

Математичний занзібар

Наймолодша ліга (7 клас)

*«І прийде час, коли один скаже: «Слава Україні!»,
а мільйони відповідатимуть: «Героям слава!»
Степан Бандера*

1. Натуральне число n має 6 натуральних дільників з урахуванням 1 та n . Скільки дільників може мати число n^2 ? Вкажіть усі можливі відповіді.
2. Розглянемо послідовність з 2025 натуральних чисел, перше число дорівнює 1, друге число – це 0. Після того, кожне наступне число є різницею між двома попередніми, тобто третє число є різниця між другим та першим, четверте число отримуємо, коли від третього віднімаємо друге і так далі. Яке число записане останнім?
3. Петрик у розмові з Василем сказав: «Я вчора брехав». Василь відповів, що він також вчора брехав. Відомо, що Петрик бреше лише по понеділках, вівторках та середах, а в інші дні каже правду, а Василь бреше у четвер, а в інші дні каже правду. В який день тижня могла відбутися ця розмова?
4. Шестикутник, який має рівні кути та рівні сторони, треба розрізати на 8 однакових частин.
5. У таблиці з 2 рядками та 2025 стовпчиками записані натуральні числа: в першому рядку зліва направо записані такі числа: 4050, 4049, 4048, ..., 2027 та 2026, у другому рядку зліва направо записані такі числа: 2025, 2024, 2023, ..., 2 та 1. Для скількох стовпчиків число у верхньому стовпчику ділиться націло на число у нижньому стовпчику?
6. Коли Петрика везе в школу мама на своєму автомобілі зі швидкістю 40 км/год, то він запізнюється на 3 хв. Якщо його везе тато на своєму автомобілі зі швидкістю 60 км/год, то він прибуває на 3 хв раніше. З якою швидкістю у км/год його везе в школу брат, якщо він прибуває точно коли треба?
7. Таблиця містить 2 стовпчика та 3 рядки. В кожному з її 6 комірок записане одне з чисел 1, 2, ..., 6, при цьому кожне число записане рівно один раз. Скількома різними способами можна заповнити цю табличку так, щоб у кожному з трьох рядків число у лівому стовпчику було менше за число в правому стовпчику?
8. Прямокутний паралелепіпед має ребра довжиною 3, 4 та 5 (рис. 2). Мураха хоче пройти по його поверхні таким чином, щоб побувати у кожній вершині принаймні один раз. Якою може бути найменша довжина її шляху?
9. У крамниці є 2025 блокнотів декількох кольорів, при цьому кожного кольору кількість блокнотів є степенем числа 2 і немає жодних двох кольорів, кількість блокнотів яких однакова. Петрик хоче придбати максимальну кількість блокнотів так, щоб кожні два мали різні кольори. Скільки блокнотів він зможе придбати?
10. Квиток в зоопарк коштує 38 грн для дорослих та 19 грн для дітей. За день було 800 відвідувачів, що сплатили разом за квитки 19057 грн. Скільки серед відвідувачів було

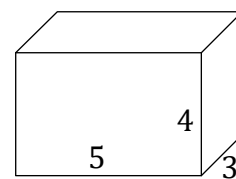


Рис. 2

дітей?

11. У кафе «3 монети» усі страви коштують цілу кількість дукатів від 1 до 12. Він вже започаткував монету в 1 дукат, і хоче додати до таких монет монети ще двох номіналів таким чином, щоб можна було сплатити найбільшу можливу кількість різних цін від 1 до 12, сплативши при цьому без решти однією чи двома монетами. Які номінали мав започаткувати господар кафе?

12. Проведіть на площині 5 прямих таким чином, щоб уся площина була поділена на 13 частин.

13. Чому дорівнює сума цифр числа $\underbrace{99 \dots 9}_{20} \cdot \underbrace{99 \dots 9}_{21}$?

14. В рядок записані 7 чисел таким чином, що сума будь-яких чотирьох сусідніх дорівнює 1. Яка найбільша кількість серед цих чисел може бути більшою від 2024?

15. Скільки натуральних чисел від 1 до 1000 не містять в своєму десятковому записі цифри 1?

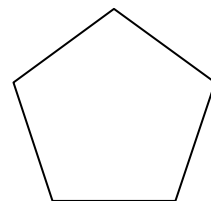


Рис. 4

16. Розглянемо п'ятикутник, у якого усі сторони та усі кути рівні. В ньому проведені усі діагоналі (рис. 4). Скільки тут можна нарахувати трикутників? Трикутники, які рівні, але розташовані в різних місцях вважаються різними?

17. Розглянемо усі чотирицифрові числа, в яких кожна з цифр 3, 4, 6 та 7 використана рівно один раз. Скільки з них діляться націло на 44?

18. Петрик з друзями пішов в ліс збирати гриби – білі та польські. Кожний зібрав однакову кількість грибів. Виявилось, що кожний дев'ятий білий гриб та кожний одинадцятий польський гриб зібрав саме Петрик (діти разом зібрали хоча б один гриб кожного виду). Скільки дітей було під час збору грибів та яких грибів Петрик зібрав більше – білих чи польських?

19. Петрик та Василь на початку гри мали по 64 цукерки. Після цього вони в деякому порядку робили такі дії: один з двох ділив свої цукерки навпіл та віддавав свою одну з половин іншому. Після шостого кроку у Петрика виявилася 61 цукерка, а у Василя відповідно – 67 цукерок. Скільки цукерок мав Петрик після третього ходу?

20. У білому квадраті 101×101 , що поділений на комірки 1×1 , частина комірок пофарбована у сірий колір за схемою як це показане на рис. 6. Скільки усього сірих комірок виявиться в усьому квадраті 101×101 ?

21. Скількома способами можна прочитати ЗАНЗІБАР на діаграмі по клітинках, що мають спільні сторони

З	А	Н	З	І	Б	А	Р
А	Н	З	І	Б	А	Р	А
Н	З	Т	Б	А	Р	А	Б
З	І	Б	А	Р	А	Б	І
І	Б	А	Р	А	Б	І	З
Б	А	Р	А	Б	І	З	Н
А	Р	А	Б	І	З	Н	А
Р	А	Б	І	З	Н	А	С

22. Знайдіть найбільше число, яке записується різними цифрами, і у якого квадрат останньої цифри дорівнює добутку решти цифр.

23. У слові ГІПОТЕЗА кожній літері відповідає якась ненульова цифра, а різним літерам відповідають різні цифри. Крім того, словам ГІП, ПОТ, ТЕЗ відповідають числа – точні квадрати, а слову ЗА – просте число. Знайдіть число, зашифроване у слові ГІПОТЕЗА.

24. Автомобільний номер назвемо щасливим, якщо у назві всіх його цифр немає жодної літери, яка повторюється більше одного разу. Знайдіть щасливий автомобільний номер, якому відповідає найбільше число.

25. Скільки розв'язків у цілих числах має рівняння

$$\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = 1 ?$$

26. У квадраті 10х10 розміщено 33 прямокутники 1х3 і один квадратик 1х1. У яких клітинках квадрата 10х10 може бути розташований квадратик 1х1? У відповіді вкажіть кількість таких клітинок.

Математичний занзібар

Молодша ліга (8 клас)

*«І прийде час, коли один скаже: «Слава Україні!»,
а мільйони відповідатимуть: «Героям слава!»
Степан Бандера*

1. Знайдіть усі пари цілих чисел (a, b) , що задовольняють рівності:

$$a = a^3 - 8a^2b + 21ab^2 - 18b^3.$$

2. Добуток трьох двоцифрових чисел a , b і c дорівнює найбільшому чотирицифровому числу, що кратне 45, яке записується чотирма різними непарними цифрами. Чому дорівнює сума чисел a , b і c ?

3. У прямокутній таблиці з m рядків та n стовпчиків кожна комірка пофарбована в білий або чорний колір за такими правилами:

- кожний рядок містить однакову кількість чорних та білих комірок;
- якщо рядок та колонка перетинаються по чорній комірці, то цей ряд та ця колонка містять однакову кількість чорних комірок, якщо по білій комірці – то однакову кількість білих комірок.

Для яких пар (m, n) існує таке розфарбування комірок?

4. У опуклому чотирикутнику $ABCD$ виконуються такі умови: $AB = BC = CD$ та $AC = BD = AD$. Якими можуть бути кути цього чотирикутника?

5. У таблиці з 2 рядками та 2025 стовпчиками записані натуральні числа: в першому рядку зліва направо записані такі числа: 4050, 4049, 4048, ..., 2027 та 2026, у другому рядку зліва направо записані такі числа: 2025, 2024, 2023, ..., 2 та 1. Для скількох стовпчиків число у верхньому стовпчику ділиться націло на число у нижньому стовпчику?

6. Коли Петрика везе в школу мама на своєму автомобілі зі швидкістю 40 км/год, то він запізнюється на 3 хв. Якщо його везе тато на своєму автомобілі зі швидкістю 60 км/год, то він прибуває на 3 хв раніше. З якою швидкістю у км/год його везе в школу брат, якщо він прибуває точно коли треба?

7. Таблиця містить 2 стовпчика та 3 рядки. В кожному з її 6 комірок записане одне з чисел 1, 2, ..., 6, при цьому кожне число записане рівно один раз. Скількома різними способами можна заповнити цю табличку так, щоб у кожному з трьох рядків число у лівому стовпчику було менше за число в правому стовпчику?

8. Ферма, що позначена на рис. 9 літерою M , відділена від тропи AB однаковими бетонними блоками, що розміщені у два рядки. Ці блоки розташовані на однаковій відстані один від одного в рядку, при цьому середина блока з одного рядку розташована рівно посередині проміжку між блоками іншого рядку. Для якої найбільшої відстані x між блоками з жодної точки відрізка AB не буде видно за цими блоками територію ферми M ? Розміри блоків та відстані між рядками показані на рис. 9.

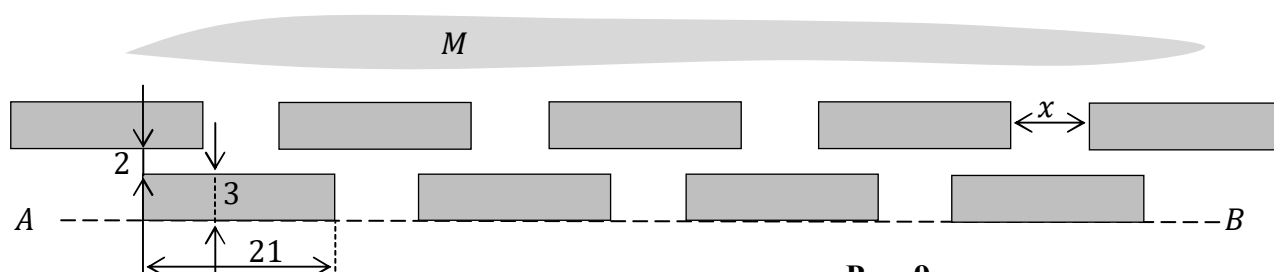


Рис. 9

9. Нехай натуральне число $n \geq 4$ кратне 4. Позначимо через A_n – суму усіх його непарних дільників, а через B_n – суму усіх її парних дільників за виключенням самого числа n . Яке найменше значення може приймати вираз $B_n - 2A_n$ та знайдіть усі числа, для яких це найменше значення досягається.

10. Стефан Каррі набрав у першій грі сезону 30 очок. Після того у наступних чотирьох іграх він набрав таку кількість очок, що середня кількість очок після кожної наступної гри ставала принаймні на 1 менше ніж після попередньої гри. Яку найменшу кількість очок міг набрати Каррі, щоб його середня результативність після перших 6 ігор стала не менше, ніж після першої гри, тобто 30 очок?

11. У кафе «3 монети» усі страви коштують цілу кількість дукатів від 1 до 12. Він вже започаткував монету в 1 дукат, і хоче додати до таких монет монети ще двох номіналів таким чином, щоб можна було сплатити найбільшу можливу кількість різних цін від 1 до 12, сплативши при цьому без решти однією чи двома монетами. Які номінали мав започаткувати господар кафе?

12. Проведіть на площині 5 прямих таким чином, щоб уся площа була поділена на 13 частин.

13. У літній математичній школі «Математичний олімп» зібралися від 500 до 1000 дітей. Фізрук вирішив провести спортивні естафети. Якщо він дітей розб'є по 8 в кожній, то 3 дитини лишаються поза командами. Якщо він дітей розб'є по 9 в кожній, то 3 дитини лишаються поза командами, та якщо він дітей розб'є по 10 в кожній, то знову 3 дитини лишаються поза командами. Скільки дітей було в математичній школі?

14. В рядок записані 8 чисел таким чином, що сума будь-яких чотирьох сусідніх дорівнює 1. Яка найбільша кількість серед цих чисел може бути більшою від 2024?

15. Зафарбуйте декілька клітин дошки 8×8 , щоб кожна клітина, включно із зафарбованими, мала спільну межу по стороні рівно з однією зафарбованою клітиною (вважаємо, що зафарбована клітина не має спільну межу сама з собою).

16. Всередині рівнобедреного трикутника ABC вибрана точка D таким чином, що $\angle DBC = 30^\circ$, $\angle DBA = 50^\circ$ та $\angle BCD = 55^\circ$. Знайдіть градусну міру $\angle DAC$.

17. Розглянемо усі чотирицифрові числа, в яких кожна з цифр 3, 4, 6 та 7 використана рівно один раз. Скільки з них діляться націло на 44?

18. Петрик з друзями пішов в ліс збирати гриби – білі та польські. Кожний зібрав однакову кількість грибів. Виявилось, що кожний дев'ятий білий гриб та кожний одинадцятий польський гриб зібрав саме Петрик (діти разом зібрали хоча б один гриб кожного виду). Скільки дітей було під час збору грибів та яких грибів Петрик зібрав більше – білих чи польських?

19. Петрик та Василь на початку гри мали по 64 цукерки. Після цього вони в деякому порядку робили такі дії: один з двох ділив свої цукерки навпіл та віддавав свою одну з половин іншому. Після шостого кроку у Петрика виявилася 61 цукерка, а у Василя відповідно – 67 цукерок. Скільки цукерок мав Петрик після третього ходу?

20. У білому квадраті 101×101 , що поділений на комірки 1×1 , частина комірок пофарбована у сірий колір за схемою як це показане на рис. 6. Скільки усього сірих комірок виявиться в усьому квадраті 101×101 ?

21. Скількома способами можна прочитати ЗАНЗІБАР на діаграмі по клітинках, що мають спільні сторони

З	А	Н	З	І	Б	А	Р
А	Н	З	І	Б	А	Р	А
Н	З	Т	Б	А	Р	А	Б
З	І	Б	А	Р	А	Б	І
І	Б	А	Р	А	Б	І	З
Б	А	Р	А	Б	І	З	Н
А	Р	А	Б	І	З	Н	А
Р	А	Б	І	З	Н	А	С

22. Знайдіть найбільше число, яке записується різними цифрами, і у якого квадрат останньої цифри дорівнює добутку решти цифр.

23. У слові ГІПОТЕЗА кожній літері відповідає якась ненульова цифра, а різним літерам відповідають різні цифри. Крім того, словам ГІП, ПОТ, ТЕЗ відповідають числа – точні квадрати, а слову ЗА – просте число. Знайдіть число, зашифроване у слові ГІПОТЕЗА.

24. Яблуко, апельсин і груша разом коштують не дорожче за 28 гривень. Два яблука і два апельсини разом коштують дорожче за п'ять груш, апельсин і дві груші разом коштують дорожче за чотири яблука, а груша і три яблука разом коштують дорожче за два апельсини. Скільки коштує апельсин, якщо ціна за кожний фрукт набуває цілого значення в гривнях?

25. Скільки розв'язків у цілих числах має рівняння

$$\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = 1 ?$$

26. Петрик знайшов натуральне число, яке є точним квадратом, а сума його цифр і кількість натуральних дільників також є точними квадратами. Миколка, Василь, Наталка і Тарас також знайшли числа з такими властивостями.

Виявилося, що всі знайдені числа попарно різні і в сумі дають число менше за 2300, а числа, знайдені хлопцями мають однакову суму цифр. Знайдіть і ви ці числа. У відповіді вкажіть суму п'ятих знайдених чисел.

Математичний занзібар

Середня ліга (9 клас)

*«І прийде час, коли один скаже: «Слава Україні!»,
а мільйони відповідатимуть: «Героям слава!»
Степан Бандера*

1. Знайдіть усі пари цілих чисел (a, b) , що задовольняють рівності:

$$a = a^3 - 8a^2b + 21ab^2 - 18b^3.$$

2. Розв'яжіть рівняння:

$$\frac{1}{\{x\}} + \frac{1}{[x]} + \frac{1}{x} = 0.$$

Тут через $[x]$ – ціла частина числа x , тобто найбільше ціле число, що не перевищує x , $\{x\}$ – дробова частина числа x , тобто $\{x\} = x - [x]$.

3. У прямокутній таблиці з m рядків та n стовпчиків кожна комірка пофарбована в білий або чорний колір за такими правилами:

- кожний рядок містить однакову кількість чорних та білих комірок;
- якщо рядок та колонка перетинаються по чорній комірни, то цей ряд та ця колонка містять однакову кількість чорних комірок, якщо по білій комірни – то однакову кількість білих комірок.

Для яких пар (m, n) існує таке розфарбування комірок?

4. У вписаного чотирикутника $ABCD$ довжини усіх сторін та діагоналі AC є цілими числами. Також відомо, що $\cos \angle ABC = \frac{1}{4}$, $2CD = AD + AC$ та $2AB = CA + CB + CD$. Яке найменше значення може приймати величина периметра чотирикутника $ABCD$?

5. Натуральне число n має рівно 2022 дільників: $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_{2022} = n$. Воно називається *гарним*, якщо справджується рівність: $3d_{2017} + 2d_{2019} = n$. Скільки існує гарних чисел?

6. Шлях між пунктами A і B дорівнює 15 км, спочатку дорога йде вгору, далі по рівному, наприкінці – донизу. Відомо, що ділянка кожного напрямку не менше 1 км. Час на весь шлях у пішохода зайняв рівно 3 години. Скільки максимум та мінімум часу може зайняти шлях у зворотному напрямі, якщо відомо, що швидкість пішохода на ділянках вгору 4 км/год, по рівному – 5 км/год та 6 км/год на ділянках донизу?

7. Таблиця містить 2 стовпчика та 3 рядки. В кожному з її 6 комірок записане одне з чисел 1, 2, ..., 6, при цьому кожне число записане рівно один раз. Скількома різними способами можна заповнити цю таблицю так, щоб у кожному з трьох рядків число у лівому стовпчику було менше за число в правому стовпчику?

8. На стороні AB прямокутника $ABCD$ вибрана точка E , що відмінна від кінців відрізка. Нехай $BD \cap CE = F$. Серед трикутників ADE , DEF , DCF , BCF та BEF є рівно дві пари трикутників з однаковою площею. Знайдіть відношення довжин відрізків EB та AB .

рівно посередині проміжку між блоками іншого рядку. Для якої найбільшої відстані x між блоками з жодної точки відрізка AB не буде видно за цими блоками територію ферми M ? Розміри блоків та відстані між рядками показані на рис. 9.

9. Нехай натуральне число $n \geq 4$ кратне 4. Позначимо через A_n – суму усіх його непарних дільників, а через B_n – суму усіх її парних дільників за виключенням самого числа n . Яке найменше значення може приймати вираз $B_n - 2A_n$ та знайдіть усі числа, для яких це найменше значення досягається.

10. У квадратного тричлена з цілими коефіцієнтами $f(x)$ величини $f(0)$, $f(3)$ та $f(4)$ приймають 3 попарно різні значення з множини $\{2, 20, 202, 2022\}$. Які значення може приймати величина $f(1)$? Вкажіть усі можливі значення.

11. У кафе «3 монети» усі страви коштують цілу кількість дукатів від 1 до 12. Він вже започаткував монету в 1 дукат, і хоче додати до таких монет монети ще двох номіналів таким чином, щоб можна було сплатити найбільшу можливу кількість різних цін від 1 до 12, сплативши при цьому без решти однією чи двома монетами. Які номінали мав започаткувати господар кафе?

12. Знайдіть площу восьмикутника $MPNQKRLS$, що розташований в квадраті $ABCD$ зі стороною 2 (рис. 15). Тут M, N, K, L – середини відповідних сторін квадрату, P, Q, R, S – точки перетину відповідних відрізків.

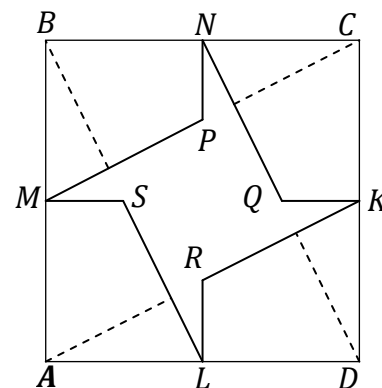


Рис. 15

13. У літній математичній школі «Математичний олімп» зібралися від 500 до 1000 дітей. Фізрук вирішив провести спортивні естафети. Якщо він дітей розб'є по 8 в кожній, то 3 дитини лишаються поза командами. Якщо він дітей розб'є по 9 в кожній, то 3 дитини лишаються поза командами, та якщо він дітей розб'є по 10 в кожній, то знову 3 дитини лишаються поза командами. Скільки дітей було в математичній школі?

14. Для многочлену

$$P(x) = (1 + x^3)(1 + x^9)(1 + x^{27})(1 + x^{39})(1 + x^{81})(1 + x^{243}) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_{402}x^{402}$$

з'ясуйте, скільки коефіцієнтів a_k , $k = \overline{0, 402}$ не дорівнюють нулеві?

15. Зафарбуйте декілька клітин дошки 8×8 , щоб кожна клітина, включно із зафарбованими, мала спільну межу по стороні рівно з однією зафарбованою клітиною (вважаємо, що зафарбована клітина не має спільну межу сама з собою).

16. Всередині рівнобедреного трикутника ABC вибрана точка D таким чином, що $\angle DBC = 30^\circ$, $\angle DBA = 50^\circ$ та $\angle BCD = 55^\circ$. Знайдіть градусну міру $\angle DAC$.

17. Знайдіть усі трійки натуральних чисел $x \leq y \leq z$, що задовольняють рівнянню:

$$x^3(y^3 + z^3) = 2012(xyz + 2).$$

18. Знайдіть усі натуральні числа $n \geq 3$, для яких серед довільних n додатних чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$, що задовольняють умову $\max\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \leq n \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, існує 3 числа, що є сторонами гострокутного трикутника.

19. На шахівниці 3×3 вертикалі позначені буквами a, b, c , а горизонталі – через 1, 2, 3. У лівому нижньому полі $a1$ стоїть шаховий кінь, який ходить, як добре відомо, буквою «Г». скількома способами цей кінь за 12 ходів кінь може досягти правого верхнього поля $c3$? Шляши вважаються різними, якщо їх виписати послідовно полями $a1 - b3 - a1 - \dots$, то принаймні в одній позиції стоять різні поля.

20. У гострокутному трикутнику ABC проведена висота $АН$, точка M – середина сторони AB . Пряма $CP \perp MN$, де $P \in MN$. Знайдіть довжину сторони AC , якщо відомо, що $AB = 21$, $BH = 7$ та $BP = CP$.

21. Скількома способами можна прочитати ЗАНЗІБАР на діаграмі по клітинках, що мають спільні сторони

З	А	Н	З	І	Б	А	Р
А	Н	З	І	Б	А	Р	А
Н	З	Т	Б	А	Р	А	Б
З	І	Б	А	Р	А	Б	І
І	Б	А	Р	А	Б	І	З
Б	А	Р	А	Б	І	З	Н
А	Р	А	Б	І	З	Н	А
Р	А	Б	І	З	Н	А	С

22. Знайдіть найбільше число, яке записується різними цифрами, і у якого куб першої цифри дорівнює добутку решти цифр.

23. У слові ГІПОТЕЗА кожній літері відповідає якась ненульова цифра, а різним літерам відповідають різні цифри. Крім того, словам ГІП, ПОТ, ТЕЗ відповідають числа – точні квадрати, а слову ЗА – просте число. Знайдіть число, зашифроване у слові ГІПОТЕЗА.

24. Яблуко, апельсин і груша разом коштують не дорожче за 28 гривень. Два яблука і два апельсини разом коштують дорожче за п'ять груш, апельсин і дві груші разом коштують дорожче за чотири яблука, а груша і три яблука разом коштують дорожче за два апельсини. Скільки коштує апельсин, якщо ціна за кожний фрукт набуває цілого значення в гривнях?

25. У веселій країні Гексаляндії відомо, що $5+5=14$, $15+15=34$, $25+25=54$, то скільки буде в сумі $45+45$?

26. Петрик знайшов натуральне число, яке є точним квадратом, а сума його цифр і кількість натуральних дільників також є точними квадратами. Миколка, Василь, Наталка і Тарас також знайшли числа з такими властивостями.

Виявилося, що всі знайдені числа попарно різні і в сумі дають число менше за 2300, а числа, знайдені хлопцями мають однакову суму цифр. Знайдіть і ви ці числа. У відповіді вкажіть суму п'яťох знайдених чисел.

Математичний занзібар

Старша ліга (10–11 класи)

«І прийде час, коли один скаже: «Слава Україні!»,
а мільйони відповідатимуть: «Героям слава!»
Степан Бандера

1. Знайдіть найбільше натуральне значення k , для якого вираз

$$(5-1)(5^5-1)(5^{5^5}-1)\dots(5^{5^{5^5}}-1)$$

ділиться націло на 2^k . В останньому множнику використано 2025 цифр 5.

2. Розв'яжіть рівняння:

$$\frac{1}{\{x\}} + \frac{1}{[x]} + \frac{1}{x} = 0.$$

Тут через $[x]$ – ціла частина числа x , тобто найбільше ціле число, що не перевищує x , $\{x\}$ – дробова частина числа x , тобто $\{x\} = x - [x]$.

3. У прямокутній таблиці з m рядків та n стовпчиків кожна комірка пофарбована в білий або чорний колір за такими правилами:

- кожний рядок містить однакову кількість чорних та білих комірок;
- якщо рядок та колонка перетинаються по чорній комірці, то цей ряд та ця колонка містять однакову кількість чорних комірок, якщо по білій комірці – то однакову кількість білих комірок.

Для яких пар (m, n) існує таке розфарбування комірок?

4. Заданий правильний шестикутник $ABCDEF$ з стороною 1, всередині якого обрали точку O . Відрізки AO, BO, CO, DO, EO та FO розбивають його на 6 трикутників. Яке найбільше значення може приймати сума площ трикутників AOB, COD та EOF ?

5. Натуральне число n має рівно 2022 дільників: $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_{2022} = n$. Воно називається *гарним*, якщо справджується рівність: $3d_{2017} + 2d_{2019} = n$. Скільки існує гарних чисел?

6. Додатні числа a, b, c та d задовольняють умову $a + bc + cd + db + \frac{1}{ab^2c^2d^2} = 18$. Яке найбільше значення може приймати a ?

7. Коник стрибає по цілочисельній решитці. Починає з точки $(0, 0)$. Перший стрибок довжиною 1 робить по горизонталі, другий стрибок довжиною 2 робить по вертикалі, третій стрибок довжиною 3 – по горизонталі, четвертий стрибок довжиною 4 по вертикалі і так далі. Для яких натуральних n коник після n стрибків зможе повернутися в початкову точку $(0, 0)$?

8. На стороні AB прямокутника $ABCD$ вибрана точка E , що відмінна від кінців відрізка. Нехай $BD \cap CE = F$. Серед трикутників ADE, DEF, DCF, BCF та BEF є рівно дві пари трикутників з однаковою площею. Знайдіть відношення довжин відрізків EB та AB .

рівно посередині проміжку між блоками іншого рядку. Для якої найбільшої відстані x між блоками з жодної точки відрізка AB не буде видно за цими блоками територію ферми M ? Розміри блоків та відстані між рядками показані на рис. 9.

9. Нехай натуральне число $n \geq 4$ кратне 4. Позначимо через A_n – суму усіх його непарних дільників, а через B_n – суму усіх її парних дільників за виключенням самого числа n . Яке найменше значення може приймати вираз $B_n - 2A_n$ та

знайдіть усі числа, для яких це найменше значення досягається.

10. Петрик придумав послідовність, першими трьома членами якої були числа $0, 1, -1, \dots$ і виписав її у трьох

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & -1 & \dots & \dots & \dots & & \\ + & 0 & 1 & -1 & \dots & \dots & \dots & \\ & & 0 & 1 & -1 & \dots & \dots & \dots \\ \hline & & 0 & 3 & 6 & 9 & 12 & \dots \end{array}$$

Рис. 18

рядках з сувом на 1 елемент. Після цього він порахував значення сум у кожному повному стовпчику, як це показано на рис. 18. Яким є 2021 член послідовності, що написав Петрик?

11. У кафе «3 монети» усі страви коштують цілу кількість дукатів від 1 до 12. Він вже започаткував монету в 1 дукат, і хоче додати до таких монет монети ще двох номіналів таким чином, щоб можна було сплатити найбільшу можливу кількість різних цін від 1 до 12, сплативши при цьому без решти однією чи двома монетами. Які номінали мав започаткувати господар кафе?

12. Знайдіть площу восьмикутника $MPNQKRLS$, що розташований в квадраті $ABCD$ зі стороною 2 (рис. 15). Тут M, N, K, L – середини відповідних сторін квадрату, P, Q, R, S – точки перетину відповідних відрізків.

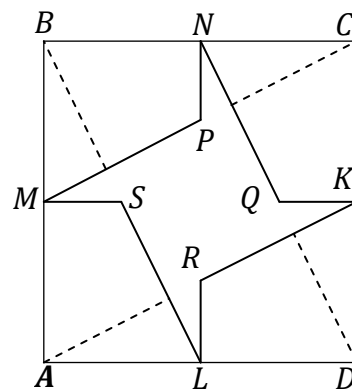


Рис. 15

13. Скільки існує натуральних чисел $n \in [4, 2022]$, що не є простими, для яких для довільного натурального числа $k \in [1, \sqrt{n} - 1]$, число C_n^k ділиться націло на n .

14. Для многочлену

$$P(x) = (1 + x^3)(1 + x^9)(1 + x^{27})(1 + x^{39})(1 + x^{81})(1 + x^{243}) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_{402}x^{402}$$

з'ясуйте, скільки коефіцієнтів a_k , $k = \overline{0, 402}$ не дорівнюють нулеві?

15. Кубик $2 \times 2 \times 2$ складений з темних, через яких нічого не видно, та прозорих, через які все видно маленьких кубиків (рис. 19). Темні кубики розташовані таким чином, що через цей кубик $2 \times 2 \times 2$, нічого не видно згори, прямо та збоку. Яку найменшу кількість темних кубиків з 27 можна використати, щоб через утворений кубик $3 \times 3 \times 3$ так само нічого не було видно згори, прямо та збоку?

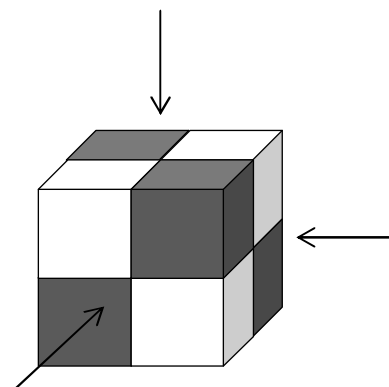


Рис. 19

16. Всередині рівнобедреного трикутника ABC вибрана точка D таким чином, що $\angle DBC = 30^\circ$, $\angle DBA = 50^\circ$ та $\angle BCD = 55^\circ$. Знайдіть градусну міру $\angle DAC$.

17. Знайдіть усі трійки натуральних чисел $x \leq y \leq z$, що задовольняють рівнянню:

$$x^3(y^3 + z^3) = 2012(xyz + 2).$$

18. Знайдіть усі натуральні числа $n \geq 3$, для яких серед довільних n додатних чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$, що задовольняють умову $\max\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \leq n \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, існує 3 числа, що є сторонами гострокутного трикутника.

19. На шахівниці 3×3 вертикалі позначені буквами a, b, c , а горизонталі – через 1, 2, 3. У лівому нижньому полі $a1$ стоїть шаховий кінь, який ходить, як добре відомо, буквою «Г». скількома способами цей кінь за 12 ходів кінь може досягти правого верхнього поля $c3$? Шляши вважаються різними, якщо їх виписати послідовно полями $a1 - b3 - a1 - \dots$, то принаймні в одній позиції стоять різні поля.

20. Троє друзів – Василь, Дарина та Грицько обідають у піцерії Петрика. Кожний з них замовив одну піцу діаметром 30 см. Вони сидять на різних сторонах прямокутного столу: Дарина сидить на стороні довжиною 70 см; а хлопці сидять один навпроти одного на сторонах довжиною l см. Петрик спочатку викладає піцу для Дарини так, щоб вона дотикалася до середини її сторони столу; далі – дві інші піци кладе на стіл таким чином, щоб кожна була дотична до сторони столу свого власника та до піци Дарини. Яке мінімальне можливе значення l , щоб усі три піци лежали на столі?

21. Скількома способами можна прочитати слово ЗАНЗІБАР на діаграмі по клітинках, що мають спільні сторони

З	А	Н	З	І	Б	А	Р
А	Н	З	І	Б	А	Р	А
Н	З	Т	Б	А	Р	А	Б
З	І	Б	А	Р	А	Б	І
І	Б	А	Р	А	Б	І	З
Б	А	Р	А	Б	І	З	Н
А	Р	А	Б	І	З	Н	А
Р	А	Б	І	З	Н	А	С

22. Знайдіть найбільше число, яке записується різними цифрами, і у якого квадрат або куб першої цифри дорівнює добутку решти цифр.

23. Яблуко, апельсин і груша разом коштують не дорожче за 28 гривень. Два яблука і два апельсини разом коштують дорожче за п'ять груш, апельсин і дві груші разом коштують дорожче за чотири яблука, а груша і три яблука разом коштують дорожче за два апельсини. Скільки коштує апельсин, якщо ціна за кожний фрукт набуває цілого значення в гривнях?

24. У веселій країні Гексаляндії відомо, що $5+5=14$, $15+15=34$, $25+25=54$. Скільки тоді буде в сумі $45+45$?

25. Знайдіть кількість цілочисельних значень (x, y) , при яких досягається мінімальне значення виразу

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-8)^2} + \sqrt{(x-14)^2 + (y+1)^2}$$

26. Петрик знайшов натуральне число, яке є точним квадратом, а сума його цифр і кількість натуральних дільників також є точними квадратами. Миколка, Василь, Наталка і Тарас також знайшли числа з такими властивостями.

Виявилося, що всі знайдені числа попарно різні і в сумі дають число менше за 2300, а числа, знайдені хлопцями мають однакову суму цифр. Знайдіть і ви ці числа. У відповіді вкажіть суму п'ятих знайдених чисел.