.

4. Знайдіть усі пари цілих чисел x та y, для яких справджується рівність $\frac{x^2+y^2}{x+y} = 10$.

5. Наведіть приклад многочлена $P(x)$ степені 2023, для якого виконується рівність $P(x) + P(1-x) = 1$.

6. Квадрат 10×10 розбитий на 100 одиничних квадратиків 1×1, кожний з яких пофарбований у чорний чи білий колір. При цьому при повороті на 90^o за рухом годинникової стрілки кожний квадратик 1×1 потрапляє на місце квадратика, що був пофарбований у протилежний колір. Розфарбування вважаються різними, якщо при їхньому накладанні колір принаймні одного одиничного квадратика не співпадає. Скільки існує різних таких розфарбувань?

Розв'язання завдання 2.

4. Запишемо подану рівність у вигляді $(x-5)^2+(y-5)^2=50$. Число 50 представляється у вигляді суми квадратів трьох натуральних чисел такими трьома способами: $50=1^2+7^2=5^2+5^2=7^2+1^2$. Звідси для знаходження x та y отримуємо такі системи рівнянь:

$$x-5=1, y-5=7; \quad x-5=-1, y-5=7;$$
$$x-5=1, y-5=-7; \quad x-5=-1, y-5=-7;$$
$$x-5=5, y-5=5; \quad x-5=-5, y-5=-5;$$
$$x-5=5, y-5=-5; \quad x-5=-5, y-5=5;$$
$$x-5=7, y-5=1; \quad x-5=-7, y-5=1;$$
$$x-5=7, y-5=-1; \quad x-5=-7, y-5=-1.$$

З них знаходимо такі 12 пар $(x;y)$: $(6;12)$, $(4;12)$, $(6;-2)$, $(4;-2)$, $(10;10)$, $(0;0)$, $(10;0)$, $(0;10)$, $(12;6)$, $(-2;6)$, $(12;4)$, $(-2;4)$. З них лише пара $(0;0)$ не задовольняє подану рівність, бо у такому разі її знаменник перетворюється у нуль.

5. Нехай $P(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2023}+\frac{1}{2}$. Тоді

$$P(1-x)=\left(\frac{1}{2}-x\right)^{2023}+\frac{1}{2}=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2023}+\frac{1}{2}.$$

Тому $P(x)+P(1-x)=1$.

6. Розіб'ємо поданий квадрат на 4 менші квадрати 5×5 і розглянемо довільну клітинку лівого верхнього з них. Нехай для конкретності вона білого кольору. При повороті на 90^o за рухом годинникової стрілки вона перейде у відповідну клітинку правого верхнього квадрата 5×5, яка внаслідок умови задачі мала би бути чорного кольору. При наступному такому повороті знову опинимося у клітинці білого кольору з правого нижнього квадрата 5×5. Третій поворот приведе нас до відповідної клітинки чорного кольору з лівого нижнього квадрата 5×5. І, зрозуміло, після наступного повороту клітинка повернеться у своє початкове положення. Таким чином, кольори 25 клітинок лівого верхнього квадрата 5×5 однозначно визначають кольори клітинок всього квадрата 10×10. А оскільки кожна з таких клітинок могла бути пофарбована в один із двох кольорів, то різних розфарбувань існує 2^{25}.

Завдання 3.

7. Доведіть, що для довільних натуральних a, b, c значення виразу $4a^2c^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2$ націло ділиться на значення виразу $a + b + c$.

8. З нагоди свята багато жителів містечка вирішили провести день на лоні природи. Для цього вони замовили всі наявні у місті фургони, у кожному з яких мала їхати однакова кількість осіб. Але 10 фургонів виявилися несправними. Тому всі інші фургони змушені були взяти на одну людину більше. Коли ж всі вирішили повертатися додому, то ще 15 фургонів вийшли з ладу. Тому решті фургонів довелося взяти ще по дві людини додатково. Скільки всього осіб взяли участь у такому масовому відпочинку?

9. Миколка намалював на дошці чотирикутник і стверджує, що тангенси всіх чотирьох його внутрішніх кутів рівні. Чи можуть слова Миколки бути правдою?

Розв'язання завдання 3.

7. Розклавши спочатку поданий вираз на множники як різницю квадратів, отримаємо добуток

$$\big(2ac - (a^2 - b^2 + c^2)\big)\big(2ac + (a^2 - b^2 + c^2)\big) =$$
$$= (2ac - a^2 + b^2 - c^2)(2ac + a^2 - b^2 + c^2).$$

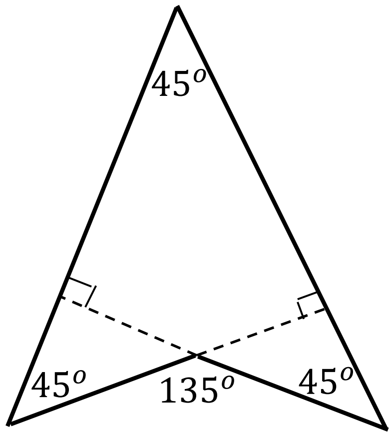
Кожен з його множників також як різниці квадратів розкладемо на два лінійні множники:

$$2ac - a^2 + b^2 - c^2 = \big(b - (a - c)\big)\big(b + (a - c)\big),$$
$$2ac + a^2 - b^2 + c^2 = \big((a + c) - b\big)\big((a + c) + b\big).$$

Оскільки для довільних натуральних a, b, c всі 4 отримані лінійні множники набувають цілих значень, і значення виразу $a + b + c$ не дорівнює нулю, то значення виразу $4a^2c^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2$ націло ділиться на значення виразу $a + b + c$.

8. Нехай усіх наявних у містечку фургонів було n, і у кожному з них мало їхати по x осіб. З умов задачі отримуємо систему таких двох рівнянь: $(n-10)(x+1)=nx$ та $(n-25)(x+3)=nx$. Після очевидних спрощень отримуємо $n=10(x+1)$ та $3n=25(x+3)$. З рівняння $30(x+1)=25(x+3)$ знаходимо $x=9$. Тоді $n=100$. Це означає, що у такому масовому відпочинку взяли участь 900 осіб.

9. На перший погляд може здатися, що такого бути не може, бо тангенси прямих кутів не визначені. І для опуклих чотирикутників це справді так. Але для неопуклого чотирикутника, зображеного на малюнку справа, тангенси усіх його чотирьох внутрішніх кутів дорівнюють 1, у тому числі і тангенс найбільшого внутрішнього кута, рівного $360^o-135^o=225^o$.



Зауважимо, що інших величин кутів у чотирикутників з такою властивістю бути не може.

11 клас

Завдання 1.

1. Натуральні числа a та b задовольняють умову $a^b+b^a=23^{11}$. Доведіть, що ab ділиться націло на 242.

2. Розв’яжіть рівняння

$$2^{5x-1}\times 3^{4x+1}\times 7^{3x+3}=504^{x-2}.$$

3. У трикутнику ABC з кутами A та C, рівними 15 та 30 градусів відповідно, проведена медіана BM. Доведіть, що пряма AB дотикається до кола, описаного навколо трикутника BMC.

Розв’язання завдання 1.

1. Оскільки число у правій частині поданої рівності непарне, то числа a та b різної парності. Якщо вони обидва більші за 1, то один з доданків зліва ділиться на 4, а другий доданок при діленні на 4 дає остачу 1 (як непарне число у парному степені). Тому записана рівність неможлива, бо її права частина при такому діленні дає остачу 3. Отже, одне з цих чисел дорівнює 1. Таким чином,

$$ab = 23^{11} - 1 = 23^{11} - 1^{11} = (23 - 1)(23^{10} + 23^9 + \dots + 23^1 + 1).$$

Такий добуток ділиться на $242 = 22 \times 11$, бо кожен з одинадцяти доданків у другій дужці при ділення на 11 дає остачу 1.

2. $504 = 7 \times 8 \times 9$, тому рівняння можна записати у вигляді:

$$2^{5x-1} \times 3^{4x+1} \times 7^{3x+3} = 2^{3x-6} \times 3^{2x-4} \times 7^{x-2}.$$

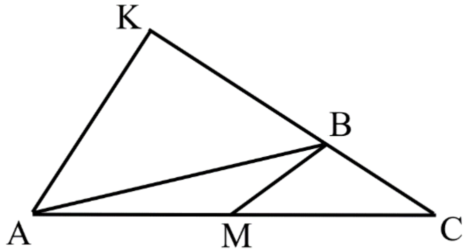
Поділивши його ліву частину на праву, отримаємо

$$2^{2x+5} \times 3^{2x+5} \times 7^{2x+5} = 1,$$

тобто $42^{2x+5} = 1$. Отже, $2x + 5 = 0$, $x = -2{,}5$.

3. Будемо міркувати аналогічно, як при розв'язуванні задачі 3 за 10 клас. Нехай $AKC -$ прямокутний трикутник з гіпотенузою AC, в якому точка B лежить на катеті KC (див. малюнок нижче). Його катет $AK = AM -$ половині AC. Але прямокутний трикутник AKB ще й рівнобедрений, бо його кут KBA дорівнює 45^o. Тому

$$AB^2 = 2AK^2 = AM \times AC.$$



Отримана рівність характеризує властивість відрізків AM та AC січної і відрізка AB дотичної до кола, описаного навколо трикутника BMC. Для жодної іншої точки P на цьому колі такої, що пряма перетинає його ще й у точці Q, рівність $AP^2 = AM \times AC$ виконуватися не може, бо при цьому

$$AP \times AQ = AM \times AC \text{ , але } AQ \neq AP.$$

<u>Завдання 2.</u>

4. У магічному квадраті 4×4 всі суми чисел по рядках, стовпчиках та діагоналях дорівнюють одному тому ж числу S. Доведіть, що й сума чисел центрального квадратика 2×2 також дорівнює S.

5. Про лінійну функцію $f(x) = ax + b$ з цілими значеннями a та b відомо, що $f\big(f(0)\big) = 0$ та $f(f(f(1))) = 11$. Обчисліть

$$f(f(f(f(1)))) + f(f(f(f(2)))) + \dots + f(f(f(f(10)))).$$

6. На стороні BC трикутника ABC вибрали точку D. У трикутники ABD та ACD вписані кола, і до них проведена спільна зовнішня дотична, відмінна від BC, яка перетинає AD у точці K. Доведіть, що довжина відрізка AK не залежить від розташування точки D на BC.

Розв'язання завдання 2.

4. Нехай усі 10 вказаних в умові задачі сум дорівнюють S, а сума чисел центрального квадратика 2×2 дорівнює P. Додамо до цих десяти сум ще й 4 суми по двох рядках та двох стовпчиках цього квадрата, які проходять через центральний квадратик 2×2. При цьому кожне число центрального квадратика буде пораховано 5 разів, а решта чисел магічного квадрата – тричі. Таким чином, отримуємо рівняння $14S = 3 \times 4S + 2P$, з якого знаходимо $P = S$.

Звідси, як наслідок, випливає, що й сума чисел, записаних у кутових клітинках такого магічного квадрата, також дорівнює S.

5. Внаслідок умов задачі маємо $f\big(f(0)\big) = f(b) = ab + b = 0$. Звідси або $b = 0$, або $a = -1$. При $b = 0$ отримаємо суперечність

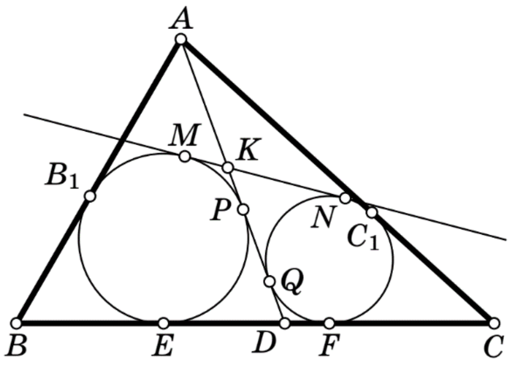
$$11 = f(f(f(1))) = f\big(f(a)\big) = f(a^2) = a^3,$$

бо 11 не є кубом цілого числа. Тому $a = -1$. Тоді $f(x) = -x + b$,

$$f(f(x) = -(-x + b) + b = x, \quad f(f(f(f(x)))) = x.$$

Отже,

$$f(f(f(f(1)))) + f(f(f(f(2)))) + \cdots + f(f(f(f(10)))) =$$
$$= 1 + 2 + \cdots + 10 = 55.$$



6. Позначимо точки дотику так, як на малюнку справа. За властивістю відрізків дотичних маємо: $AB_1 = AP$, $AC_1 = AQ$, $KM = KP$, $KN = KQ$. Крім того, $MN = EF$ як відрізки спільних дотичних до цих двох кіл. Тоді

$$2AK = (AP - KP) + (AQ - KQ) =$$
$$= AP + AQ - (KM + KN)$$
$$= AB_1 + AC_1 - MN =$$
$$= (AB - BB_1) + (AC - CC_1) - EF = AB + AC - (BE + CF + EF) =$$
$$= AB + AC - BC \Longrightarrow AK = \frac{AB+AC-BC}{2}.$$

<u>Завдання 3.</u>

7. Для додатних чисел a, b, c, які задовольняють умову $a + b + c = 3abc$, доведіть нерівність $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \geq 3$.

8. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} (x + y)(x^2 + xy + y^2) = 65y^3, \\ (x - y)(x^2 - xy + y^2) = 63y^3. \end{cases}$$

9. Турист відвідав селище, у якому кожна людина або завжди говорить правду, або завжди бреше. Жителі селища стали у коло, і кожен з них сказав туристові про свого сусіда справа, говорить той правду чи бреше. На основі цих повідомлень турист зміг однозначно визначити відсоток брехунів у цьому селищі. Визначте і ви цей відсоток.

<u>Розв'язання завдання 3.</u>

7. З умови задачі та нерівності Коші для трьох доданків отримуємо

$$3 = \frac{a + b + c}{abc} = \frac{1}{1 \times b \times c} + \frac{1}{1 \times a \times c} + \frac{1}{1 \times a \times b} \leq$$

$$\leq \frac{1 + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}}{3} + \frac{1 + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{c^3}}{3} + \frac{1 + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3}}{3} = 1 + \frac{2\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right)}{3}.$$

Звідси й випливає потрібна нерівність

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \geq 3.$$

8. Перемноживши два подані рівняння, отримаємо рівняння $x^6 - y^6 = (64^2 - 1)y^6$, з якого знайдемо $x^6 = (4y)^6$, тобто $x = \pm 4y$. Підставивши у перше рівняння системи $x = 4y$, будемо мати $105y^3 = 65y^3$. Тому $y = 0$, а разом з ним також $x = 0$. Аналогічно після підстановки у перше рівняння системи $x = 4y$ отримаємо, що $-39y^3 = 65y^3$, звідки також знайдемо $y = 0$ та $x = 0$. Таким чином, єдиним розв'язком поданої системи є пара чисел $x = 0, y = 0$.

9. Нехай частка брехунів у цьому селищі становить x. Зрозуміло, що і брехун брехуна і правдолюб правдолюба назвуть правдолюбами, а брехун правдолюба та правдолюб брехуна – брехунами. Припустимо тепер, що раптом на якусь мить кожен брехун став правдолюбом, а кожен правдолюб – брехуном. Тоді турист почув би від жителів селища той самий послідовний набір відповідей, що і у традиційному випадку. Але при цьому частка брехунів дорівнювала би $1 - x$. Тому турист однозначно зміг би визначити частку брехунів лише за умови $x = 1 - x$, тобто за умови, що спочатку тих та інших було порівну. Отже, брехунами у цьому селищі є 50% його жителів.

2024 рік

7 клас

1. У класі більше двадцяти, але менше тридцяти учнів, і дні народження у всіх із них різні. Миколка сказав: «У нашому класі вдвічі більше старших за мене учнів, ніж молодших». Катруся сказала: «У нашому класі втричі більше старших за мене учнів, ніж молодших». Скільки учнів у цьому класі, якщо слова обох були правдою?

2. Натуральні числа x та y задовольняють рівність

$$(x - y)(x - 2y)(x + 3y) = 2024.$$

Знайдіть хоч одну пару таких чисел.

3. Зла чаклунка погрожує спопелити всю планету своїм новим грізним закляттям «ВУЛКАНИ ТА ЖАРА». Воно активується, якщо різні його букви замінити різними цифрами так, щоб отримане при цьому 13-цифрове число стало простим числом. Чи треба боятися такого закляття злої чаклунки? Відповідь обґрунтуйте.

4. Точка $M -$ середина сторони CD прямокутника $ABCD$, а точка K лежить на його стороні AD. Знайдіть величину кута BKM, якщо кути CBM та KBM дорівнюють по 25^o.

5. У коробці є 7 синіх та 7 жовтих кульок. Петрик навмання виймає їх з коробки, доки вперше не настане момент, що витягнута однакова кількість кульок обох кольорів. Виявилося, що для цього Петрику довелося вийняти усі кульки, причому жодного разу ним не були вийняті підряд 3 кульки одного кольору. Доведіть, що кульки, які виймалися одинадцятою та дванадцятою, були різного кольору.

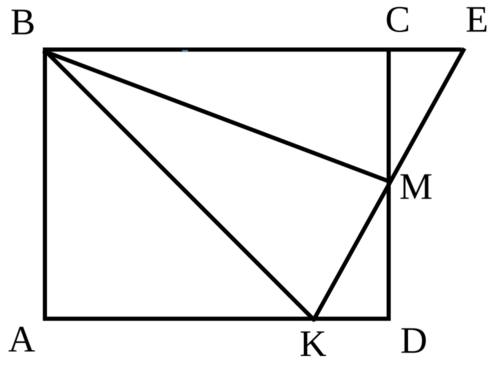
6. Знайдіть усі пари невід'ємних цілих чисел a та b таких, що $(a!+1)(b!+1)=(a+b)!$ Нагадуємо, що $0!=1$, $n!=1\times 2\times \ldots\times n$.

Розв'язання задач

1. Зі слів Миколки випливає, що без нього кількість інших учнів класу ділиться на 3, а зі слів Катрусі без неї кількість інших учнів класу має ділитися на 4. Для чисел від 20 до 28 обидві ці умови задовольняє лише число 24. Тому у класі Миколки та Катрусі 25 учнів.

2. Оскільки $2024=8\cdot 11\cdot 23$, то попробуємо підібрати множники у лівій частині рівності так, щоб вони послідовно дорівнювали 11, 8 та 23. З рівнянь $x-y=11$, $x-2y=8$, $x+3y=23$ знаходимо $x=14$, $y=3$.

3. Зауважимо, що у заклятті злої чаклунки 9 літер зустрічаються по одному разові, а буква А – чотири рази. Оскільки сума всіх цифр від 0 до 9 дорівнює 45, то при кожній заміні різних букв закляття різними цифрами, взявши кожну з 10 букв по одному разові і ще тричі букву А, будемо отримувати 13-цифрове число, кратне 3. Тому таке число не буде простим. Отже, боятися погроз злої чаклунки не треба.



4. Продовжимо відрізок KM до перетину з прямою BC у точці E. Оскільки точка $M-$ середина сторони CD, а у прямокутних трикутниках CME та DMK вертикальні кути при вершині M рівні, то $KM=ME$. Отже, відрізок BM одночасно є бісектрисою та медіаною трикутника KBE. Тому він є і його висотою. З прямокутного трикутника KBM знаходимо, що кут BKM дорівнює 65^o.

5. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що чотирнадцята вийнята кулька була синього кольору. Тоді тринадцята кулька також була синьою, бо в іншому разі однакова кількість кульок обох кольорів стала би уже після дванадцятого кроку. Оскільки тричі підряд кульки одного кольору не виймалися, то при цьому дванадцята кулька була жовтого кольору. Якщо б одинадцята вийнята кулька також була жовтою, то однакова кількість кульок обох кольорів появилась би уже після десятого кроку. Тому одинадцята кулька була синього кольору, що й доводить твердження задачі.

Зауважимо, що описана ситуація можлива, якщо, наприклад, кульки виймалися у такій послідовності: ЖЖСЖСЖСЖСЖСЖСС.

6. Якщо кожне з чисел a та b більше за 1, то добуток множників у лівій частині рівності є непарним, а число справа – парне. Якщо одне з чисел, наприклад a, дорівнює нулю, то рівність також неможлива, бо $2(b!+1) > b!$. Так само $b \neq 0$. Якщо ж $a = 1$, то $2(b!+1) = (b+1)!$ і цю рівність можна записати у вигляді $\big((b+1)-2\big)b! = 2$. Число $b = 1$ її не задовольняє, при $b > 2$ значення лівої частини більші за 2, а при $b = 2$ отримуємо правильну рівність. Отже, маємо шукану пару чисел $a = 1, b = 2$. З міркувань симетрії іншою такою парою буде пара $a = 2, b = 1$.

8 клас

1. Цілі числа x та y задовольняють рівність

$$(x+y)(x+2y)(x-3y) = 2024.$$

Знайдіть хоч одну пару таких чисел.

2. Додатні числа x, y задовольняють рівність $x^3 - y^3 = 4x$. Доведіть, що $x^2 > 2y$.

3. Марійка розрізала квадрат 8×8 вздовж ліній сітки на частини з однаковим периметром. Яку найбільшу кількість частин вона могла отримати, якщо відомо, що не всі вони були рівними?

4. На сторонах BC та CD квадрата $ABCD$ відклали точки M та K відповідно такі, що кути BAM та CKM дорівнюють по 30^o. Знайдіть величини кутів трикутника AMK.

5. Юний математик, опинився на острові, всі жителі якого дуже добре знали математику, але лише деякі з них завжди говорили правду, а інші – завжди брехали. Запитавши одного із жителів острова «Чи можна записати по колу числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 так, щоб кожне записане число ділилося націло на різницю двох сусідніх з ним чисел?», він за почутою відповіддю зразу визначив, хто стояв перед ним: брехун чи правдолюб. А чи могли б це зробити ви?

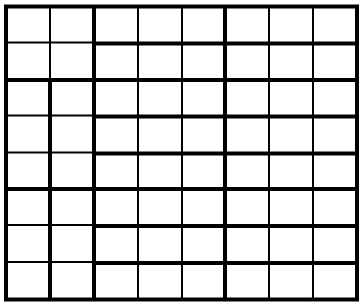
6. Обчисліть добуток $abcd$, якщо $4^a = 5,\ 5^b = 6,\ 6^c = 7,\ 7^d = 8$.

Розв'язання задач

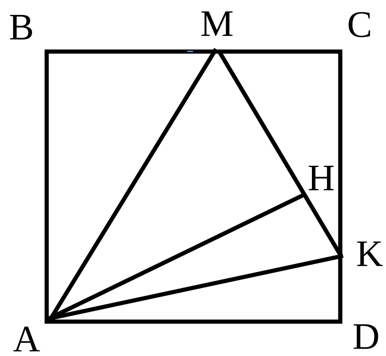
1. Оскільки $2024 = 8 \cdot 11 \cdot 23$, то попробуємо підібрати множники у лівій частині рівності так, щоб вони послідовно дорівнювали 11, 8 та 23. З рівнянь $x + y = 11$, $x + 2y = 8$, $x - 3y = 23$ знаходимо $x = 14$, $y = -3$.

2. З додатності x, y та рівності $x^3 - y^3 = 4x$ отримуємо, що $x > y$. Записавши цю рівність у вигляді $y^3 = x^3 - 4x = x(x+2)(x-2)$, будемо мати, що $x > 2$. Тому $x^2 - 2y = x(x-2) + 2(x-y) > 0$, або ж зразу $x^2 = x \cdot x > 2 \cdot y = 2y$, що й треба було довести.

3. Найменшою з таких частин міг би бути одиничний квадратик з периметром 4. Але у такому разі всі інші частинки також мали би бути одиничними квадратиками, що суперечить умові задачі. Наступний можливий периметр 6 мають лише прямокутники розмірами 1×2. Тому вони також не могли бути використані для розрізання. А оскільки периметр 7 неможливий, то перейдемо до частинок з периметром 8. Ними можуть бути або прямокутники розмірами 1×3, або кутики, в яких одиничні квадратики прилягають до сусідніх сторін іншого одиничного квадратика, або квадрати 2×2. Перші два з них мають площу 3, а третій – площу 4. Площі ж фігурок з більшими периметрами також не менші за 4. Оскільки $21 \cdot 3 < 8 \cdot 8 < 22 \cdot 3$, то при розрізанні більше як 21 частину отримати не вдасться. Приклад із отриманням двадцять однієї частини наведений на малюнку нижче. Зрозуміло, що він не єдиний з усіх можливих.

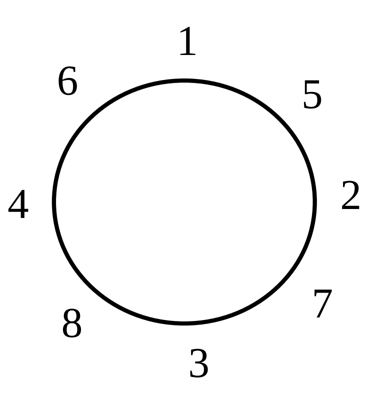


4. З прямокутних трикутників BAM та CKM знайдемо, що кути BMA та CMK дорівнюють по 60^o. Тому кут AMK також дорівнює 60^o. Проведемо у трикутнику AMK висоту AH. Оскільки прямокутні трикутники ABM та AHM рівні за спільною гіпотенузою AM та рівними кутами при вершині M, то $AH = AB$. Тоді й прямокутні трикутники ADK та AHK також рівні за спільною гіпотенузою AK та рівними катетами AD та AH. Тому їхні кути при вершині K є рівними. Але кут MKD дорівнює 150^o, тому кут AKM дорівнює 75^o. Тоді на кут MAK залишається 45^o.



Зауважимо, що з рівності пар прямокутних трикутників ABM та AHM, ADK та AHK можна було також зробити висновок, що у них відповідні кути при вершині A рівні, і отримати, що кут MAK дорівнює половині прямого кута BAD.

5. Записати таким чином по колу числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 можна. Наприклад, як на малюнку справа. Оскільки за умовою задачі зустрічний дуже добре знав математику, то він легко отримав би правильну відповідь на поставлене питання. Тому відповісти «Можна» міг тільки правдолюб, а «Не можна» – тільки брехун.



6. З умови задачі випливає, що

$$(((4^a)^b)^c)^d = ((5^b)^c)^d = (6^c)^d = 7^d = 8.$$

Звідси $4^{abcd} = 8$, або ж $2^{2abcd} = 2^3$. Тому $2abcd = 3$, $abcd = 3/2$.

9 клас

1. Миколка хоче подати кожне натуральне як суму двох складених натуральних чисел. Для скількох натуральних чисел йому це не вдасться зробити?

2. Числа a та b задовольняють рівність $a^2 + b^2 + ab = a + b$. Знайдіть найбільше можливе значення виразу $a^2 + b^2$.

3. Розв'яжіть рівняння $(x - 1)(4x^2 - 8x + 1) = 2024$.

4. Знайдіть відстань між серединами сторін BC та AD опуклого чотирикутника $ABCD$, якщо його сторони AB та CD лежать на двох перпендикулярних прямих і дорівнюють 8 та 6 сантиметрів відповідно.

5. На дошці записані числа 2022 та 2024. Миколка і Петрусь ходять по черзі, розпочинає Петрусь. За один хід можна зменшити одне з чисел на його ненульову цифру чи на ненульову цифру іншого числа, або поділити одне з чисел на 2, якщо воно парне. Виграє той, хто першим напише одноцифрове число. У котрого з гравців є виграшна стратегія?

6. Миколка приніс до школи скриньку з квадратним дном розмірами 9×9, в якій у 9 рядів було укладено 81 однакових кульок так, що жодна з них не могла навіть поворухнутися. Михайлик, початкуючий фокусник, переклав кульки Миколки до своєї чарівної прямокутної скриньки з таким же периметром дна, але площею на 1 меншою, і легенько підштовхнув її з одного боку. Всі кульки спочатку зарухалися, а коли вони зупинилися, то жодні дві з них не торкалися одна одної. Миколка засумнівався, чи не заховав Михайлик принаймні дві з його кульок у своєму рукаві, і перерахував кульки у чарівній скриньці. Він дуже здивувався, коли у ній виявилося навіть на 5 таких кульок більше. Як Михайликові міг вдатися цей фокус?

Розв'язання задач

1. Оскільки найменшим парним складеним числом є число 4, то, починаючи з 8, усі парні числа n можна подати у вигляді суми двох складених чисел $n-4$ та 4. Так само, починаючи з 13, кожне непарне число n можна подати у вигляді суми двох складених чисел $n-9$ та 9. Безпосередньою перевіркою переконуємося, що жодне з інших натуральних чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11 у вказаному вигляді подати не можна. Отже, Миколці не вдасться отримати бажане представлення всього для дев'яти натуральних чисел.

2. Помножимо обидві частини поданої рівності на 2 і запишемо її у вигляді $a^2+b^2=-(a+b)^2+2(a+b)$. Тепер віднімемо 1 від обох частин отриманої рівності. Тоді з нерівності

$$a^2+b^2-1=-\big((a+b)-1\big)^2\leq 0$$

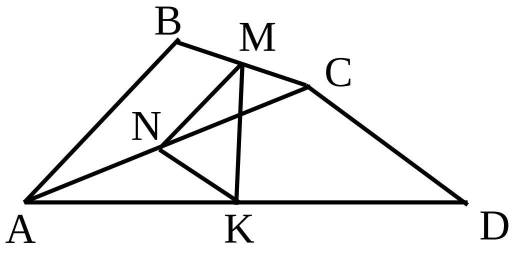
будемо мати, що $a^2+b^2\leq 1$. А оскільки рівність тут досягається, наприклад, при $a=1$, $b=0$, то за поданої умови найбільше значення виразу a^2+b^2 дорівнює 1.

3. Спробуємо шукати значення множника $(x-1)$ серед дільників числа $2024=8\cdot 11\cdot 23$. Числа 1, 2 та 4 для цього явно замалі. А для $x-1=8$ знайдемо $4x^2-8x+1=4\cdot 9^2-8\cdot 9+1=253=11\cdot 23$. Тому $x=9$ – один з коренів поданого рівняння. Розкривши дужки, запишемо це рівняння у вигляді $4x^3-12x^2+9x-2025=0$ та розкладемо ліву частину на множники:

$$4x^3-12x^2+9x-2025=(x-9)(4x^2+ax+225).$$

Прирівнюючи коефіцієнти біля x^2, отримаємо $a=24$. Оскільки дискримінант квадратного рівняння $4x^2+24x+225=0$ від'ємний, то інших дійсних коренів немає.

4. Позначимо середини відрізків BC, AC та AD точками M, N та K відповідно. Оскільки при цьому MN — середня лінія трикутника ABC, а NK — середня лінія трикутника ADC, то MN паралельна до AB і дорівнює 4, а NK паралельна до CD і дорівнює 3. Крім того, MN та NK перпендикулярні між собою. Тому за теоремою Піфагора шукана відстань MK дорівнює 5 сантиметрів.



5. Виграшна стратегія є у Петруся. Першим своїм ходом він може замість числа 2024 записати число 2022. Очевидно, що після цього Миколка своїм першим ходом перемогти не зможе. Далі Петрусеві для перемоги достатньо поступати таким чином. Якщо після чергового ходу Миколки Петрусь може записати одноцифрове число, то він записує його і виграє. В іншому разі Петрусь замість більшого наявного у даний момент часу числа записує число, яке перед цим записав Миколка, зрівнюючи обидва числа на дошці. Такий хід він зможе зробити, бо тільки що саме таке число Миколка зумів записати. Оскільки перед цим Петрусь ще не міг виграти, то і Миколка після такого ходу Петруся своїм наступним ходом також не виграє. Але з кожним зробленим ходом сума записаних чисел зменшується, залишаючись натуральним числом. Тому на якомусь скінченному кроці хтось із цих гравців отримає одноцифрове число і переможе. Зі сказаного вище випливає, що ним буде Петрусь.

6. Щоб таким чином 81 кульку розмістити щільно на квадратному дні розмірами 9×9, необхідно, щоб кульки мали діаметр 1. При цьому периметр дна Миколчиної скриньки дорівнюватиме 36, а його площа – 81. Відповідно, прямокутне дно чарівної скриньки Михайлика матиме розміри 10×8. Припустимо, що Михайлик спочатку виклав 10 кульок вздовж більшої сторони своєї скриньки, за ними – 9 кульок так, щоб кожна з них торкалася двох кульок з попереднього ряду. Далі знову виклав ряд із 10 кульок, потім – із 9, і продовжив таке чергування до отримання 9 рядів, після чого у чарівній скриньці опинилися $5 \times 10 + 4 \times 9 = 86$ кульок, які й виявив Миколка після підрахунку. Доведемо, що ці 9 рядів Михайликові вдасться викласти. Для цього розглянемо систему із трьох кульок діаметра 1, кожна з яких торкається двох інших. Їх центри є вершинами рівностороннього трикутника зі стороною 1 та висотою, рівною $\sqrt{3}/2$. Цій висоті якраз і дорівнює відстань між серединами сусідніх викладених Михайликом рядів. Якщо додати до таких 8 відстаней з кожного боку ще по пів діаметра кульок, то отримаємо відстань від більшого краю скриньки до верхнього краю дев'ятого ряду $d = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = 4\sqrt{3} + 1 < 8$, бо $\left(4\sqrt{3}\right)^2 = 48 < 49 = 7^2$. Якщо після такого викладання скриньку легенько штовхнути від більшої сторони, то рядки із 10 кульок втратять свою щільність. Відповідно розлетяться й інші кульки. А скринька Михайлика на те і є чарівною, щоб після зупинки жодні дві кульки не торкалися одна одної. Для цього внаслідок строгої нерівності $4\sqrt{3} + 1 < 8$ запасу відстаней між ними вистачить.

10 клас

1. Миколка намалював на дошці чотирикутник і стверджує, що тангенси всіх чотирьох його внутрішніх кутів рівні. Чи можуть слова Миколки бути правдою?

2. З нагоди свята багато жителів містечка вирішили провести день на лоні природи. Для цього вони замовили всі наявні у місті фургони, у кожному з яких мала їхати однакова кількість осіб. Але 10 фургонів виявилися несправними. Тому всі інші фургони змушені були взяти на одну людину більше. Коли ж всі вирішили повертатися додому, то ще 15 фургонів вийшли з ладу. Тому решті фургонів довелося взяти ще по дві людини додатково. Скільки всього осіб взяли участь у такому масовому відпочинку?

3. Натуральні числа a, b, c такі, що їхня сума дорівнює 2024. Доведіть, що $4a^2c^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2$ ділиться націло на 23.

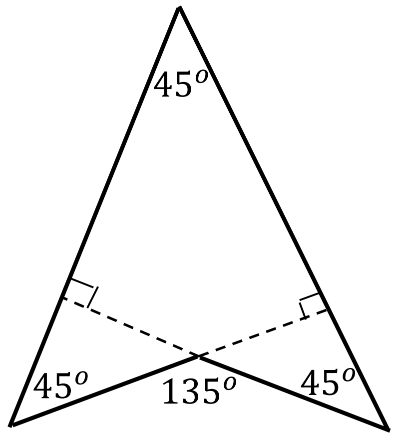
4. У трикутнику ABC з кутами A та C, рівними 15 та 30 градусів відповідно, проведена медіана BM. Знайдіть величину кута BMC.

5. Квадрат 10×10 розбитий на 100 одиничних квадратиків 1×1, кожний з яких пофарбований у синій чи жовтий колір. При цьому при повороті на 90^o за рухом годинникової стрілки кожний квадратик 1×1 потрапляє на місце квадратика, що був пофарбований у протилежний колір. Розфарбування вважаються різними, якщо при їхньому накладанні колір принаймні одного одиничного квадратика не співпадає. Скільки існує різних таких розфарбувань?

6. Доведіть, що: а) $S < 0{,}008$; б) $S < 0{,}004$, якщо

$$S = \sum_{n=0}^{24} \frac{1}{2^n + 2^{12}}.$$

<u>*Розв'язання задач*</u>



1. На перший погляд може здатися, що такого бути не може, бо тангенси прямих кутів не визначені. І для опуклих чотирикутників це справді так. Але для неопуклого чотирикутника, зображеного на малюнку справа, тангенси усіх його чотирьох внутрішніх кутів дорівнюють 1, у тому числі і тангенс найбільшого внутрішнього кута, рівного $360^o - 135^o = 225^o$.

2. Нехай усіх наявних у містечку фургонів було n, і у кожному з них мало їхати по x осіб. З умов задачі отримуємо систему таких двох рівнянь: $(n-10)(x+1) = nx$ та $(n-25)(x+3) = nx$. Після очевидних спрощень отримуємо $n = 10(x+1)$ та $3n = 25(x+3)$. З рівняння $30(x+1) = 25(x+3)$ знаходимо $x = 9$. Тоді $n = 100$. Це означає, що у такому масовому відпочинку взяли участь 900 осіб.

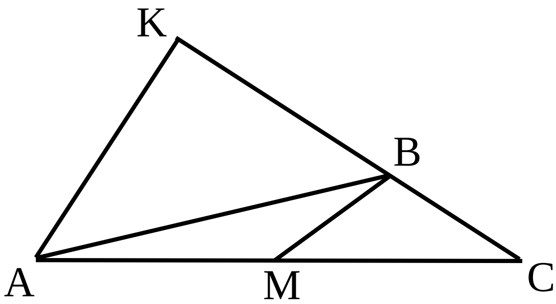
3. Розклавши спочатку поданий вираз на множники як різницю квадратів, отримаємо добуток

$$\bigl(2ac-(a^2-b^2+c^2)\bigr)\bigl(2ac+(a^2-b^2+c^2)\bigr)=$$
$$=(2ac-a^2+b^2-c^2)(2ac+a^2-b^2+c^2).$$

Кожен з його множників також як різниці квадратів розкладемо на два лінійні множники:

$$2ac-a^2+b^2-c^2=\bigl(b-(a-c)\bigr)\bigl(b+(a-c)\bigr),$$
$$2ac+a^2-b^2+c^2=\bigl((a+c)-b\bigr)\bigl((a+c)+b\bigr).$$

Оскільки для довільних натуральних a, b, c всі 4 отримані лінійні множники набувають цілих значень, і значення виразу $a+b+c$ не дорівнює нулю, то значення виразу $4a^2c^2-(a^2-b^2+c^2)^2$ націло ділиться на $a+b+c=2024=88\cdot 23$. Отже, ділиться націло і на 23.



4. Нехай $AKC-$ прямокутний трикутник з гіпотенузою AC, в якому точка B лежить на катеті KC (див. малюнок справа). Його катет $AK=AM$ і дорівнює половині AC. Але прямокутний трикутник AKB ще й рівнобедрений, бо його кут KBA дорівнює 45^o. Тому $AB^2=2AK^2=AM\times AC$ та $AB{:}AM=AC{:}AB$. Отже, трикутники ABM та ACB зі спільним гострим кутом A подібні. Значить, кут ABM, як і кут ACB, також дорівнює 30^o, а кут BMC як зовнішній кут трикутника ABM дорівнює $30^o+15^o=45^o$.

5. Розіб'ємо поданий квадрат на 4 менші квадрати 5×5 і розглянемо довільну клітинку лівого верхнього з них. Нехай для конкретності вона синього кольору. При повороті на 90^o за рухом годинникової стрілки вона перейде у відповідну клітинку правого верхнього квадрата 5×5, яка внаслідок умови задачі мала би бути жовтого кольору. При наступному такому повороті знову опинимося у клітинці синього кольору з правого нижнього квадрата 5×5. Третій поворот приведе нас до відповідної клітинки жовтого кольору з лівого нижнього квадрата 5×5. І, зрозуміло, після наступного повороту клітинка повернеться у своє початкове положення. Таким чином, кольори 25 клітинок лівого верхнього квадрата 5×5 однозначно визначають кольори клітинок всього квадрата 10×10. А оскільки кожна з таких клітинок могла бути пофарбована в один із двох кольорів, то різних розфарбувань існує 2^{25}.

6. а). Справді,

$$S = \sum_{n=0}^{24} \frac{1}{2^n + 2^{12}} < \sum_{n=0}^{24} \frac{1}{2^{12}} = \frac{25}{2^{12}} < \frac{32}{2^{12}} = \frac{1}{2^7} = \frac{1}{128} < \frac{1}{125} = 0{,}008.$$

б). Розглянемо такий ланцюжок рівностей:

$$2S = S + S = \sum_{n=0}^{24} \frac{1}{2^n + 2^{12}} + \sum_{n=0}^{24} \frac{1}{2^{24-n} + 2^{12}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{24} \left(\frac{1}{2^n + 2^{12}} + \frac{1}{2^{24-n} + 2^{12}} \right) = \frac{1}{2^{12}} \sum_{n=0}^{24} \left(\frac{1}{2^{n-12} + 1} + \frac{1}{2^{12-n} + 1} \right) =$$

$$= \frac{1}{2^{12}} \sum_{n=0}^{24} \left(\frac{1}{2^{n-12} + 1} + \frac{2^{n-12}}{1 + 2^{n-12}} \right) = \frac{1}{2^{12}} \sum_{n=0}^{24} \frac{1 + 2^{n-12}}{2^{n-12} + 1} = \frac{25}{2^{12}} < 0{,}008.$$

Звідси випливає, що $S < 0{,}004$. Тим більше $S < 0{,}008$, як у пункті а).

11 клас

1. На дошці записані числа 1, 2, 3, …, 2024. З’ясуйте, яких чисел серед них більше – таких, що кратні принаймні одному з чисел 3 або 4, чи усіх інших.

2. Знайдіть усі натуральні числа n, для яких число $n^{\frac{1}{n-7}}$ також є натуральним числом.

3. У магічному квадраті 4×4 всі суми чисел по рядках, стовпчиках та діагоналях дорівнюють одному і тому ж числу S. Доведіть, що й сума чисел центрального квадратика 2×2 також дорівнює S.

4. У трикутнику ABC з кутами A та C, рівними 15 та 30 градусів відповідно, проведена медіана BM. Доведіть, що пряма AB дотикається до кола, описаного навколо трикутника BMC.

5. Знайдіть усі цілочислові розв'язки рівняння

$$\frac{8^x - 2^x}{6^x - 3^x} = 2.$$

6. Доведіть нерівності $S < 2^{-1001}$ та $S < 2^{-1002}$, якщо

$$S = \sum_{n=0}^{2024} \frac{1}{2^n + 2^{1012}}.$$

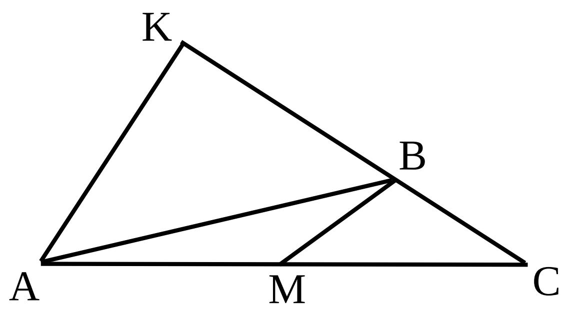
Розв'язання задач

1. Серед кожних дванадцяти послідовних чисел є порівну чисел, кратних принаймні одному з чисел 3 або 4, та усіх інших. Наприклад, серед чисел від 1 до 12 першій множині належатимуть числа 3, 4, 6, 8, 9 та 12, а другій – усі решта. Оскільки 2024 при діленні на 12 дає остачу 8, то досить порівняти кількості чисел з такими властивостями серед перших восьми. З них кратних 3 або 4 є чотири числа, а інших – також чотири. Тому серед чисел 1, 2, 3, …, 2024 як одних, так й інших чисел порівну.

2. Безпосередньою перевіркою переконуємося, що серед чисел $n \leq 10$ умову задачі задовольняють лише 1, 8, 9. Інших розв'язків немає, бо $1 < n^{\frac{1}{n-7}} < 2$ для $n \geq 11$. Така подвійна нерівність рівносильна нерівності $1 < n < 2^{n-7}$. Отже, достатньо довести лише нерівність $2^{n-7} > n$ для $n \geq 11$. Якщо $n = 11$, то вона правильна, бо $2^4 > 11$. А з припущення її правильності для $n = k \geq 11$ випливає для $n = k + 1$, що $2^{k+1-7} = 2 \cdot 2^{k-7} > 2k > k + 1$. Тому внаслідок принципу математичної індукції така нерівність правильна для всіх натуральних $n \geq 11$.

3. Нехай усі 10 вказаних в умові задачі сум дорівнюють S, а сума чисел центрального квадратика 2×2 дорівнює P. Додамо до цих десяти сум ще й 4 суми по двох рядках та двох стовпчиках цього квадрата, які проходять через центральний квадратик 2×2. При цьому кожне число центрального квадратика буде пораховано 5 разів, а решта чисел магічного квадрата – тричі. Таким чином, отримуємо рівняння $14S = 3 \cdot 4S + 2P$, з якого знаходимо $P = S$, що й треба було довести.

4. Будемо міркувати аналогічно, як при розв'язуванні задачі 4 за 10 клас. Нехай $AKC -$ прямокутний трикутник з гіпотенузою AC, в якому точка B лежить на катеті KC (див. малюнок справа). Його катет $AK = AM$ і дорівнює половині AC. Але прямокутний трикутник AKB ще й рівнобедрений, бо його кут KBA дорівнює 45^o. Тому $AB^2 = 2AK^2 = AM \cdot AC$.



Отримана рівність характеризує властивість відрізків AM та AC січної і відрізка AB дотичної до кола, описаного навколо трикутника BMC. Для жодної іншої точки P на цьому колі такої, що пряма AP перетинає його ще й у точці Q, рівність $AP^2 = AM \cdot AC$ виконуватися не може, бо тоді $AP \cdot AQ = AM \cdot AC$, але $AQ \neq AP$.

5. Зрозуміло, що x не може дорівнювати нулю. Для всіх інших значень спростимо ліву частину рівняння:

$$\frac{8^x - 2^x}{6^x - 3^x} = \frac{2^x(2^{2x} - 1)}{3^x(2^x - 1)} = \frac{2^x(2^x + 1)}{3^x}.$$

Внаслідок цього рівняння можна буде записати у вигляді:

$$2^{x-1}(2^x + 1) = 3^x.$$

Його очевидним розв'язком є $x = 1$, а для натуральних $x \geq 2$ така рівність виконуватися не може, бо при цьому її ліва частина буде парним числом, а права – непарним.

Якщо ж ціле число x є від'ємним, то покладемо $x = -n$ і запишемо цю рівність у вигляді $2^{-n-1}(2^{-n} + 1) = 3^{-n}$. Помноживши обидві її частини на $2^{2n+1}3^n$, будемо мати $3^n(1+2^n)=2^{2n+1}$. І знову суперечність, бо добуток зліва непарне число, а число справа – парне.

Таким чином, $x=1$ є єдиним шуканим розв'язком.

6. Справді,

$$S=\sum_{n=0}^{2024}\frac{1}{2^n+2^{1012}}<\sum_{n=0}^{2024}\frac{1}{2^{1012}}=\frac{2025}{2^{1012}}<\frac{2048}{2^{1012}}=\frac{2^{11}}{2^{1012}}=2^{-1001}.$$

А для доведення другої нерівності розглянемо такий ланцюжок рівностей:

$$2S=S+S=\sum_{n=0}^{2024}\frac{1}{2^n+2^{1012}}+\sum_{n=0}^{2024}\frac{1}{2^{2024-n}+2^{1012}}=$$

$$=\sum_{n=0}^{2024}\left(\frac{1}{2^n+2^{1012}}+\frac{1}{2^{2024-n}+2^{1012}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2^{1012}}\sum_{n=0}^{2024}\left(\frac{1}{2^{n-1012}+1}+\frac{1}{2^{1012-n}+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2^{1012}}\sum_{n=0}^{2024}\left(\frac{1}{2^{n-1012}+1}+\frac{2^{n-1012}}{1+2^{n-1012}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2^{1012}}\sum_{n=0}^{2024}\frac{1+2^{n-1012}}{2^{n-1012}+1}=\frac{2025}{2^{1012}}<2^{-1001}.$$

Звідси випливає, що $S<2^{-1002}$. А, як наслідок, також $S<2^{-1001}$.

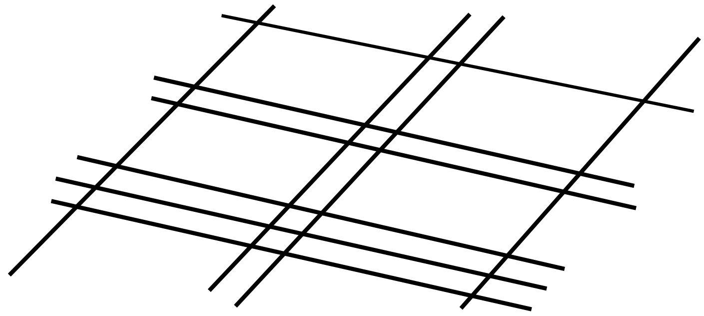
2025 рік

7 клас

1. Натуральне число n таке, що сума перших n непарних натуральних чисел дорівнює 2025. Знайдіть це число.

2. У трикутнику ABC проведена медіана BM. Знайдіть величину кута ABM, якщо $\angle ACB = 30^o$, $\angle AMB = 45^o$.

3. Миколка, учень 7-го класу, так і не навчився множити у стовпчик, а коли йому без калькулятора знадобилося помножити 121 на 321, він просто намалював декілька ліній, які ви бачите на



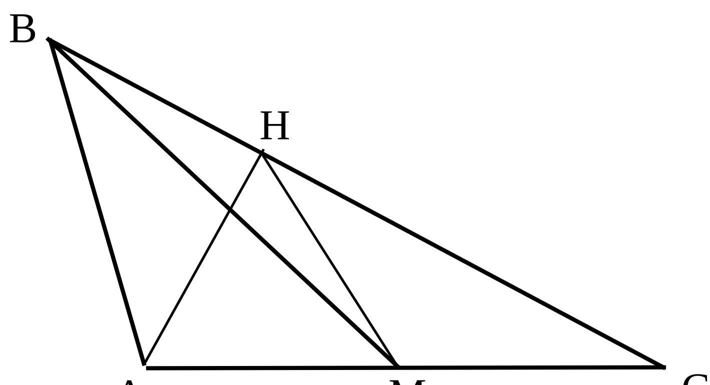
малюнку справа, і зразу записав правильний добуток 38841. Поясніть, як йому це вдалося, і обґрунтуйте, чому такий спосіб Миколки множення трицифрових чисел приводить до правильних відповідей.

4. Ганнуся, маючи олівці трьох різних кольорів, хвалиться, що замалювала ними у таблиці 7×7 декілька клітинок так, що у кожному рядку та кожному стовпчикові такої таблиці виявилося по одній клітинці кожного кольору, причому жодні дві замальовані клітинки не мають спільної сторони. Чи можуть її слова бути правдою?

5. На сторонах AD та CD квадрата $ABCD$ вибрали точки E та F відповідно такі, що кути ABE та CBF відповідно дорівнюють 20 та 25 градусів. Знайдіть периметр трикутника DEF, якщо $AB = 1$.

Розв'язання задач

1. З умови задачі маємо рівності: $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = 2025$ та $(2n - 1) + (2n - 3) + \cdots + 1 = 2025$. Додавши їх, отримаємо рівняння $n \cdot 2n = 2 \cdot 2025$, з якого знаходимо $n = 45$.

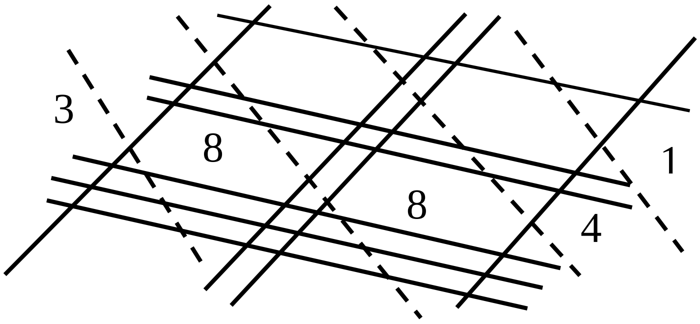


2. Проведемо перпендикуляр AH до прямої BC і з'єднаємо точку H з точкою M. З прямокутного трикутника AHC

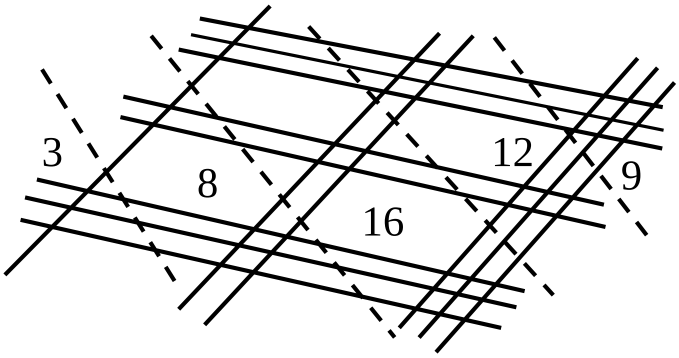
знайдемо, що $\angle CAH = 60^o$ та $AH = \frac{AC}{2} = AM$.

Тому трикутник MAH рівносторонній, а точка H лежить на стороні BC. Далі, простим підрахунком кутів отримуємо: $\angle MBH = 45^o - 30^o = 15^o$, $\angle BMH = 60^o - 45^o = 15^o$. Отже, $BH = HM = AH$, звідки випливає, що $\angle ABH = \angle BAH = 45^o$. Тому $\angle ABM = \angle ABH - \angle MBH = 45^o - 15^o = 30^o$.

3. Розіб'ємо малюнок Миколки пунктирними лініями на 5 секторів і порахуємо у кожному з них кількість точок перетину зображених суцільних ліній. Це і будуть цифри шуканого добутку.



Якщо би кількість точок у секторі перевищувала 9, то першу цифру їх кількості Миколка додавав би до числа у сектор лівіше. Наприклад, для множення 123 на 323 ми мали би таку картинку, як на малюнку справа, і шуканий добуток дорівнював би 39729.



Такий спосіб множення приводить до правильних відповідей тому, що кількість паралельних ліній кожного типу дорівнює відповідно (зліва направо та знизу вгору) кількості сотень, десятків та одиниць поданих трицифрових чисел, а кількості точок перетину у секторах (справа наліво) дорівнюють одиницям, десяткам, сотням, тисячам та десяткам тисяч шуканого добутку. Аналітично це виглядає так:

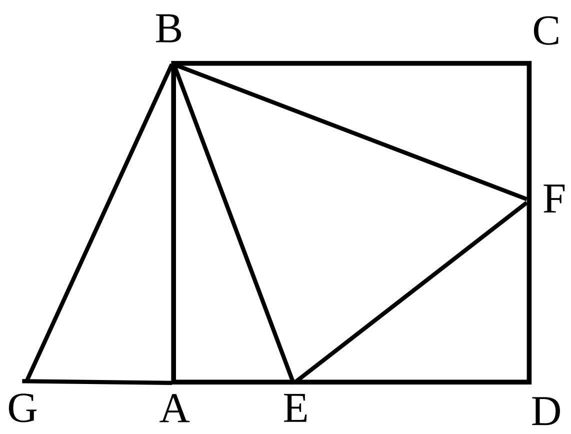
$$(100a + 10b + c)(100d + 10e + f) =$$
$$= 10000ad + 1000(ae + bd) + 100(af + be + cd) + 10(bf + ce) + cf.$$

Зауважимо, що у випадку наявності у множнику цифри 0 відповідну їй лінію доцільно малювати значно тоншою за інші лінії, але точки перетину з нею не враховувати.

4. Можуть. Відповідний приклад наведено нижче. У замальованих клітинках записані номери відповідних кольорів.

1		2		3		
	1		2		3	
		1		2		3
3			1		2	
	3			1		2
2		3			1	
	2		3			1

5. Побудуємо зліва від квадрата $ABCD$ трикутник ABG, рівний трикутнику CBF (див. мал. справа). У трикутниках BEG та BEF сторони BG та BF рівні, сторона BE є спільною. Крім того, $\angle GBE = \angle FBE = 45^o$. Тому ці два трикутники рівні. Отже, периметр трикутника DEF дорівнює



$$DE + DF + EF = DE + DF + (AE + AG) =$$
$$= (DE + AE) + (DF + CF) = AD + CD = 2AB = 2.$$

8 клас

1. Натуральне число $n > 1$ таке, що сума n послідовних непарних натуральних чисел дорівнює 2025. Знайдіть усі такі числа n.

2. Доведіть, що

$$\sqrt{\frac{1 + 2024^4 + 2025^4}{2}} = 2024^2 + 2025.$$

3. На діаметрі AB кола радіуса $R = 8$ вибрали точку P, а на самому колі – дві точки M та K такі, що $\angle APM = \angle MPK = \angle KPB = 60^o$. Доведіть, що довжина відрізка MK не залежить від вибору точки P, і знайдіть цю довжину.

4. По колу записали чотири числа, сума яких дорівнює нулю. Чи може сума чотирьох добутків пар сусідніх записаних чисел бути додатною? Якщо так, то наведіть хоч один такий приклад.

5. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{1+\sqrt{1+x}} = \sqrt[3]{x}$.

Розв'язання задач

1. Додавши суми $(2m+1)+(2m+3)+\cdots+(2m+2n-1)$ та $(2m+2n-1)+(2m+2n-3)+\cdots+(2m+1)$, де $m \geq 0$, отримаємо $n(4m+2n) = 2 \cdot 2025$, чи $n(2m+n) = 2025$, звідки випливає що число $n > 1$ має бути дільником числа 2025, не більшим за 45. Далі, перебравши всі такі дільники, отримаємо наступні пари чисел n та m: (3,336), (5,200), (9,108), (15,60), (25,28), (45,0). Отже, шукану множину розв'язків утворюють числа 3, 5, 9, 15, 25 та 45.

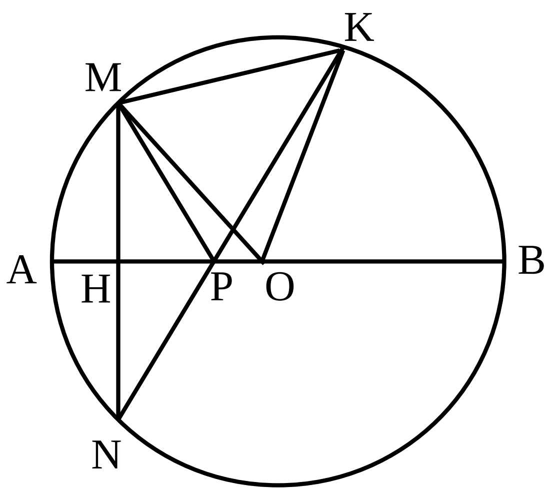
2. Подана рівність випливає з рівностей

$$\frac{a^4+b^4+(a+b)^4}{2} =$$

$$= a^4+2a^3b+3a^2b^2+2ab^3+b^4 = (a^2+ab+b^2)^2$$

при $a = 2024$, $b = 1$.

3. Нехай точка N симетрична до точки M відносно діаметра AB, H – точка перетину прямих MN та AB. З рівності трикутників MPH та NPH і рівності кутів KPB та NPH випливає, що точки K, P та N лежать на одній прямій. Тоді $\angle MNK = \angle HNP = 30^o$. Тому центральний кут MOK дорівнює 60^o. Оскільки OM та OK є



радіусами кола, то трикутник MOK рівносторонній. Тому також $MN = R = 8$, і не залежить від вибору точки P на діаметрі AB.

4. Не може. Нехай по колу були записані числа a, b, c, d саме у такому порядку. Тоді сума чотирьох вказаних добутків

$$ab + bc + cd + da = (a + c)(b + d) = -(a + c)^2 \leq 0.$$

5. Враховуючи множину значень квадратного кореня, отримаємо, що ліва, а з нею і права частина рівняння є невід’ємними. Тому $x \geq 0$. Покладаючи тепер $\sqrt[3]{x} = t \geq 0$, приходимо до рівняння

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + t^3}} = t.$$

Звідси випливає, що $\sqrt{1 + t^3} = t^2 - 1,\ t \geq 1$, звідки після піднесення до квадрату будемо мати $1 + t^3 = t^4 - 2t^2 + 1$, тобто

$$t^4 - t^3 - 2t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2(t + 1)(t - 2) = 0.$$

Отже, умову задачі задовольняє лише корінь $t = 2$. При цьому єдиним коренем поданого рівняння буде $x = 8$.

9 клас

1. Натуральне число $n > 1$ таке, що сума кубів n послідовних натуральних чисел дорівнює 2025. Знайдіть усі такі числа n.

2. У рівнобедреному трикутнику ABC кути при основі AC дорівнюють по 30^o. Виявилося, що на AC існують точки M та K (точка M ближча до A, ніж K) такі, що $AM = 1$, $KC = 2$, $\angle MBK = 60^o$. Знайдіть довжину відрізка MK.

3. Розв’яжіть рівняння

$$\sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = x.$$

4. Спростіть вираз

$$\frac{\sqrt{21} + \sqrt{33} + \sqrt{77} + 7}{\sqrt{3} + 2\sqrt{7} + \sqrt{11}},$$

позбувшись ірраціональності у знаменнику

5. Сума додатних чисел $x + y = 12$. Знайдіть найменше значення суми $\sqrt{4 + x^2} + \sqrt{9 + y^2}$.

Розв'язання задач

1. Як відомо,

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = (1 + 2 + \cdots + n)^2.$$

Це можна довести, наприклад, методом математичної індукції.

Для $n = 9$ звідси зразу отримуємо

$$1^3 + 2^3 + \cdots + 9^3 = (1 + 2 + \cdots + 9)^2 = 45^2 = 2025.$$

І звідси ж зрозуміло, що $n > 9$ бути не може.

Далі, з рівностей

$$(m+1)^3 + (m+2)^3 + \cdots + (m+n)^3 =$$
$$= (1 + 2 + \cdots + (m+n))^2 - (1 + 2 + \cdots + m)^2 =$$
$$= n\Big(\big(1 + 2 + \cdots + (m+n)\big) + (1 + 2 + \cdots + m)\Big) =$$
$$= n\left(\frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + \frac{m(m+1)}{2}\right) = 2025$$

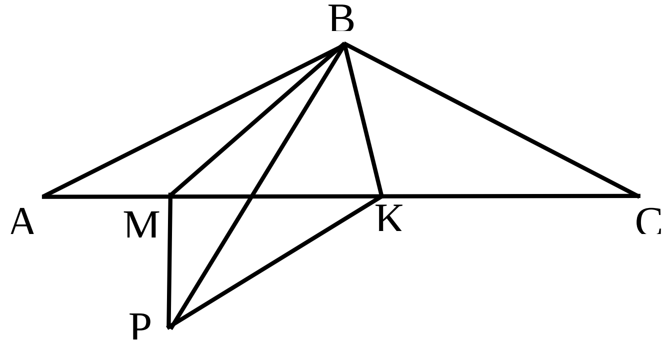
для цілих чисел $m > 0$ випливає, що $n < 9$ має бути дільником числа 2025. Але ні при $n = 3$, ні при $n = 5$ відповідні їм квадратні рівняння

$$3\left(\frac{(m+3)(m+4)}{2} + \frac{m(m+1)}{2}\right) = 2025 \Leftrightarrow m^2 + 4m - 669 = 0$$

та

$$5\left(\frac{(m+5)(m+6)}{2} + \frac{m(m+1)}{2}\right) = 2025 \Leftrightarrow m^2 + 6m - 390 = 0$$

не мають натуральних коренів m. Тому $n = 9$ – єдине шукане число.



2. Симетризуємо трикутники ABM та CBK відносно прямих BM та BK відповідно. Оскільки $\angle ABC = 120^o = 2\angle MBK$, то при такій симетрії сторони AB та CB

перейдуть в один і той же відрізок PB. У трикутнику MPK будемо мати: $PM = AM = 1$, $PK = KC = 2$, $\angle MPK = 30^o + 30^o = 60^o$. За теоремою косинусів знайдемо

$$MK = \sqrt{PM^2 + PK^2 - 2PM \cdot PK \cdot cos60^o} = \sqrt{1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 0{,}5} = \sqrt{3}.$$

Зауважимо, що з цього трикутника MK можна було знайти і за теоремою Піфагора.

3. Враховуючи область визначення та множину значень квадратного кореня, знайдемо, що $x \geq 1$. Позначивши $\sqrt{x - \frac{1}{x}} = a$, $\sqrt{1 - \frac{1}{x}} = b$, отримаємо $a + b = x$, $a^2 - b^2 = x - 1$. А оскільки $x = 0$ не є коренем цього рівняння, то $a - b = \frac{x-1}{x}$. Таким чином,

$$2a = x + \frac{x - 1}{x} = x - \frac{1}{x} + 1 = a^2 + 1.$$

З рівняння $2a = a^2 + 1$ знаходимо $a = 1$. Отже, також $\sqrt{x - \frac{1}{x}} = 1$. Далі маємо $x - \frac{1}{x} = 1$, $x^2 - x - 1 = 0$, $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$, $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$. З рівності

$$\sqrt{x_1 - \frac{1}{x_1}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x_1}} = \sqrt{x_1 + x_2} + \sqrt{1 + x_2} = 1 - x_2 = x_1$$

робимо висновок, що x_1 – єдиний дійсний корінь цього рівняння.

4. Нехай

$$\frac{\sqrt{21} + \sqrt{33} + \sqrt{77} + 7}{\sqrt{3} + 2\sqrt{7} + \sqrt{11}} = x.$$

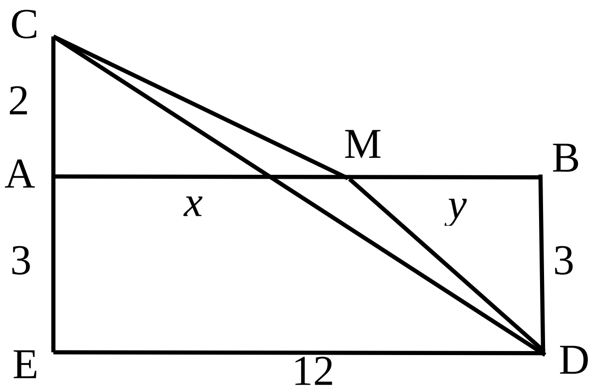
Тоді

$$\frac{1}{x} = \frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{7} + \sqrt{11}}{\sqrt{21} + \sqrt{33} + \sqrt{77} + 7} = \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{7}) + (\sqrt{7} + \sqrt{11})}{(\sqrt{3} + \sqrt{7})(\sqrt{7} + \sqrt{11})} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{11} - \sqrt{7}}{4} + \frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{11} - \sqrt{3}}{4}.$$

Отже,

$$x = \frac{4}{\sqrt{11} - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{11} + \sqrt{3}}{2}.$$



5. Розглянемо малюнок справа. Нехай $AM = x$, $MB = y$. Тоді $\sqrt{4 + x^2} = CM$, $\sqrt{9 + y^2} = MD$. $ED = AB = 12$, Отже, найменше значення суми $\sqrt{4 + x^2} + \sqrt{9 + y^2}$ отримаємо, якщо M лежатиме на відрізку CD. Тоді за теоремою Піфагора знаходимо $CD = 13$, що й буде найменшим значенням поданої суми.

10 клас

1. Довжини ребер, які виходять з однієї вершини прямокутного паралелепіпеда, виражаються натуральними числами, причому одне з них дорівнює сумі двох інших. Доведіть, що сума квадратів площ граней, які прилягають до цієї вершини, є квадратом натурального числа.

2. Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{x - 1} + \sqrt{2x - 3} + \sqrt{3x - 5} + \sqrt{4x - 7} = 5x - 6.$$

3. У прямокутному трикутнику ABC гіпотенуза $AB = c$, бісектриса $CK = l \leq c/2$. Знайдіть довжину його висоти CH.

4. Про числа x та y відомо, що $x + y = 1$, $x^2 + y^2 = 3$. Обчисліть $x^{10} + y^{10}$.

5. Для довільних дійсних чисел x, y доведіть нерівність

$$16^{sin^2 x + cos y} + 16^{cos^2 y + sin x} \geq 1.$$

Розв'язання задач

1. Нехай довжини таких ребер дорівнюють m, n та $m + n$. Тоді твердження задачі безпосередньо випливає з тотожності

$$(mn)^2 + \big(m(m + n)\big)^2 + \big(n(m + n)\big)^2 = (m^2 + mn + n^2)^2.$$

2. Позначимо послідовно доданки у лівій частині рівняння через a, b, c, d. Тоді

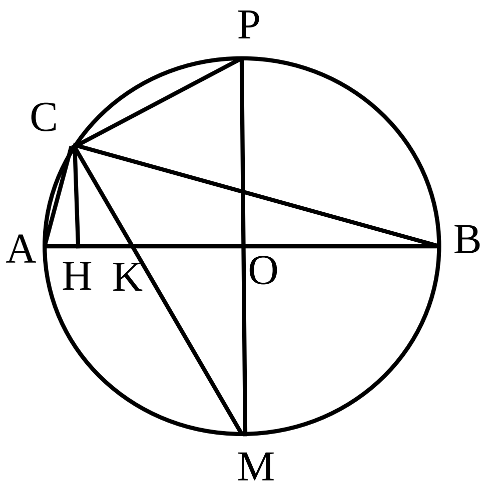
$$a+b+c+d=5x-6,\ a^2+b^2+c^2+d^2=2(5x-6)-4.$$

Таким чином, $a^2+b^2+c^2+d^2-2(a+b+c+d)+4=0$, тобто

$$(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2+(d-1)^2=0.$$

Отже, $a=b=c=d=1$, звідки випливає, що

$x-1=2x-3=3x-5=4x-7=1$, тобто $x=2$.



3. Продовжимо бісектрису CK до перетину її з описаним колом трикутника ABC у точці M, яка за властивістю вписаних кутів буде серединою нижньої дуги AB (див. мал. справа), і проведемо діаметр MP, перпендикулярний до AB. Нехай $MK=x$. Тоді з подібності прямокутних трикутників MKO та MPC отримаємо $\frac{MO}{MK}=\frac{MC}{MP}$, тобто $\frac{c}{2x}=\frac{x+l}{c}$. Звідси знаходимо $MK=x=\frac{-l+\sqrt{l^2+2c^2}}{2}$. Далі, з подібності трикутників MKO та CKH будемо мати $\frac{MO}{MK}=\frac{CH}{CK}$. Тому

$$CH=\frac{MO\cdot CK}{MK}=\frac{cl}{-l+\sqrt{l^2+2c^2}}=\frac{l\left(l+\sqrt{l^2+2c^2}\right)}{2c}.$$

Зауважимо, що умова $l\le c/2$ була суттєвою, бо довжина бісектриси трикутника не може перевищувати довжини медіани, проведеної з тієї ж вершини. А у прямокутному трикутнику довжина медіани, проведеної з вершини прямого кута, дорівнює половині гіпотенузи.

4. Покладаючи $x=\frac{1+t}{2}$ та $y=\frac{1-t}{2}$, з другої поданої рівності знайдемо $t=\pm\sqrt{5}$. У кожному з цих випадків будемо мати $x^2=1+x$, $y^2=1+y$. Позначивши $L_n=x^n+y^n$, $n\ge 1$, отримаємо

$$L_{n+2} = x^{n+2} + y^{n+2} = x^n(1+x) + y^n(1+y) = L_n + L_{n+1}.$$

Таким чином, послідовно знаходимо:

$$L_3 = 1 + 3 = 4,\ L_4 = 3 + 4 = 7,\ L_5 = 4 + 7 = 11,\ L_6 = 7 + 11 = 18,$$

$$L_7 = 11 + 18 = 29,\ L_8 = 18 + 29 = 47,\ L_9 = 29 + 47 = 76,$$

$$x^{10} + y^{10} = L_{10} = 47 + 76 = 123.$$

Зауважимо, що числа L_n називаються числами Люка.

5. За нерівністю між середнім арифметичним та середнім геометричним маємо

$$16^{sin^2x+cosy} + 16^{cos^2y+sinx} \geq 2\sqrt{16^{sin^2x+cosy} \cdot 16^{cos^2y+sinx}} =$$

$$= 2 \cdot 4^{sin^2x+cosy} \cdot 4^{cos^2y+sinx} = 4^{sin^2x+cosy+cos^2y+sinx+\frac{1}{2}} =$$

$$= 4^{\left(sinx+\frac{1}{2}\right)^2+\left(cosy+\frac{1}{2}\right)^2} \geq 4^0 = 1.$$

Рівність досягається, якщо $sinx = cosy = -\frac{1}{2}$.

11 клас

1. Розв’яжіть рівняння

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-3} + \sqrt{3x-5} + \cdots + \sqrt{11x-21} = 33x - 55.$$

2. На сторонах AB та AD прямокутника $ABCD$ вибрали точки M та K відповідно. Площі трикутників MBC, MAK та KCD відповідно дорівнюють S_1, S_2 та S_3. Знайдіть площу S_0 трикутника MCK.

3. Обчисліть суму

$$S = tg\frac{\pi}{2025}tg\frac{2\pi}{2025} + tg\frac{2\pi}{2025}tg\frac{3\pi}{2025} + \cdots + tg\frac{2024\pi}{2025}tg\frac{2025\pi}{2025}.$$

4. Для сторін a, b, c довільного трикутника ABC доведіть нерівність

$$a(b^2 + c^2 - a^2) + b(c^2 + a^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2) \leq 3abc.$$

5. Доведіть, що сума квадратів відстаней від довільної точки P кола, вписаного у рівносторонній трикутник ABC, не залежить від вибору такої точки.

Розв'язання задач

1. Позначимо послідовно доданки у лівій частині рівняння через $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{11}$. Тоді

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{11} = 33x - 55,$$
$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_{11}^2 = 2(33x - 55) - 11.$$

Таким чином,

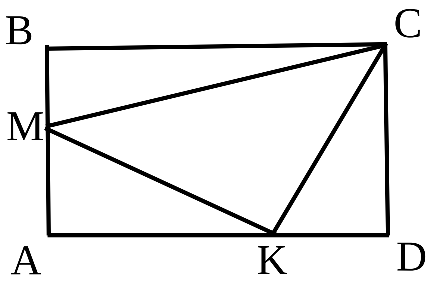
$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_{11}^2 - 2(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{11}) + 11 = 0,$$

тобто

$$(a_1 - 1)^2 + (a_2 - 1)^2 + (a_3 - 1)^2 + \cdots + (a_{11} - 1)^2 = 0.$$

Отже, $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_{11} = 1$, звідки випливає, що $x - 1 = 2x - 3 = 3x - 5 = \cdots = 11x - 21 = 1$, тобто $x = 2$.

2. Нехай $AD = a$, $AB = b$, $KD = x$, $MB = y$. Тоді $2S_1 = ay$, $2S_3 = bx$, $2S_2 = (a - x)(b - y) = ab - ay - bx + xy$, тобто $2S_2 = S - 2S_1 - 2S_3 + xy$, де S – площа прямокутника $ABCD$. Помноживши обидві частини останньої рівності на ab, отримаємо квадратне рівняння відносно S:



$$S^2 - 2(S_1 + S_2 + S_3)S + 4S_1S_3 = 0.$$

Враховуючи, що $S > S_1 + S_2 + S_3$, звідси знайдемо

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + \sqrt{(S_1 + S_2 + S_3)^2 - 4S_1S_3}.$$

Отже, $S_0 = \sqrt{(S_1 + S_2 + S_3)^2 - 4S_1S_3}$.

Зауважимо, що підкореневий вираз тут завжди буде додатним, бо його можна записати у вигляді $(S_1 - S_3)^2 + S_2(S_2 + 2S_1 + 2S_3)$.

3. З формули тангенса різниці випливає, що

$$tgx \cdot tgy = \frac{tgx - tgy}{tg(x - y)} - 1.$$

Тому

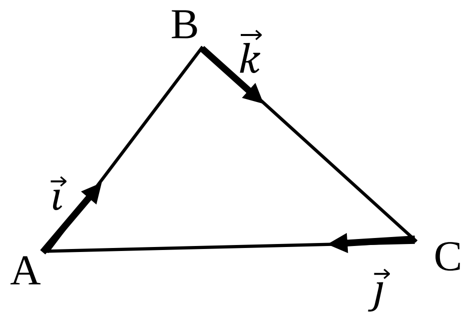
$$S=-\frac{1}{tg\frac{\pi}{2025}}\left[\left(tg\frac{\pi}{2025}-tg\frac{2\pi}{2025}\right)+\left(tg\frac{2\pi}{2025}-tg\frac{3\pi}{2025}\right)+\right.$$

$$\left.+\cdots+\left(tg\frac{2024\pi}{2025}-tg\frac{2025\pi}{2025}\right)\right]-2024=$$

$$=-\frac{1}{tg\frac{\pi}{2025}}\left(tg\frac{\pi}{2025}-tg\frac{2025\pi}{2025}\right)-2024=-2025.$$

4. Поділивши обидві частини поданої нерівності на abc, її з врахуванням теореми косинусів можна записати у вигляді

$$2cos\angle A+2cos\angle B+2cos\angle C\le 3.$$



Розглянемо тепер на сторонах трикутника ABC одиничні вектори $\vec{\iota},\vec{j},\vec{k}$ як на малюнку вище. Оскільки

$$0\le\left(\vec{\iota}+\vec{j}+\overrightarrow{k}\right)^2=(\vec{\iota})^2+(\vec{j})^2+\left(\overrightarrow{k}\right)^2+2\cdot\vec{\iota}\cdot\vec{j}+2\cdot\vec{\iota}\cdot\vec{k}+\ 2\cdot\vec{j}\cdot\vec{k}=$$

$$=3+2cos(180^o-\angle A)+2cos(180^o-\angle B)+2cos(180^o-\angle C)=$$

$$=3-2cos\angle A-2cos\angle B-2cos\angle C,$$

то потрібна нерівність доведена.

5. Для зручності розглянемо просторову систему координат, в якій вершини трикутника ABC лежать на її осях: $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$. Вписане у нього коло лежить на перетині площини $x+y+z=1$ та сфери $x^2+y^2+z^2=R^2$. Оскільки точка $M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$ лежить на цій сфері, то $R^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+0^2=\frac{1}{2}$. Отже, для довільної точки $P(x,y,z)$ на вписаному колі

$$AP^2+BP^2+CP^2=((x-1)^2+\ y^2+z^2)+(x^2+(y-1)^2+z^2)+$$

$$+(x^2+y^2+(z-1)^2)=3(x^2+y^2+z^2)-2(+y+z)+3=5/2.$$

При цьому $AB=BC=CA=\sqrt{2}$. Якщо ж $AB=BC=CA=a$, то

$$AP^2+BP^2+CP^2=\frac{5}{2}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{5a^2}{4}.$$

Зміст